

通信ネットワーク工学 試験問題

注意：必ず考え方が分かるように解答すること。

問 1 (45 点)

以下の問に答えよ。

- (1) 客には 2 種類のクラスがあり，クラス i ($i = 1, 2$) の客は他の事象とは独立な率 λ_i をもつポワソン過程に従い到着し，他の客とは独立に，パラメタ μ_i の指数分布に従う時間だけシステム内に留まる待ち行列モデルを考える．このモデルの定常状態における各クラスの系内客数 $X_i(t)$ ($i = 1, 2$) を表すマルコフ連鎖 $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))$ は可逆であることを示せ．必要ならば $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$ ($i = 1, 2$) を用いよ．
- (2) 一般に，状態集合 S をもつ可逆なマルコフ連鎖の状態が j ($j \in S$) である定常確率を π_j とする．このとき状態集合 $A \in S$ へ向けて切断されたマルコフ連鎖は可逆であり，かつ，切断されたマルコフ連鎖の状態が j ($j \in A$) である定常確率 π'_j は π_j を用いて表現できることを示せ．
- (3) 上記の (1) のモデルを少し変形して，系内の利用可能な資源が有限であるモデル，すなわち，ある正定数 c が存在し，新たに到着したクラス i の客は，もし $n_1 r_1 + n_2 r_2 \leq c - r_i$ ならばシステムに収容され，それ以外の場合は呼損となる資源共有モデルを考える．ただし， n_i ($i = 1, 2$) は到着時に系内にいるクラス i の客数を表し， r_i はクラス i の客が要求する資源量を表す．このとき，クラス i ($i = 1, 2$) の系内客数が n_i である定常確率 $\pi(n_1, n_2)$ を求めよ．必要ならば $\Omega(c) = \{(n_1, n_2); n_1 \geq 0, n_2 \geq 0, n_1 r_1 + n_2 r_2 \leq c\}$ を用いよ．

問 2 (45 点)

以下の問に答えよ。

- (1) N 個のノードからなる無向連結グラフ上の酔歩 (random walk) を考える．グラフ上に一つの物体があり，この物体は各ノード i ($i = 1, 2, \dots, N$) にパラメタ μ の指数分布に従う時間だけ滞在する．ノード i での滞在が終了すると，物体はノード i と隣接しているノードへ移動する．隣接ノードが複数ある場合，移動先のノードは同様に確からしい確率で選ばれる (隣接ノードが d 個あれば，それぞれ $1/d$ の確率で移動先ノードとして選ばれる)．ノード i の次数 (隣接ノード数) を d_i とする． $X(t)$ で時刻 t において物体が滞在しているノードを表す．このとき，コルモゴロフの規準を用いて定常な $X(t)$ は可逆な連続時間マルコフ連鎖となることを示せ．
- (2) 定常状態における確率分布 $\pi_i = \Pr(X(t) = i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) は全ての i, j に対して $\pi_i / d_i = \pi_j / d_j$ を満たすことを示せ．
- (3) 定常状態における確率分布 $\pi_i = \Pr(X(t) = i)$ ($i = 1, 2, \dots, N$) を求めよ．

追記：マルコフ連鎖の動作原理 (定理 5.6) を確認しておくこと

問 3 (10 点)

授業に出席していた人は，授業の進め方などに対するコメントを書いて下さい．建設的な批判を歓迎します．出席しなかった人は，どのように試験の準備をしたか，どの程度理解できたかと，この試験の自己採点をして下さい．

通信トラヒック工学 試験問題

注意：必ず考え方が分かるように解答すること。

問 1 (20 点)

N 個の独立な率 λ_i ($i = 1, \dots, N$) をもつポワソン過程を重ね合わせた到着過程（重畳過程）について以下の問に答えよ。なお、パラメタ λ をもつ指数分布の分布関数は $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$ ($x \geq 0$) で与えられる。

- (1) 重畳過程は率 $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_N$ をもつポワソン過程となることを示せ。
- (2) 重畳過程において到着があったという条件の下で、その到着が j 番目 ($j = 1, 2, \dots, N$) の到着流からの到着である確率は、到着間隔とは独立に λ_j/λ で与えられることを示せ。

問 2 (30 点)

以下の問に答えよ。

- (1) 二つの客のクラスがあり、クラス k ($k = 1, 2$) の客は率 λ_k をもつポワソン過程に従い到着し、他の客とは独立に、パラメタ μ_k をもつ指数分布に従う時間だけシステム内に留まる待ち行列モデル（2 クラス $M/M/\infty$ ）を考える。定常状態におけるクラス k ($k = 1, 2$) の客数を X_k とし、 $\pi_{i,j} = \Pr(X_1 = i, X_2 = j)$ ($i, j = 0, 1, \dots$) としたとき、 $\pi_{i,j}$ を $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$ ($k = 1, 2$) を用いて表せ。
- (2) 上記 (1) のモデルの系内客数を表す定常なマルコフ連鎖は可逆であることを示せ。
- (3) 一般に、状態集合 S をもつ可逆な連続時間マルコフ連鎖の状態が j ($j \in S$) である定常確率を π_j とする。このとき状態集合 $A \in S$ へ向けて切断されたマルコフ連鎖は可逆であり、かつ、切断されたマルコフ連鎖の状態が j ($j \in A$) である定常確率 π'_j は π_j を用いて表現できることを示せ。

問 3 (40 点)

C 単位の帯域をもつ回線群を考える。ただし C は自然数である。全ての呼は 1 単位の帯域を要求する。呼には二つのクラスがある。クラス 1 の保留中の呼は高々 M 個 ($M < C$) に制限されており、クラス 2 の保留中の呼は高々 N 個 ($N < C$) に制限されている。ただし $M + N > C$ である。その結果、クラス 1 の呼は、発呼時にクラス 1 の呼が M 個保留中であるか、あるいは、 C 単位の回線が全て保留中であるとき、呼損となる。同様に、クラス 2 の呼は、発呼時にクラス 2 の呼が N 個保留中であるか、あるいは、 C 単位の回線が全て保留中であるとき、呼損となる。クラス k ($k = 1, 2$) の資源要求の発生は率 λ_k をもつポワソン過程に従い、クラス k ($k = 1, 2$) の保留時間はパラメタ μ_k の指数分布に従うと仮定する。 $\rho_k = \lambda_k/\mu_k$ ($k = 1, 2$) として、以下の問に答えよ。

- (1) この系が三つのリンクをもつ呼損網でモデル化できることを示せ。
- (2) クラス k ($k = 1, 2$) の保留中の呼数を n_k とし、 (n_1, n_2) で系の状態を表す。系が取り得る状態の集合 Ω を示せ。
- (3) 上記 (1) の呼損網に対して問 2 (3) の議論が援用できることを示せ。
- (4) 状態 (n_1, n_2) の定常状態確率ならびに各クラスの呼損率を求めよ。

問 4 (10 点)

授業に出席していた人は、授業の進め方などに対するコメントを書いて下さい。建設的な批判を歓迎します。出席しなかった人は、どのように試験の準備をしたか、どの程度理解できたかと、この試験の自己採点をして下さい。