情報通信数学 I 試験問題

令和 6 年 2 月 6 日 15:10〜16:30

注意：必ず考え方が分かるように解答すること

V, W を同じ体 K 上の線形空間としたとき，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ ならびに任意の $\alpha, \beta \in K$ に対して，$f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$ が成立する写像 $f : V \to W :\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ を線形写像という.

問 1（10 点）

V の零元を $\boldsymbol{0}$, W の零元を $\boldsymbol{0}'$ としたとき，任意の体 K 上の線形写像 $f :\ V \to W :\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ において $f(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}'$ であることを示せ.

線形空間 V の線形部分空間 W_1 と W_2 に対して $W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y} \in W_1,\ \boldsymbol{z} \in W_2\}$ を W_1 と W_2 の和空間と呼び，$W_1 + W_2$ と表す．さらに，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が，ある $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$，$\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ を用いて $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ と一意に表されるとき，V は W_1 と W_2 の直和と呼ばれ，$V = W_1 \oplus W_2$ と表す.

問 2（10 点）

$V = W_1 + W_2$ かつ $W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ ならば $V = W_1 \oplus W_2$ であることを示せ.（ヒント：V のベクトルが二通りに表されると仮定して，それらが等しいことを示せ）

$\mathbb{C}$ 上の線形空間 V における内積とは，$(\cdot, \cdot) :\ V \times V \to \mathbb{C}$ であって，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ ならびにスカラー $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して (i) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ は 0 または正の実数，かつ，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, (ii) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$, (iii) $(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, (iv) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ が成立するものを指す．$\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ の内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ となるとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するという．さらに，V の基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ をなすベクトルが互いに直交し，かつ，全ての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\sqrt{(\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i)} = 1$ であるとき，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ を V の正規直交基底という.

問 3（10 点）

V を n 次元線形空間とする．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ を 正規直交基底 $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ の線型結合 $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \alpha_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n\boldsymbol{v}_n$ で表すとしたとき，α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を求めよ.（ヒント：$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{v}_i$ の内積を取ってみよ）

問 4（10 点）

任意の $\boldsymbol{x} \in C^n$，$\boldsymbol{y} \in C^m$，並びに $m \times n$ 行列 A に対して，標準内積 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\top \overline{\boldsymbol{y}}$ の下で $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, A^*\boldsymbol{y})$ が成立することを示せ．ただし $A^* = \overline{A}^\top$．また，同じ条件の下で $(A\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, B\boldsymbol{y})$ が成立するならば $B = A^*$ であることを示せ.（ヒント：後半は左辺と右辺の差を考えよ）

$\mathbb{C}$ 上の内積空間 V の線形部分空間 W に対して，W の全てのベクトルと直交する V のベクトル全てからなる集合 $W^\perp = \{\boldsymbol{x} \in V \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \forall \boldsymbol{y} \in W\}$ を W の直交補空間という．このとき，$V = W \oplus W^\perp$ が成立するので，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}''$ $(\boldsymbol{x}' \in W,\ \ \boldsymbol{x}'' \in W^\perp)$ と一意に表現される．このような状況下における写像 $f :\ V \to V :\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}'$ を V の W 上への直交射影という.

問 5（10 点）

線形変換 $P :\ V \to V :\ \boldsymbol{x} \mapsto P\boldsymbol{x}$ が直交射影であるならば，$P^2 = P$，かつ，$P^* = P$ が成立することを示せ.（ヒント：前半は射影であるための必要十分条件、後半は前問で証明した結果を用いよ）

情報通信数学 I 試験問題

令和 7 年 1 月 28 日 15:10〜16:30

注意：論理に飛びがないように解答せよ．なお，この問題文に記載されていない事実を用いる場合はその証明を与えよ．

体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間 V とは，集合 V と体 $\mathbb{C}$ に対して，加法 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V)$ と スカラー乗法 $\alpha\boldsymbol{x}$ $(\boldsymbol{x}\in V,\ \alpha\in\mathbb{C})$ が定義されており，これらの演算が V に閉じているものを指す．$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n\in V$ と $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ に対して $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n$ を $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ の線形結合といい，$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=0$ が $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ のみで成立するとき，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ は線形独立であるという．特に，(i) $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ は線形独立であり，かつ，(ii) V の任意のベクトルが $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n$ の線形結合で表されるとき，$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n]$ を V の基底という．

V, W を同じ体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間としたとき，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ ならびに任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対して，$f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})=\alpha f(\boldsymbol{x})+\beta f(\boldsymbol{y})$ が成立する写像 $f\colon\ V\to W\colon\ \boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x})$ を線形写像という．

問 1（10 点）

$\boldsymbol{A}$ を $m\times n$ 行列として，同じ体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $V=\mathbb{C}^n$，$W=\mathbb{C}^m$ に対する線形写像 $f\colon\ \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m;\ \boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を考える．任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ に対して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ であることを示せ．

体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間 V の空でない部分集合を S とする．V から誘導される加法とスカラー乗法によって S が線形空間となっているとき，S を V の線形部分空間という．

問 2（10 点）

線形写像 $f\colon\ V\to W;\ \boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x})$ において，像 $\mathrm{Im}\ f$ と核 $\mathrm{Ker}\ f$ はそれぞれ $\mathrm{Im}\ f=\{\boldsymbol{y}\in W\mid\boldsymbol{y}=f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in V\}$，$\mathrm{Ker}\ f=\{\boldsymbol{x}\in V\mid f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}\}$ で定義される．

(i) $\mathrm{Im}\ f$ は W の線形部分空間であることを示せ．

(ii) $\mathrm{Ker}\ f$ は V の線形部分空間であることを示せ．

線形空間 V の線形部分空間 W_1 と W_2 に対して $W_1+W_2=\{\boldsymbol{x}\in V\mid\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{x}_1\in W_1,\ \boldsymbol{x}_2\in W_2\}$ とする．さらに，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が，ある $\boldsymbol{x}_1\in W_1$，$\boldsymbol{x}_2\in W_2$ を用いて $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ と一意に表されるとき，$V=W_1\oplus W_2$ と表す．なお，$V=W_1\oplus W_2$ は $V=W_1+W_2$ かつ $W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$ と等価である．

$\mathbb{C}$ 上の線形空間 V における内積とは，$(\cdot,\cdot)\colon\ V\times V\to\mathbb{C}$ であって，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}\in V$ ならびに $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して (i) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})$ は 0 または正の実数，かつ，$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})=0\ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，(ii) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\overline{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})}$，(iii) $(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$，(iv) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ が成立するものを指す．$\mathbb{C}$ 上の内積空間（内積が定義された $\mathbb{C}$ 上の線形空間）V のベクトル $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ に対して $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ となるとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は直交するという．さらに，V の基底 $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n]$ をなすベクトルが互いに直交し，かつ，$\sqrt{(\boldsymbol{v}_i,\boldsymbol{v}_i)}=1$，$\forall i\in\{1,2,\ldots,n\}$ であるとき，$[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n]$ を V の正規直交基底という．

問 3（10 点）

$\mathbb{C}$ 上の内積空間 V の線形部分空間 W に対して，直交補空間 $W^\perp$ は $W^\perp=\{\boldsymbol{x}\in V\mid(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0,\forall\boldsymbol{y}\in W\}$ で与えられる．$\mathbb{C}$ 上の内積空間 V の線形部分空間 W に対して，$V=W\oplus W^\perp$ が成立することを示せ．なお，線形部分空間 W の正規直交基底を $[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\ldots,\boldsymbol{w}_r]$ としたとき，任意の $\boldsymbol{x}\in W$ に対して $\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}_1)\boldsymbol{w}_1+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}_2)\boldsymbol{w}_2+\cdots+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{w}_r)\boldsymbol{w}_r$ が成立することを用いてよい．

問 4（10 点）

線形写像 $f\colon\ \mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^m;\ \boldsymbol{x}\mapsto\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ において，$\mathbb{C}^m=\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}\oplus\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}^*$ が成立することを示せ．ただし $\boldsymbol{A}^*=\overline{\boldsymbol{A}}^\top$，$\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}=\mathrm{Im}\ f$，$\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}^*=\{\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^m\mid\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}\}$．なお，任意の $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y})$，$\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$，$\forall\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^m$ が成立すること，ならびに，問 3 で述べた $V=W\oplus W^\perp$ が成立することを用いて良い．

問 5（10 点）

$m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ を満たす $n\times m$ 行列を $\boldsymbol{A}^-$ とする．

(i) $\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}=\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})$ が成立することを示せ．

(ii) $\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})=\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})$ が成立することを示せ．