線形代数の基礎

滝根 哲哉*

目 次

一般に，数学とは何かと問われたとき，答えの一つに

“Mathematics is the art of giving the same name to different things,” by Henri Poincaré

がある．線形代数は線形性と呼ばれる性質をもつものを統一的に扱う数学であり，この言葉が実感できる好材料になっている．実際，学部 2 年生までに学んだ範囲に限っても，線形性をもつものは多数あり，連立一次方程式や微積分に留まらず，微分方程式や漸化式，フーリエ変換やフーリエ級数など，様々な分野で（強く意識することなく）線形代数が用いられている．線形代数は線形方程式論と固有値問題に大別できるが，本講義では前者の基礎について学ぶ．

この資料は，ベクトルや行列に関する要素レベルでの演算については理解しているということを前提に，self-contained（自己完結）となっており，この資料だけで内容が理解できるように配慮した．特に，議論を展開する際には，論理に飛びがないように注意を払うとともに，そこで用いる（既に証明した）補題や定理をできる限り明示的に与えることで，論拠を明らかにしようと試みた．また，多数の問が用意されており，これら全てに対して付録に解答例を与えている．問で示される結果の多くは，その後，しばしば用いられるので，読み飛ばすことがないように注意して欲しい．さらに，線形代数を学習する際（私自身がそうであったように）馴染みがない用語が多数登場することが理解の妨げになっていると感じているため，用語の定義がすぐに確認できるように，巻末に本資料で定義した用語の索引をつけている．

受講者は，補題や定理の証明あるいは問の解答例を読むだけでなく，証明の大きな流れを掴んだ後に，この資料を伏せて，自分自身で証明の再現を試みて欲しい．実際に手を動かすことで，理解が大きく促進されると同時に，論理的な思考力が涵養されるであろう．これは線形代数に限らず，如何なる数学であっても同じであることを強調しておきたい．

*大阪大学大学院工学研究科電気電子情報通信工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
電話：(06)6879-7740　FAX：(06)6875-5901　電子メール：takine@comm.eng.osaka-u.ac.jp
URL：http://www2b.comm.eng.osaka-u.ac.jp/~takine/

1　線形空間

線形空間（ベクトル空間ともいう）とは，平面幾何学におけるベクトルとそれらの間の足し算とスカラー倍が自在に行えるものを指す．

以下ではしばしば体 K が登場する．大雑把に言えば，体とは集合の一種であり，集合内の各元（要素）に対して通常の四則演算ができ，演算結果がその集合に含まれているものである（付録 A 参照）．以下で見るように，この資料で扱うほぼすべての内容は，実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$ の両方において成立している．同じ内容のものを併記することを避けるため，実数体 $\mathbb{R}$，複素数体 $\mathbb{C}$ のいずれか一方を指すものとして体 K を用いている．K は常に $\mathbb{R}$，$\mathbb{C}$ のいずれか一方を指していることに注意すること．

1.1　線形空間の定義

定義 1.1 (線形空間の公理) 集合 V と（係数）体 K に対して，V の元に加法 $+$ とスカラー乗法 $\cdot$ が定義されているとする．

(i) 加法: $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} \in V$

(ii) スカラー乗法: $\boldsymbol{x} \in V$, $\alpha \in K$ に対し, $\alpha\boldsymbol{x} \in V$

集合 V と体 K が

I. V は加法の演算 $+$ で可換群となる．すなわち，以下の演算規則を満たす．

　(i) (交換法則) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対し, $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$

　(ii) (結合法則) $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ に対し, $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$

　(iii) 零元 (零ベクトル) $\mathbf{0} \in V$ の存在: $\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対し $\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = \boldsymbol{x}$

　(iv) 加法の逆元の存在: $\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対し，$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$ となる $-\boldsymbol{x} \in V$ が存在

II. K の元による V の元へのスカラー乗法は以下の演算規則を満たす．

　(i) $\forall \alpha, \beta \in K$, $\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対して $\alpha \cdot (\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta) \cdot \boldsymbol{x}$

　(ii) $\forall \alpha, \beta \in K$, $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $(\alpha+\beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{x}$

　(iii) $\forall \alpha \in K$, $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\alpha(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x}+\alpha\boldsymbol{y}$

　(iv) $\forall \boldsymbol{x} \in V$ に対して $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

を満たすとき，V を K 上の**線形空間** (linear space) あるいは**ベクトル空間** (vector space) と呼ぶ．

この公理には集合 V の要素間の減算は定義されていないことに注意せよ．一方，K は体なので K の要素間で四則演算（加減乗除）ができる．

問 1.1　零元 $\mathbf{0}$ はただ一つ存在することを示せ．

問 1.2　任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対する逆元はただ一つ存在することを示せ．

問 1.3　加法の公理 (iii) と (iv) は

(iii') 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ を満たす $\boldsymbol{z} \in V$ がただ一つ存在する．

と等価であることを示せ．

問 1.4　V を K 上の線形空間とし，加法の零元を $\mathbf{0}$ とする．このとき，任意の $\alpha \in K$ に対して，$\alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$ であることを示せ．

問 1.5　任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ であることを示せ．

$\boldsymbol{x} \in V$ の逆元 $-\boldsymbol{x}$ は和の公理で与えられる特別な元であり，$(-1)\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ のスカラー倍であることに注意する．

問 1.6 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $-\boldsymbol{x} = (-1)\boldsymbol{x}$ を示せ．

問 1.4 から問 1.6 より，集合 V の要素に対する加算・減算・乗算を文字変数の場合と同様に扱うことが可能であることが分かる．

例 1.2 (線形空間の例)

(i) $V = \{\mathbf{0}\}$ （集合 V が加法の零元のみからなる場合）．これは今後，頻繁に登場する．

(ii) n 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^n$ (体は $\mathbb{C}$)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

n 次元実ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ (体は $\mathbb{R}$) も線形空間

(iii) 複素係数 1 変数多項式の全体 $\mathcal{P}(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} &\alpha(a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) + \beta(b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &\quad = (\alpha a_n + \beta b_n)x^n + (\alpha a_{n-1} + \beta b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\alpha a_1 + \beta b_1)x + (\alpha a_0 + \beta b_0) \end{aligned}$$

n 次以下の複素係数多項式全体 $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ も線形空間をなす．実数に限った $\mathcal{P}(\mathbb{R})$，$\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ も線形空間．

(iv) $\mathbb{C}$ 上（あるいは $\mathbb{R}$ 上）の連続関数の全体

(v) $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

を満たす複素ベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ 全体からなる集合は $\mathbb{C}$ 上の線形空間である．実数に限っても同様．

(vi) 複素数列（あるいは実数列）$\{a_n\}$, $\{b_n\}$ および c に対して

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \qquad c\{a_n\} = \{ca_n\}$$

と定義すれば, 数列全体は線形空間である．

(vii) 以下の漸化式（**差分方程式** (difference equation) という）が成立する全ての数列 $\{x_n\}$ からなる集合．

$$x_{n+k} + \alpha_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + \alpha_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

(viii) k 階斉次線形微分方程式の解全体：

$$\frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k} + a_{k-1}(x)\frac{\mathrm{d}^{k-1}y}{\mathrm{d}x^{k-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_0(x)y = 0$$

問 1.7 n 次の多項式全体は線形空間をなすか否かについて検討せよ．

1.2 線形写像と同型

本節では線形写像の定義を行うとともに，線形空間同士の関係を考える上で重要となる同型の概念を導入する．

定義 1.3 (集合間の写像) 集合 V から集合 W への**写像** (mapping) とは, $\boldsymbol{x} \in V$ に対してただ 1 つの $f(\boldsymbol{x}) \in W$ を対応させる規則のことであり，$f\colon\ V \to W$ で表す．また $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $f(\boldsymbol{x}) \in W$ が対応することを $\boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ とかく．これらをまとめて

$$f\colon\ V \to W\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$$

のように記すことにする．写像 $f\colon\ V \to W$ において V を**定義域** (domain) あるいは**始集合**，**始空間** と呼び,

W を**終集合** (codomain) あるいは**終空間**と呼ぶ．また，$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ $(\boldsymbol{x} \in V)$ で表される $\boldsymbol{y}$ 全体からなる集合を f による V の**像** (image) と呼び，$\mathrm{Im}\ f$ と記す．

$$\mathrm{Im}\ f = \{\boldsymbol{y} \in W \mid \boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in V\}$$

写像 $f\colon V \to W$ に対して，常に $\mathrm{Im}\ f \subset W$ であるが，一般には $\mathrm{Im}\ f \neq W$ であることに注意する．

定義 1.4 (線形写像) V, W を同じ体 K 上の線形空間とする．写像 $f\colon V \to W$ が以下をみたすとき，f を V から W への**線形写像** (linear mapping) という．

(i) 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して，$f(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$

(ii) 任意の $\boldsymbol{x} \in V, \alpha \in K$ に対して，$f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha f(\boldsymbol{x})$

特に，$V = W$ のとき，**線形変換** (linear transformation) という．

線形写像であるための条件 (i)，(ii) は**線形性** (linearity) と呼ばれ，重み付き和 $\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}$ の行き先 $f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ の行き先の重み付き和 $\alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$ に等しいことを指す．

問 1.8　線形写像であるための条件である定義 1.4 (i)，(ii) は，これらを一つにまとめて

(i') 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ ならびに任意の $\alpha, \beta \in K$ に対して，$f(\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$

に置き換えることができることを示せ．

問 1.9　V の零元を $\mathbf{0}$，W の零元を $\mathbf{0}'$ としたとき，任意の線形写像 $f\colon V \to W\colon \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ において $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}'$ であることを示せ．

例 1.5 線形写像の例

(i) 2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ における，原点周りの 90 度回転

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\colon \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

(ii) $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ による K^n から K^m への写像 $T_{\boldsymbol{A}}\colon K^n \to K^m\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$

$$\alpha\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{y} \mapsto \alpha\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\beta\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$$

(iii) 1 変数多項式空間 $\mathcal{P}$ において定数 c だけずらす写像 $T_c\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}\colon \phi(x) \mapsto \phi(x+c)$

$$\alpha\phi(x)+\beta\psi(x) \mapsto \alpha\phi(x+c)+\beta\psi(x+c)$$

(iv) $C[a,b] := \{\phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}\}$ を区間 $[a,b]$ を定義域とする連続実関数の全体とする．このとき，

$$f\colon C[0,1] \to C[0,1]\colon \phi \mapsto \int_0^t \phi(s)\mathrm{d}s$$

や，より一般化された，2 変数の連続実関数 $K(t,s)$ に対する

$$f\colon C[0,1] \to C[0,1]\colon \phi \mapsto \int_0^t K(t,s)\phi(s)\mathrm{d}s$$

は線形写像である．

(v) 1 変数多項式の空間 $\mathcal{P}$ における微分演算

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\colon \mathcal{P} \to \mathcal{P}\colon \phi \mapsto \phi'$$

(vi) 数列 $\{x_n\}$ 全体からなる空間におけるシフト作用素

$$\sigma_L\colon (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (x_2, x_3, \ldots), \qquad \sigma_R\colon (x_1, x_2, \ldots) \mapsto (0, x_1, x_2, \ldots)$$

(vii) 漸化式

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

を満たす数列 $\{x_n\}$ 全体の空間に対して，1 項だけ先へずらす写像 $T\colon\ (x_1, x_2, \ldots, \ldots) \ \mapsto\ (x_2, x_3, \ldots, \ldots)$

定義 1.6 (全射，単射，全単射) 線形写像 $f\colon\ V \to W\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ において

(i) $\mathrm{Im}\ f = W$ が成立するとき **全射** (surjection) という．上への写像 (onto mapping) と同義.

(ii) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}' \in V$ が $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{x}'$ ならば $f(\boldsymbol{x}) \neq f(\boldsymbol{x}')$ となるとき**単射** (injection) という．1 対 1 写像 (one-to-one mapping) と同義.

(iii) 全射かつ単射である場合 **全単射** (bijection) という．1 対 1 対応 (one-to-one correspondence) と同義.

注意 1.7 写像 (mapping) は一方向，対応 (correspondence) は双方向の関係を指す.

線形写像 $f\colon\ V \to W\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ が単射であるならば，単射な**逆写像** (inverse mapping) f^{-1} が一意に定まる.

$$f^{-1}\colon\ \mathrm{Im}\ f \to V\colon\ f(\boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{x} \qquad (f \text{ が単射である場合})$$

特に，全単射な写像 f の場合，$\mathrm{Im}\ f = W$ なので，逆写像 f^{-1} は全単射となる.

$$f^{-1}\colon\ W \to V\colon\ f(\boldsymbol{x}) \mapsto \boldsymbol{x} \qquad (f \text{ が全単射である場合})$$

問 1.10　線形写像 f が単射であるならば，上記のように，単射な f^{-1} が一意に定まることを示せ.

定義 1.8 (同型) V から W への線形写像 f が全単射であるとき，f は V から W への**同型写像** (isomorphic mapping) あるいは V と W の間の**同型対応** (isomorphic correspondence) であるという．また，K 上の線形空間 V と W の間に同型対応が存在するとき，V と W は互いに**同型** (isomorphism) であるといい，$V \cong W$ と書く.

定義から，同型関係 $\cong$ が以下の性質を満たすことは明らかである.

(i)　$V \cong V$ (反射律),　　(ii)　$V \cong W \ \Rightarrow\ W \cong V$ (対称律)　　(iii)　$V \cong W,\ W \cong U \ \Rightarrow\ V \cong U$ (推移律)

これら三つの性質を満たすものを**同値関係** (equivalence relation) という.

問 1.11　同型関係は同値関係であることを示せ.

同型写像 $f\colon\ V \to W$ は全単射な線形写像なので，逆写像 $f^{-1}: W \to V$ が存在する．そこで，f は（f^{-1} も念頭において）V と W の間の同型対応と呼ばれる．全単射な写像と同型写像は同義であるが，線形写像 $f: V \to W$ に注目している場合は全単射といい,（f を通して）線形空間 V と W の関係を意識している場合は同型写像という用語が用いられる.

定義 1.9 (ベクトルとスカラー) 線形空間（ベクトル空間）の元を**ベクトル** (vector) と呼び，係数体 K の元を**スカラー** (scalar) と呼ぶ.

1.3　線形空間の基底と次元

線形演算はベクトルに対する加法とスカラー乗法のみで構成される，非常に単純な枠組みとなっている．これを用いてできることは線形結合を作ることだけと言っても過言でない.

定義 1.10 (線型結合) V を K 上の線形空間とする．<u>有限個</u>のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in V$ と $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in K$ に対して

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$$

で与えられる V のベクトルを $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の**線形結合**（**1 次結合**) (linear combination) という.

線型結合に現れるベクトルの数 n は有限個でなければならないことに注意する（無限個のベクトルの重み付き和は線型結合とは呼ばない）.

定義 1.11 (線形関係と線形独立) K 上の線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ に対して

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n = \mathbf{0}$$

を**線形関係** (linear relation) という．線形関係が

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$$

の場合のみ成立するとき，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は**線形独立**あるいは**1 次独立** (linearly independent) であるという．一方，線形独立でない場合は**線形従属**あるいは**1 次従属** (linearly dependent) であると言う.

問 1.12 $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3$ が線形独立であるならば，$\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j$ $(i, j = 1, 2, 3,\ i \neq j)$ は線形独立であることを示せ．また，逆は成立しないことを示せ.

補題 1.12 線形写像 $f:\ V \to W:\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ において，(i) V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が線形従属ならば，W のベクトル $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k)$ も線形従属である．さらに，V と W が互いに同型な線形空間であり，f が V から W への同型写像（すなわち，全単射な写像）の場合，上記 (i) が成立すると共に，(ii) V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が線形独立ならば，W のベクトル $f(\boldsymbol{x}_1), f(\boldsymbol{x}_2), \ldots, f(\boldsymbol{x}_k)$ も線形独立となる.

証明． 線形関係 $\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k = \mathbf{0}$ が成立するとき，$f(\mathbf{0}) = f(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k \boldsymbol{x}_k) = \alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1) + \alpha_2 f(\boldsymbol{x}_2) + \cdots + \alpha_k f(\boldsymbol{x}_k) = \mathbf{0}'$ が成立するので（問 1.9 参照），V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ が線形従属ならばそれらの行き先となる W のベクトルも線形従属．さらに f が同型写像であるならば，逆写像 f^{-1} が存在し，f^{-1} に対して前半の結果が成立するので，その対偶をとることで後半が示される. □

補題 1.13 ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ は線形独立であるとする．このとき，$\boldsymbol{x}_{r+1}$ が $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の線形結合として表すことができないならば，$r+1$ 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}$ も線形独立である.

証明． 線形関係

$$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{x}_r + \alpha_{r+1} \boldsymbol{x}_{r+1} = \mathbf{0}$$

において $\alpha_{r+1} \neq 0$ ならば，$\boldsymbol{x}_{r+1}$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ の線形結合で表されるので，仮定に反する．よって $\alpha_{r+1} = 0$．このとき，$\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{x}_r = \mathbf{0}$ となり，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r$ が線形独立であることから，$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$ を得る．よって，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_r, \boldsymbol{x}_{r+1}$ も線形独立. □

定義 1.14 (基底) K 上の線形空間 V において，有限個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in V$ が

(i) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は線形独立であり，かつ，

(ii) V の任意のベクトルは $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ の線形結合で表される

とき，$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$ を V の**基底** (basis) という．なお，基底は $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n]$ のように順序も考慮して表すものとする（順序が違えば異なる基底とみなす）．なお，線形空間 $V = \{\mathbf{0}\}$ は基底をもたないとみなす.

K 上の線形空間 K^n のベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ を

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \ldots, \quad \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

と定義したとき，$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ は K^n における自明な基底であり，**標準基底** (standard basis, canonical basis) と呼ばれる.

注意 1.15 $K=\mathbb{R}$ ならば，式 (1) が体 $\mathbb{R}$ 上の線形空間 $\mathbb{R}^n$ の基底を与えることは直ちに確認できる．一方，$K=\mathbb{C}$ の場合，体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}^n$ における任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in\mathbb{C}^n$ は適当なスカラー $\alpha_i\in\mathbb{C}$ $(i=1,2,\ldots,n)$ を用いて，$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{e}_n$ と書くことができるので体 $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}^n$ の基底である（係数体 が $\mathbb{C}$ であることが鍵）．このように，通常，n 次実数体 $\mathbb{R}^n$ の係数体は $\mathbb{R}$，n 次複素数体 $\mathbb{C}^n$ の係数体は $\mathbb{C}$ とする．

問 1.13　基底の定義 (ii) は

(ii') $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n$ にどのような $\boldsymbol{y}\in V$ を加えても線形従属になる

に置き換えることができることを示せ．

問 1.14　線形空間 V の基底 $\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n]$ が与えられたとき，任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in V$ を基底 $\boldsymbol{E}$ の線形結合として表す方法は一通りしかないことを示せ．

問 1.15　$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_r\in V$ が線形従属であれば，これに V のベクトルを幾つ加えても線形従属であることを示せ．

定義 1.16 (次元) V の基底の含むベクトルの個数 n を線形空間 V の**次元** (dimension) といい，$\dim V$ で表す．ただし，$V=\{\boldsymbol{0}\}$ のときは $\dim V=0$ とする．

V に有限個のベクトルが存在して，V の任意のベクトルがこれらの有限個のベクトルの線形結合で表されるとき，V は**有限次元** (finite-dimensional) であるという．有限次元でないとき，すなわち，一次独立なベクトルを際限なく取ることができる場合，V は**無限次元** (infinite dimensional) であるという．本講義では，特に断ることなく，V は有限次元であると仮定する．

定義 1.17 (座標) 基底 $\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_n]$ を用いて V の要素 $\boldsymbol{v}$ が

$$\boldsymbol{v}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n$$

で表されるとき, $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)^\top$ をこの基底に関する $\boldsymbol{v}$ の **座標** (coordinate) または**表現ベクトル** (representation vector) という．

$V=\{\boldsymbol{0}\}$ でない限り，基底は必ず存在する．

定理 1.18 (基底の構成) K 上の線形空間 $V\neq\{\boldsymbol{0}\}$ における r 個（r が 0 の場合も含む）のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_r$ が線形独立ならば，これらにいくつかのベクトルを付け加えることで V の基底を得ることができる．

証明． 一般性を失うことなく，V を n 次元，すなわち，n 個の線形独立なベクトル $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_n\in V$ が存在し，これらの線形結合で任意のベクトル $\boldsymbol{x}\in V$ を表すことができると仮定する．

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{y}_1+\alpha_2\boldsymbol{y}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{y}_n \tag{2}$$

もし，全ての $\boldsymbol{y}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ が $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_r$ の線形結合で与えられる，すなわち，適切な $\beta_{i,j}\in K$ $(i=1,2,\ldots,n,\ j=1,2,\ldots,r)$ を用いて

$$\boldsymbol{y}_i=\beta_{i,1}\boldsymbol{x}_1+\beta_{i,2}\boldsymbol{x}_2+\cdots+\beta_{i,r}\boldsymbol{x}_r,\quad i=1,2,\ldots,n$$

とできるのであれ，これらを式 (2) へ代入することにより，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ を $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_r$ の線型結合で表現できることが分かる．よって $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_r$ は基底である．一方，$\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\ldots,\boldsymbol{y}_n$ のうち，ある $\boldsymbol{y}_j$ が $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_r$ の線形結合で与えられないならば，$\boldsymbol{x}_{r+1}=\boldsymbol{y}_j$ とおいたとき，補題 1.13 より，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_r,\boldsymbol{x}_{r+1}$ は線形独立である．このような操作を，全ての $\boldsymbol{y}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ が $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_r$ の線形結合で与えられるまで（高々 n 回）繰り返せば，基底が得られる．　□

一般に，基底は何通りも存在する．しかし, 基底を成すベクトルの数は必ず等しくなる．すなわち，V の次元は

V に固有の量であり，基底の取り方に依らない．以下では，この事実を (i) n 次元の V と体 K^n が同型であること（補題 1.19 ），ならびに (ii) 体 K^n の次元が n であること（補題 1.20）を示すことで証明する．ここでの議論は，当たり前と思われることを，線形空間，線形写像，次元の定義のみから導く形となっているので，その論理展開に注意を払って欲しい．

補題 1.19 K 上の線形空間 V が n 個のベクトルからなる基底を持てば，$V \cong K^n$，すなわち，V と体 K^n は互いに同型である．

証明． 同型とは全単射な線形写像が存在することである（定義 1.8 参照）．$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n]$ が V の基底であるならば，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は一意に

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n$$

と表すことができる（問 1.14 参照）．そこで，写像 $f\colon\ V \to K^n\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ において，

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\alpha_1 \boldsymbol{x}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{x}_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^\top \in K^n$$

と定義すれば，f は線形写像であり，かつ，全単射の写像となる（確認せよ）．すなわち，f は V と K^n の間の同型対応であり，V と体 K^n は互いに同型である． □

補題 1.20 体 K^n において，任意のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m$ は，$m > n$ のとき線形従属である．よって，$m \neq n$ ならば，K^m と K^n は同型でない．

証明． まず，前半を考える．体 K^n の基底として，式 (1) で与えた標準基底 $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ をとる．$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m \in V$ の中に $\mathbf{0}$ があれば，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m$ は線形従属である（確認せよ）．よって，これらは全て $\mathbf{0}$ でないと仮定する．このとき，

$$\boldsymbol{x}_1 = \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{e}_n$$

と表すことができ，少なくとも一つの α_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ は 0 ではないので，一般性を失うことなく，$\alpha_1 \neq 0$ とする．このとき，線形関係

$$c_1 \boldsymbol{x}_1 + c_2 \boldsymbol{e}_2 + c_3 \boldsymbol{e}_2 + \cdots + c_n \boldsymbol{e}_n = 0$$

は

$$c_1 \alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + (c_1 \alpha_2 + c_2) \boldsymbol{e}_2 + (c_1 \alpha_3 + c_3) \boldsymbol{e}_3 + \cdots + (c_1 \alpha_n + c_n) \boldsymbol{e}_n = 0$$

と等価である．第一項 $c_1 \alpha_1 \boldsymbol{e}_1$ において $\alpha_1 \neq 0$ に注意すると $c_1 = 0$ が得られ，この結果，$c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$ が導かれる．以上より，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n$ は線形独立である．さらに，

$$\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\alpha_1} \boldsymbol{x}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \boldsymbol{e}_2 - \frac{\alpha_3}{\alpha_1} \boldsymbol{e}_3 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \boldsymbol{e}_n$$

なので，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_n$ による任意の線型結合は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n$ の線型結合でも表現できる．すなわち，$[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ は K^n の基底である．よって，

$$\boldsymbol{x}_2 = \beta_1 \boldsymbol{x}_1 + \beta_2 \boldsymbol{e}_2 + \beta_3 \boldsymbol{e}_3 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{e}_n$$

と表すことができる．もし，$\beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_n = 0$ ならば $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2$ は線形従属である．そうでなければ，上記と同様に，一般性を失うことなく，$\beta_2 \neq 0$ と仮定して良い．このとき，$\boldsymbol{e}_2$ を $\boldsymbol{x}_2$ に置き換えた $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4, \dots, \boldsymbol{e}_n]$ は，上記と同様の議論により，K^n の基底となることが示される．この議論を続けると，ある $r < n$ で $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r$ が線形従属になるか，あるいは $[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n]$ が K^n の基底となる．後者の場合 $\boldsymbol{x}_{n+1}$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_n$ の線型結合で表現されるので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_{n+1}$ は線形従属となる（問 1.13 参照）．もし，ある r $(r = 1, 2, \dots, n+1)$ に対して $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_r$ が線形従属であれば，これにベクトルを幾つ加えても線形従属である（問 1.15 参照）．今，$m > n$ なので，いずれの場合においても $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m$ は線形従属となる．

ここまでの議論によって，体 K^n において，ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots, \boldsymbol{x}_m$ は，$m > n$ のとき線形従属であることが示された．この命題の対偶を取ることにより，体 K^n のベクトルであり，かつ，線形独立なベクトルの組は

「高々」n 個のベクトルからなることが分かる．これを踏まえた上で，後半を考える．

もし K^m と K^n が同型であれば，同型写像 $f\colon K^m \to K^n$ が存在し，K^m において標準基底をなす m 個の単位ベクトル $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_m$ に対応する K^n のベクトルは補題 1.12 より線形独立となる．すなわち，$n \geq m$．一方，f の逆写像 $f^{-1}\colon K^n \to K^m$ に対して同じ議論を行うと，$m \geq n$ が導かれ，K^m と K^n が同型ならば $m = n$ であることが分かる．最後に，この対偶を取ることにより，$m \neq n$ ならば，K^m と K^n は同型でないことが示される．□

定理 1.21 (基底を構成するベクトルの数) K 上の線形空間 V が n 個のベクトルからなる基底をもつならば，n 個より多くのベクトルは線形従属である．また，このとき，V の任意の基底は n 個のベクトルからなる．

証明． 補題 1.19 より V は K^n に同型である．よって，補題 1.20 の前半より，K^n において n 個より多くのベクトルは線形従属である．このとき，補題 1.12 の後半の対偶より，それらに対応する V のベクトルも線形従属となり，定理の前半が示される．もし，V が m 個のベクトルからなる基底を持てば，補題 1.19 より，V は K^m と同型．一方，仮定から V は K^n とも同型．同型関係は同値関係なので（問 1.11 参照）$V \cong K^m$，$V \cong K^n$ ならば，$K^m \cong V \cong K^n$ より，K^m と K^n は同型であり，補題 1.20 の後半の対偶より，$m = n$ を得る．□

以上より，互いに同型な全ての線形空間において，次元は不変量であることが分かる．

系 1.22 K 上の次元の等しい二つの線形空間は互いに同型である．

問 1.16 系 1.22 を証明せよ．

例 1.23 (基底と次元の例)

(i) K^n はもちろん n 次元．$m \times n$ 行列全体の空間は mn 次元．

(ii) 多項式空間 $\mathcal{P}$ では，$[1, x, x^2, \ldots]$ が線形独立であるので無限次元．n 次以下の 1 変数多項式の全体 $\mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ も線形空間となり，$[1, x, x^2, \ldots, x^n]$ を基底として取れるので，$(n+1)$ 次元であることがわかる．実際，この基底を用いて，任意の元 $f(x) \in \mathcal{P}_n(\mathbb{C})$ が一意に表現できる．

$$f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

(iii) 数列 $\{x_n\}$ のうち，以下の差分方程式（漸化式）が成り立つような全体の集合は線形空間である．

$$x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

上記において，初めの k 項 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を指定することでこの数列は一意に定まることに注意すると，式 (1) で与えた $\boldsymbol{e}_i$ を用いて $(x_{i,1}, x_{i,2}, \ldots, x_{i,k})^\top = \boldsymbol{e}_i$ とすれば $[\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k]$ は基底となる．

問 1.17 以下の線形空間に対して，それぞれの次元を求めよ．また，自然な（簡単な）基底を 1 組与えよ．ただし，n はある正の整数とする．また， (i, j) 成分のみが 1 で他の成分が 0 の n 次正方行列 $\boldsymbol{E}_{ij}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ を必要に応じて用いてよい．

(i) $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ のベクトル $f(x)$ で，$(x-1)$ で割り切れるような多項式の全体．

(ii) $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ のベクトル $f(x)$ で，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = 0$ を満たすものの全体．
（※ヒント：$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$ とおいて考えよ）

(iii) n 次実正方行列のうち，対称行列の全体．ただし，実正方行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A}$ を満たすとき**対称行列** (symmetric matrix) と呼ばれる．

(iv) n 次実正方行列のうち，交代行列の全体．ただし，$\boldsymbol{A}^\top = -\boldsymbol{A}$ を満たすとき，**交代行列** (alternate matrix, skew-symmetric matrix) と呼ばれる．定義より，交代行列の対角要素は全て 0 であることに注意．

1.4 線形写像の表現行列

「行列とは，有限次元における線形写像を表現したものである」[11]

線形写像 $f\colon\ V\to W\colon\ \boldsymbol{x}\ \mapsto f(\boldsymbol{x})$ において，V の基底 $[\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n]$ が与えられたとき，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n$ の像 $f(\boldsymbol{x}_1),f(\boldsymbol{x}_2),\dots,f(\boldsymbol{x}_n)$ がわかっていれば，V の任意のベクトル $\boldsymbol{y}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n$ に対して，線形性より，

$$f(\boldsymbol{y})=f(\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n)=\alpha_1 f(\boldsymbol{x}_1)+\cdots+\alpha_n f(\boldsymbol{x}_n)$$

を得ることができる．つまり線形写像は「基底の行き先」を与えるだけで十分である．すなわち，線形写像は定義域（始空間）の基底と終空間における基底間の関係（あるいは座標間の関係）を表す「表現行列」を用いて特徴づけることができる．

補題 1.24 (線形拡張原理) $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ を K 上の n 次元線形空間 V の基底とする．また，W をもう一つの K 上の線形空間とする．W 内の任意の n 個のベクトル $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2,\dots,\boldsymbol{y}_n\in W$ が与えられたとき，

$$f(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{y}_i,\quad i=1,2,\dots,n$$

を満たす線形写像 $f\colon\ V\to W$ が必ず存在し，一意に定まる．

証明． V の基底を $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ と取ったとき，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ は

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{v}_i$$

の形で表現され，座標 α_i $(i=1,2,\dots,n)$ は一意に定まる（問 1.14 参照）．このとき，$f\colon\ V\to W\colon\ \boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x})$ が線形写像であるならば

$$f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\boldsymbol{v}_i)$$

が成立する．従って，全ての $i=1,2,\dots,n$ に対して $f(\boldsymbol{v}_i)=\boldsymbol{y}_i$ を満たすためには

$$f\colon\ \boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{v}_i\quad\mapsto\quad f(\boldsymbol{x})=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{y}_i$$

としなければならない．任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して，$\boldsymbol{x}$ の座標 α_i $(i=1,2,\dots,n)$ は一意に定まるため，$f(\boldsymbol{x})$ も上記のように一意に定まる．また，この f が線形写像であることは直ちに確かめられるので省略する． □

$f\colon\ V\to W\colon\ \boldsymbol{x}\mapsto f(\boldsymbol{x})$ を n 次元線形空間 V から m 次元線形空間 W への線形写像とする．また，V の基底 $\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\dots,\boldsymbol{v}_n]$ と W の基底 $\boldsymbol{E}'=[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_m]$ を任意に定める．このとき，$f(\boldsymbol{v}_i)\in W$ $(i=1,2,\dots,n)$ をそれぞれ W の基底 $\boldsymbol{E}'$ で表現したとき，

$$f(\boldsymbol{v}_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\boldsymbol{w}_j,\quad i=1,2,\dots,n$$

と書くことができる（添字に注意）．よって，f ならびに $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}'$ が与えられたとき $a_{j,i}$ $(j=1,2,\dots,m,\ i=1,2,\dots,n)$ は一意に定まり，

$$[f(\boldsymbol{v}_1),f(\boldsymbol{v}_2),\dots,f(\boldsymbol{v}_n)]=[\boldsymbol{w}_1,\boldsymbol{w}_2,\dots,\boldsymbol{w}_m]\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{pmatrix}\tag{3}$$

が成立する．したがって，V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{v}_i$$

と表されるとき，

$$f(\boldsymbol{x})=f\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\boldsymbol{v}_i\Big)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f(\boldsymbol{v}_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\Big(\sum_{j=1}^{m}a_{ji}\boldsymbol{w}_j\Big)=\sum_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i a_{ji}\Big)\boldsymbol{w}_j$$

となる．よって $f(\boldsymbol{x}) = f\big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i\big)$ を $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m$ の線型結合 $\sum_{i=1}^{m} \beta_i \boldsymbol{w}_i$ で表現すると，$f(\boldsymbol{x}) \in W$ の表現ベクトル $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ と $\boldsymbol{x} \in V$ の表現ベクトル $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ の間には

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

が成立する．ここで現れた行列は式 (3) で現れた行列と同一であることに注意する．

以上の議論から，n 次元線形空間 V から m 次元線形空間 W への線形写像 f は，V と W の基底 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}'$ を定めることで一意に定まる $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ によって表現されることが分かる．この行列 $\boldsymbol{A}$ を，基底 $\boldsymbol{E}$ および $\boldsymbol{E}'$ に関する線形写像 f の**表現行列** (representation matrix) という．

$f\colon V \to W$ の表現行列は V と W の基底に依存しており，V と W の基底を定めると，表現行列が一意に定まることに注意する．

例 1.25 (表現行列の例) (i) 2 次以下の多項式の全体の空間 $\mathcal{P}_2$ 上の線形変換 $T_c\colon \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2\colon f(x) \mapsto f(x+c)$ に対する基底 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}' = (1, x, x^2)$ に関する表現行列を考える（例 1.5 (iii) 参照）．$\mathcal{P}_2$ の任意の元（ベクトル）$f(x)$ を

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$$

とすると

$$(T_c f)(x) = f(x+c) = (\alpha_0 + \alpha_1 c + \alpha_2 c^2) + (\alpha_1 + 2\alpha_2 c)x + \alpha_2 x^2 \quad (=: \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2)$$

なので，式 (4) より，表現行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & c & c^2 \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる．さらに，基底 $1, x, x^2$ の行き先はそれぞれ

$$T_c(1) = 1, \qquad T_c(x) = x + c, \qquad T_c(x^2) = (x+c)^2 = x^2 + 2cx + c^2$$

となるので，式 (3) に示したように

$$\big[T_c(1)\ T_c(x)\ T_c(x^2)\big] = \big[1\ x\ x^2\big] \begin{pmatrix} 1 & c & c^2 \\ 0 & 1 & 2c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

が成立することも確認できる．

(ii) 差分方程式（漸化式）

$$x_{n+k} + a_{k-1} x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0$$

を満たす数列 $\{x_n\}_{n=1,2\ldots}$ の全体の空間 V に対し，1 項だけ先へずらす写像 $T\colon \{x_n\} \to \{x_{n+1}\}$ を考える（例 1.5 (vii) 参照）．V のベクトル（実数列）は最初の k 項 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ が決まれば一意に定まる．よって V のベクトル $\{x_n\}$ に対して $(x_1, x_2, \ldots, x_k)^\top$ を対応させる写像 φ は V から K^k への同型写像である．さらに，$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_k]$ を式 (1) で与えられる K^k の標準基底とする．

基底 $\boldsymbol{E}$ の各要素に対して写像 T を適用した行き先を考える．定義より，各数列 $(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \boldsymbol{e}_i$ に対して，$x_{k+1} + a_{i-1} = 0$ なので $x_{k+1} = -a_{i-1}$ となることに注意する．よって，$\boldsymbol{e}_i$ $(i = 2, 3, \ldots, k)$ に対して T を作用させると

$$(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, 0, \ldots, 0)^\top \mapsto (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-2}, 1, 0, 0, \ldots, 0, -a_{i-1})^\top, \quad i = 2, 3, \ldots, k$$

となる．これより

$$T(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}_{i-1} - a_{i-1}\boldsymbol{e}_k, \quad i = 2, 3, \ldots, k$$

を得る．同様に，$\boldsymbol{e}_1$ については $(1, 0, 0, \ldots, 0)^\top \mapsto (0, 0, \ldots, 0, -a_0)^\top$ なので

$$T(\boldsymbol{e}_1) = -a_0\boldsymbol{e}_k$$

を得る．よって，この基底の関係を表すと

$$\big[T(\boldsymbol{e}_1)\ \cdots T(\boldsymbol{e}_k)\big] = \big[\boldsymbol{e}_1\ \cdots \boldsymbol{e}_k\big] \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{k-2} & -a_{k-1} \end{pmatrix}$$

となる．

問 1.18　3 次以下の実係数多項式全体の空間 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$，2 次以下の実係数多項式全体の空間 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ に対して，写像 T を

$$T:\ \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}):\ f(x) \mapsto xf''(x) - 2f'(x-1)$$

で定める．

(i) T が線形写像であることを確かめよ．

(ii) $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ の基底を $(1, x, x^2, x^3)$，$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ の基底を $(1, x, x^2)$ とする．これらに関する表現行列を求めよ．

問 1.19　K 上の線形空間 V，W 対する線形写像 $f:\ V \to W;\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ において，任意の元 $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$ であることを示せ．

1.5　基底の変換

前節では，基底が与えられると線形写像に対して表現行列が決まることが分かった．本節では，異なる基底に対して表現行列は具体的にどのように書き換わるのか，すなわち，2 つの異なる基底に対する座標変換を論じる．

まず，n 次元線形空間 V 上の 2 つの異なる基底 $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$，$\boldsymbol{E}' = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots \boldsymbol{v}'_n]$ を考える．ここで，$\boldsymbol{E}'$ を構成する各ベクトル $\boldsymbol{v}'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が基底 $\boldsymbol{E}$ の下で

$$\boldsymbol{v}'_i = s_{1,i}\boldsymbol{v}_1 + s_{2,i}\boldsymbol{v}_2 + \cdots + s_{n,i}\boldsymbol{v}_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

と表されるとする（この表現は一意であることに注意，問 1.14 参照）．すなわち (i, j) 要素が $s_{i,j}$ である n 次正方行列 $\boldsymbol{S}$ を用いて

$$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \cdots & s_{nn} \end{pmatrix} \tag{5}$$

と書くことができるとする．

問 1.20　式 (5) に現れる行列 $\boldsymbol{S}$ が正則であることを示せ（以下の注意 1.26 参照）．

注意 1.26 正方行列 $\boldsymbol{S}$ に対して $\boldsymbol{S}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}$ となる正方行列 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{S}$ の**逆行列** (inverse matrix) といい，

$\boldsymbol{S}^{-1}$ と記す．逆行列をもつ正方行列は**正則** (non-singular, regular) と呼ばれる．正方行列 $\boldsymbol{S}$ が正則であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{S}$ の行ベクトル（あるいは列ベクトル）が線形独立であることである．

補題 1.27 K 上の n 次元線形空間 V の 2 つの基底 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$，$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ に対して，式 (5) が成立しているとする．任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ が

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{v}_n = \beta_1 \boldsymbol{v}'_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}'_2 + \cdots + \beta_n \boldsymbol{v}'_n$$

と表現されるならば

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{S}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \tag{6}$$

が成立する．ただし，行列 $\boldsymbol{S}$ は式 (5) で与えられる．

証明． $\boldsymbol{S}$ は正則なので（問 1.20 参照），式 (6) における 1 番目の等式が成立すれば 2 番目の等式も成立する．よって，1 番目の等式を示す．まず，

$$\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n] \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

なので

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] \boldsymbol{S} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

を得る．ここで，$n \times n$ 正方行列 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ の列ベクトルは線形独立なので，逆行列をもつ．よって，上式の両辺に左から逆行列を掛けると 1 番目の式が得られる． □

次に，基底の変換によって表現行列がどう置き換わるかを調べる．V の基底を $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$，$W$ の基底を $[\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m]$ としたときの線形写像 $f\colon V \to W$ の表現行列を $\boldsymbol{A}$ とする．すなわち，$f\colon V \to W\colon \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{v}_i \mapsto f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^m \beta_i \boldsymbol{w}_i$ に対して

$$[f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m] \boldsymbol{A}, \qquad \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

が成立する（これらは式 (3)，式 (4) と等価）．

補題 1.28 K 上の線形空間 V ならびに W の基底変換を

$$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] \boldsymbol{S}, \qquad [\boldsymbol{w}'_1, \boldsymbol{w}'_2, \ldots, \boldsymbol{w}'_m] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_m] \boldsymbol{T}$$

としたとき，$f\colon V \to W$ の表現行列 $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{T}^{-1} \boldsymbol{A} \boldsymbol{S}$ に置き換わる．

証明． $\boldsymbol{T}$ が正則であること（問 1.20 参照）ならびに補題 1.27 を用いると以下を得る．

$$\begin{pmatrix} \beta_1' \\ \beta_2' \\ \vdots \\ \beta_m' \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} \begin{pmatrix} \alpha_1' \\ \alpha_2' \\ \vdots \\ \alpha_n' \end{pmatrix}$$

□

補題 1.28 から以下の系が直ちに従う．

系 1.29 線形変換 $f\colon V \to V$ において，始空間 V，終空間 V の基底を共に $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$ としたときの表現行列は $\boldsymbol{A}$ であるとする．このとき，始空間，終空間の基底を共に $[\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \ldots, \boldsymbol{v}_n']$ へ置き換えると，表現行列 $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ へ置き換わる．

証明． 補題 1.28 において，$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \ldots, \boldsymbol{w}_n]$ かつ $[\boldsymbol{v}_1', \boldsymbol{v}_2', \ldots, \boldsymbol{v}_n'] = [\boldsymbol{w}_1', \boldsymbol{w}_2', \ldots, \boldsymbol{w}_n']$ ならば，$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{S}$ である． □

定義 1.30 (行列の相似) n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}'$ に対して，正則な n 次正方行列 $\boldsymbol{S}$ が存在して

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$$

が成立するとき，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{A}'$ は**相似** (similar) であるといい，$\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}'$ で表す．また，行列 $\boldsymbol{A}$ に対して行列 $\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ を対応させることを変換行列 $\boldsymbol{S}$ に関する**相似変換** (similarity transformation) という．

行列の相似は同値関係である．

(i) $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$ (反射律)，　(ii) $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$ (対称律)，　(iii) $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$ (推移律)

互いに相似な行列は，同一の線形変換の異なる基底に関する表現行列と解釈することができる．

問 1.21　相似は同値関係であることを示せ．

1.6　線形部分空間

線形空間 V の部分集合であり，かつ，V の幾つかのベクトルの 1 次結合全体として表される線形空間は線形部分空間と呼ばれる．これは 3 次元空間において「原点を通る」直線や平面など，まっすぐな原点を通る図形の概念の一般化と見ることができる．

定義 1.31 線形空間 V の空でない部分集合を $S \subset V$ とする．V から誘導される演算（すなわち，V を線形空間として規定している加法とスカラー乗法）によって S が線形空間となっているとき，S を V の**線形部分空間** (linear subspace) という．

注意 1.32 一般に，集合 A の部分集合には，A 自身，空集合 $\emptyset$ も含まれる．

定義より，線形空間 V の線形部分空間 S では，V を規定する線形演算に対して閉じている必要があり，逆に閉じていれば線形部分空間となる．

注意 1.33 **閉じている** (closed) とは，S のベクトルに対して線形演算を行った結果が，再び S のベクトルとなっていること（$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in S,\ \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in S,\ \alpha\boldsymbol{x} \in S$）

なお，加法において必須である零元 $\mathbf{0}$ は必ず線形部分空間 S に含まれることに注意する．

例 1.34 (線形部分空間の例)

(i) 2 次元平面における原点を通る直線

(ii) 3 次元空間における原点を通る平面や直線

(iii) n 次正方行列の空間 $M_n(K)$ において，対称行列 ($\boldsymbol{X}^\top = \boldsymbol{X}$) 全体の空間と交代行列 ($\boldsymbol{X}^\top = -\boldsymbol{X}$) 全体の空間はそれぞれ部分空間である．なお，これらの次元は $n(n+1)/2$ および $n(n-1)/2$ である（問 1.17 参照）．

補題 1.35 K 上の線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ による線形結合全体

$$S = \mathrm{span}\,[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k] \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \boldsymbol{x}_i \mid \alpha_i \in K,\ \boldsymbol{x}_i \in V \right\}$$

は，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ を含む最小の V の線形部分空間である．

証明． S は線形演算について閉じているので（これはほぼ自明（確認せよ）），V の線形部分空間である．W を $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ を含む任意の線形部分空間とする．V も自身の線形部分空間であるので，このような線形部分空間は少なくとも一つ存在する．このとき $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ のスカラー倍 $\alpha_i \boldsymbol{x}_i$ ならびにそれらの和も W に含まれており，これらの全体からなるのが S であるので，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ を含む任意の線形部分空間は必ず S を含む．よって $S \subset W$ である． □

$\mathrm{span}\,[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$ を S から**生成される線形部分空間** (subspace generated by)，あるいは，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ で**張られる線形部分空間** (subspace spanned by) という．

系 1.36 K 上の線形空間 V の線形部分空間 $S = \mathrm{span}\,[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$ は以下の性質をもつ．

(i) 線形空間 V のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が線形独立のとき，S の次元は $\dim S = k \leq \dim V$ である．

(ii) もし，ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が線形従属であれば，これらの中から線形独立な m 個 $(1 \leq m < k)$ のベクトルを選ぶことができるので，一般性を失うことなく，ある自然数 m が存在し，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ は線形独立であり，ベクトル $\boldsymbol{x}_i$ $(i = m+1, m+2, \ldots, k)$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_m$ の線型結合で表現できると仮定する．このとき

$$\mathrm{span}\,[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k] = \mathrm{span}\,[\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m] \tag{7}$$

(iii) よって，V の線形部分空間 S は V の基底の部分集合によって張られる線形空間である．

問 1.22　系 1.36 を証明せよ．

次に線形部分空間同士の集合演算について述べる．W_1 と W_2 が線形空間 V の線形部分空間であるとき，

$$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \boldsymbol{x} \in W_1,\ \boldsymbol{x} \in W_2\}$$

は V の線形部分空間となる．一方，

$$W_1 \cup W_2 = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \boldsymbol{x} \in W_1 \text{ あるいは } \boldsymbol{x} \in W_2\}$$

は線形空間になるとは限らないが，W_1 と W_2 の**和空間** (sum of subspaces)

$$W_1 + W_2 = \{\boldsymbol{x} \in V \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{z},\ \boldsymbol{y} \in W_1,\ \boldsymbol{z} \in W_2\} \tag{8}$$

は $W_1 \cup W_2$ を含む最小の線形部分空間となる．

問 1.23　W_1 と W_2 が線形空間 V の線形部分空間であるとき，$W_1 \cap W_2$ も V の線形部分空間となることを示せ．

問 1.24　V を $\mathbb{R}^2$ としたとき，$W_1 \cup W_2$ が線形空間にならない V の線形部分空間 W_1，W_2 の例をあげよ．

問 1.25　$W_1 + W_2$ が $W_1 \cup W_2$ を含む最小の線形部分空間となることを示せ．

定理 1.37 (和空間の次元) K 上の線形空間 V の線形部分空間 W_1, W_2 に対して

$$\dim(W_1+W_2)=\dim W_1+\dim W_2-\dim(W_1\cap W_2)$$

が成立する．

証明． $\dim(W_1\cap W_2)=r$, $\dim W_1=r+s$，$\dim W_2=r+t$ とおいたとき，$\dim(W_1+W_2)=r+s+t$ を示せば良い．すなわち，$W_1\cap W_2$ の基底 $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r]$ を拡大して，W_1 の基底 $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_s]$，$W_2$ の基底 $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_t]$ を得たとする（定理 1.18 参照）．このとき，

$$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_s,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_t]$$

が $\dim(W_1+W_2)$ の基底となっていれば十分である．定義 1.14 で与えた基底の要件のうち，(i) は満たされている．よって，要件 (ii)，すなわち，$\boldsymbol{E}$ が線形独立なベクトルの集合であることを示せばよい．そこで，線形関係（定義 1.11 参照）

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\boldsymbol{b}_j+\sum_{k=1}^{t}\gamma_k\boldsymbol{c}_k=\boldsymbol{0} \tag{9}$$

を考える．これを

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\boldsymbol{b}_j=-\sum_{k=1}^{t}\gamma_k\boldsymbol{c}_k$$

と書き換えると，左辺は W_1 のベクトル，右辺は W_2 のベクトルなので，右辺，左辺とも $W_1\cap W_2$ のベクトルである．よって適当なスカラー $\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_r$ を用いて

$$-\sum_{k=1}^{t}\gamma_k\boldsymbol{c}_k=\sum_{i=1}^{r}\alpha'_i\boldsymbol{a}_i \iff \sum_{i=1}^{r}\alpha'_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{k=1}^{t}\gamma_k\boldsymbol{c}_k=\boldsymbol{0}$$

を得る．ここで，$[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{c}_1,\boldsymbol{c}_2,\ldots,\boldsymbol{c}_t]$ は W_2 の基底であるため線形独立である．よって，$\alpha'_i=0$ $(i=1,2,\ldots,r)$，$\gamma_k=0$ $(k=1,2,\ldots,t)$ を得る．この結果，式 (9) は

$$\sum_{i=1}^{r}\alpha_i\boldsymbol{a}_i+\sum_{j=1}^{s}\beta_j\boldsymbol{b}_j=\boldsymbol{0},\qquad \gamma_k=0,\quad k=1,2,\ldots,t$$

と等価であることが分かる．ここで $[\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_r,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{b}_2,\ldots,\boldsymbol{b}_s]$ が W_1 の基底であることに注意すると，$\alpha_i=0$ $(i=1,2,\ldots,r)$，$\beta_j=0$ $(j=1,2,\ldots,s)$ を得る．以上より，$\boldsymbol{E}$ を構成するベクトルは線形独立である． □

定義 1.38 (直和) W_1 と W_2 を線形空間 V の線形部分空間とする．V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ が

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2,\qquad \boldsymbol{x}_1\in W_1,\ \boldsymbol{x}_2\in W_2$$

と一意に表されるとき，V は W_1 と W_2 の**直和** (direct sum) であるといい，$V=W_1\oplus W_2$ で表す．

定理 1.39 (直和であるための条件) K 上の線形空間 V に対して $V=W_1+W_2$ を満たす線形部分空間 W_1，W_2 を考える．このとき，

(i) $V=W_1\oplus W_2$
(ii) $V=W_1+W_2$ かつ $W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$
(iii) $V=W_1+W_2$ かつ $\dim V=\dim W_1+\dim W_2$

は等価である．

証明． 次元の定義 1.16 ならびに定理 1.37 より，(ii) と (iii) は同値である．よって，以下では，(i) $\Leftrightarrow$ (ii) を示す．もし，$W_1\cap W_2$ に $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}$ があれば，$\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})$ のように $\boldsymbol{0}$ に対して二通りの表現があるので，V は W_1 と W_2 の直和でない．この対偶を取って，(i) $\Rightarrow$ (ii) を得る．次に，$W_1\cap W_2=\{\boldsymbol{0}\}$ であると仮定する．もし，$\boldsymbol{x}\in V$ が

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2=\boldsymbol{x}'_1+\boldsymbol{x}'_2,\qquad \boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}'_1\in W_1,\ \boldsymbol{x}_2,\boldsymbol{x}'_2\in W_2$$

のように二通りに表されるとすると，$\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_2' - \boldsymbol{x}_2$ である．ここで $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1' \in W_1$ なので $\boldsymbol{x}_2' - \boldsymbol{x}_2 \in W_1$ である．また，$\boldsymbol{x}_2' - \boldsymbol{x}_2 \in W_2$ なので $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1' \in W_2$ である．よって，両者は共に $W_1 \cap W_2$ のベクトルであり，$W_1 \cap W_2 = \{\boldsymbol{0}\}$ なので $\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_2' - \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$ を得る．すなわち，$\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2' = \boldsymbol{x}_2$ が成立し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ なる $\boldsymbol{x}_1 \in W_1$，$\boldsymbol{x}_2 \in W_2$ が一意に定まる．以上より，(ii) ⇒ (i) を得る． □

すなわち，直和は，V の基底を空でない二つの排反な部分集合に分け，V をそれらで張られる線形部分集合の和空間として与えたものとみなすことができる．

系 1.40 K 上の n 次元線形空間 V の基底を $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n]$ とする．ただし $n \geq 2$．このとき，ある r $(r = 1, 2, \dots, n-1)$ に対して $W_1 = \mathrm{span}\,[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r]$，$W_2 = \mathrm{span}\,[\boldsymbol{a}_{r+1}, \boldsymbol{a}_{r+2}, \dots, \boldsymbol{a}_n]$ とすると，$V = W_1 \oplus W_2$ である．逆に，n 次元線形空間 V の線形部分空間 W_1, W_2 の基底をそれぞれ $\boldsymbol{E}_1 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r]$，$\boldsymbol{E}_2 = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_{n-r}]$ としたとき，$V = W_1 \oplus W_2$ ならば $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 \cup \boldsymbol{E}_2 = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \dots, \boldsymbol{b}_{n-r}]$ は V は基底である．

証明． $\dim W_1 = r$，$\dim W_2 = n - r$ であり，$V = \mathrm{span}\,[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n] = W_1 + W_2$ なので，定理 1.39 (iii) から $V = W_1 \oplus W_2$ を得る．後半は，$V = W_1 \oplus W_2$ であるとき，$V = W_1 + W_2$ である．もし，$\boldsymbol{0}$ 以外のある $\boldsymbol{x} \in W_1 = \mathrm{span}\,[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_r]$ が $\boldsymbol{E}_2$ の要素の線型結合で表現できるとすると，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$ のいずれの要素の線型結合でも表現できるので，一意性に反する．よって，$\boldsymbol{0}$ 以外の $\boldsymbol{E}_1$ の要素は $\boldsymbol{E}_2$ の要素の線型結合で表現できない．同様に，$\boldsymbol{0}$ 以外の $\boldsymbol{E}_2$ の要素も $\boldsymbol{E}_1$ の要素の線型結合で表現できない（ここまでは定理 1.39 における (i) ⇒ (ii) の言い直しである）．これは，$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r = \beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + \cdots + \beta_{n-r} \boldsymbol{b}_{n-r}$，すなわち，線形関係 $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_r \boldsymbol{a}_r + (-\beta_1) \boldsymbol{b}_1 + (-\beta_2) \boldsymbol{b}_2 + \cdots + (-\beta_{n-r}) \boldsymbol{b}_{n-r} = \boldsymbol{0}$ が $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{n-r} = 0$ のみで成立することと等価であるので，これら n 個のベクトルは線形独立であることが分かる．さらに，これらのベクトルは全て V のベクトルであり，$\dim V = n$ なので，$\boldsymbol{E}$ は V の基底である． □

例 1.41 (直和空間の例) n 次実正方行列の空間 $M_n(\mathbb{R})$ は対称行列の空間 $(\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A})$ と交代行列 $(\boldsymbol{A}^\top = -\boldsymbol{A})$ の空間の直和である（例 1.23 (i)，例 1.34 (iii) 参照）．

問 1.26 任意の n 次実正方行列 X は，ある対称行列 $\boldsymbol{A}$ $(\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A})$ とある交代行列 $\boldsymbol{B}$ $(\boldsymbol{B}^\top = -\boldsymbol{B})$ の和によって，一意に定めることができることを示せ．

線形写像 $f\colon V \to W$ が与えられたとき，始空間 V と終空間 W のそれぞれに線形部分空間が誘導される．

定義 1.42 (線形写像の核) 線形写像 $f\colon V \to W$ に対して，**核** (kernel) は

$$\mathrm{Ker}\ f = \{\boldsymbol{x} \in V \mid f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}\}$$

で定義される．

問 1.27 線形写像 $f\colon V \to W\colon \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ の像 $\mathrm{Im}\ f$ （定義 1.3 参照）は W の線形部分空間であり，核 $\mathrm{Ker}\ f$ は V の線型部分空間であることを示せ．

問 1.28 以下に示される集合 W は（常に）$\mathbb{R}$ 上の V の線形部分空間となるか否かを説明せよ．

(i) $V = \mathbb{R}^n$，$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = c^2,\ c \in \mathbb{R}\}$.
(ii) $V = \mathbb{R}^n$，$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{w}\}$．ただし，$\boldsymbol{A}$ は n 次実正方行列，$\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^n$.
(iii) $V = \mathbb{R}^n$，$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}\}$．ただし，$\boldsymbol{A}$ は n 次実正方行列，$\lambda \in \mathbb{R}$.

線形写像 $f\colon V \to W\colon \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ に対して，V，W の基底を定め，f の表現行列が $\boldsymbol{A}$ で与えられるとする．このとき，$\mathrm{Im}\ f$ は $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルで張られる線形部分空間 $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$，$\mathrm{Ker}\ f$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ の解全体（解空間）$\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$ と一致する．ただし，$\dim V = n, \dim W = m$ のとき

$$\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{y} \in K^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in K^n\} = \mathrm{span}\,[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \dots, \boldsymbol{a}_n] \qquad \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

である．上記の主張 Im $f=$ Im $\boldsymbol{A}$，Ker $f=$ Ker $\boldsymbol{A}$ はこれらの定義式から明らかである．

問 1.29 $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ ならびに $n\times r$ 行列 $\boldsymbol{B}$ に対して

$$\mathrm{Im}\ \boldsymbol{AB}\subset \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A},\qquad \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{AB}\supset \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{B}$$

が成立することを示せ．

補題 1.43 線形空間 V の線形部分空間 W が $W=V$ であるための必要十分条件は $\dim W=\dim V$ である．

証明． 線形空間 V の線形部分空間 W の基底は V の基底の部分集合である（系 1.36 参照）．よって $\dim W=\dim V$ ならば，W の基底は V の基底でもあり，同じ基底で張られる線形空間は等しいことから $W=V$ を得る．一方，次元の定義から $W=V$ ならば $\dim W=\dim V$ である． □

定理 1.44 (全射，単射であるための必要十分条件) 線形写像 $f\colon\ V\to W$ が全射であるための必要十分条件は $\dim(\mathrm{Im}\ f)=\dim W$ である．また，線形写像 $f\colon\ V\to W$ が単射となるための必要十分条件は Ker $f=\{\boldsymbol{0}\}$ である．

証明． 最初に全射であるための条件を考える．全射であるということは Im $f=W$ なので必要性は明らかである．次に十分性を考える．$\dim(\mathrm{Im}\ f)=\dim W=0$ ならば Im $f=W=\{\boldsymbol{0}\}$ なので全射である．よって，$\dim(\mathrm{Im}\ f)=\dim W\geq 1$ と仮定する．ここで，Im f は V の線形部分空間である（問 1.27 参照）．よって，補題 1.43 より，$\dim(\mathrm{Im}\ f)=\dim W$ ならば，Im $f=W$ である．次に単射であるための条件を考える．一般に，$\boldsymbol{x}\in$ Ker f に対して $f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0}$ であり，$f(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$ である (問 1.9 参照)．よって，f が単射であるならば，Ker $f=\{\boldsymbol{0}\}$．逆に，Ker $f=\{\boldsymbol{0}\}$ であるならば，$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x}')$ となる $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}'$ に対して，$f(\boldsymbol{x})-f(\boldsymbol{x}')=f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{0}$ となり，単射である． □

定理 1.45 (次元定理) K 上の有限次元線形空間 V，W および線形写像 $f\colon\ V\to W$ に対して

$$\dim(\mathrm{Im}\ f)+\dim(\mathrm{Ker}\ f)=\dim V$$

が成立する．

証明． $\dim V=n$，$\dim(\mathrm{Ker}\ f)=r$ とし，Ker f の基底を $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_r]$ とする．このとき，定理 1.18 に従い，これに $\boldsymbol{v}_{r+1},\boldsymbol{v}_{r+2},\ldots,\boldsymbol{v}_n$ を付け加えて V の基底 $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_n]$ を構成する．このとき，$f(\boldsymbol{v}_{r+1}),f(\boldsymbol{v}_{r+2}),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n)$ の組が Im f の基底になっていることを示せば，$\dim(\mathrm{Im}\ f)=n-r$ なので十分である．一般に，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ は適当なスカラー α_i $(i=1,2,\ldots,n)$ を用いて

$$\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{v}_1+\alpha_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{v}_n$$

と表すことができ，このとき

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x})&=\alpha_1f(\boldsymbol{v}_1)+\alpha_2f(\boldsymbol{v}_2)+\cdots+\alpha_rf(\boldsymbol{v}_r)+\alpha_{r+1}f(\boldsymbol{v}_{r+2})+\cdots+\alpha_nf(\boldsymbol{v}_n)\\&=\alpha_{r+1}f(\boldsymbol{v}_{r+1})+\alpha_{r+2}f(\boldsymbol{v}_{r+2})+\cdots+\alpha_nf(\boldsymbol{v}_n)\end{aligned}$$

より，Im f は $f(\boldsymbol{v}_{r+1}),f(\boldsymbol{v}_{r+2}),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n)$ で張られる線形部分空間 span $[f(\boldsymbol{v}_{r+1}),f(\boldsymbol{v}_{r+2}),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n)]$ であることがわかる（補題 1.35 参照）．よって，$f(\boldsymbol{v}_{r+1}),f(\boldsymbol{v}_{r+2}),\ldots,f(\boldsymbol{v}_n)$ が基底をなすこと，すなわち，これらが線形独立であることを示せば良い．そこで，線形関係

$$\beta_{r+1}f(\boldsymbol{v}_{r+1})+\beta_{r+2}f(\boldsymbol{v}_{r+2})+\cdots+\beta_nf(\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}\tag{10}$$

が成立すると仮定すると

$$f(\beta_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+\beta_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\cdots+\beta_n\boldsymbol{v}_n)=\beta_{r+1}f(\boldsymbol{v}_{r+1})+\beta_{r+2}f(\boldsymbol{v}_{r+2})+\cdots+\beta_nf(\boldsymbol{v}_n)=\boldsymbol{0}$$

となるので，$\beta_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+\beta_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\cdots+\beta_n\boldsymbol{v}_n\in$ Ker f を得る．Ker f の基底は $[\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2,\ldots,\boldsymbol{v}_r]$ なので，

$$\beta_{r+1}\boldsymbol{v}_{r+1}+\beta_{r+2}\boldsymbol{v}_{r+2}+\cdots+\beta_n\boldsymbol{v}_n=\beta_1'\boldsymbol{v}_1+\beta_2'\boldsymbol{v}_2+\cdots+\beta_r'\boldsymbol{v}_r$$

となる $\beta'_1, \beta'_2, \cdots, \beta'_r$ が存在する．これらを $\beta_i = -\beta'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ として書き換えると

$$\beta_1 \boldsymbol{v}_1 + \beta_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \beta_r \boldsymbol{v}_r + \beta_{r+1} \boldsymbol{v}_{r+1} + \cdots + \beta_n \boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0}$$

を得る．$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は線形独立なので，$\beta_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ でなければならない．すなわち，式 (10) が成立するならば $\beta_{r+1} = \beta_{r+2} = \cdots = \beta_n = 0$ となり，$f(\boldsymbol{v}_{r+1}), f(\boldsymbol{v}_{r+2}), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ は線形独立である． □

系 1.46 (線形変換における全射と単射) K 上の線形空間 V における線形変換 $f\colon V \to V$ に対して f が全射であることと f が単射であることは同値である．

証明． 定理 1.44 より，f が全射であることは $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \dim V$ と同値，f が単射であることは $\dim(\mathrm{Ker}\ f) = 0$ と同値である．よって，次元定理 $\dim(\mathrm{Im}\ f) + \dim(\mathrm{Ker}\ f) = \dim V$ より $\dim(\mathrm{Im}\ f) = \dim V \iff \dim(\mathrm{Ker}\ f) = 0$． □

1.7 標準形と階数

本節では，基底変換による標準形との関係，ならびに，これから得られる「階数＝線形写像の像の次元」について述べる．

補題 1.47 $\dim V = n$，$\dim W = m$ なる K 上の線形空間 V，W に対する任意の線形写像 $f\colon V \to W$ において $\dim(\mathrm{Im}\ f) = r$ であるとする．このとき，V，W の基底 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}'$ を適切に選べば，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}'$ に関する f の表現行列は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}_{r,n-r} \\ \boldsymbol{O}_{m-r,r} & \boldsymbol{O}_{m-r,n-r} \end{pmatrix}$$

の形を取ることができる．これを表現行列の標準形という．ただし $\boldsymbol{I}_r$ は r 次の単位行列，$\boldsymbol{O}_{i,j}$ は全ての要素が 0 である $i \times j$ 行列である．

証明． f の像 $\mathrm{Im}\ f \subset W$ の基底を $[\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_r]$ とし，これにいくつかの元を加えて（拡大して）W の基底 $\boldsymbol{E}' = [\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_m]$ を作る（定理 1.18 参照）．このとき，

$$f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{e}'_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$

となるような V のベクトル $\boldsymbol{e}_i$ を考えると，$\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_r$ は線形独立となる（補題 1.12 の前半部分の対偶）．一方，次元定理 1.45 より，$\mathrm{Ker}\ f$ の次元は $n - r$ であるので，$\mathrm{Ker}\ f$ の基底を $[\boldsymbol{e}_{r+1}, \cdots, \boldsymbol{e}_n]$ と取ると

$$f(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{0}, \qquad i = r+1, \ldots, n$$

である．よって

$$\begin{aligned} \big(f(\boldsymbol{e}_1), f(\boldsymbol{e}_2), \ldots, f(\boldsymbol{e}_r), f(\boldsymbol{e}_{r+1}), \ldots, f(\boldsymbol{e}_n)\big) &= [\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_r, \boldsymbol{0}, \ldots, \boldsymbol{0}] \\ &= [\boldsymbol{e}'_1, \boldsymbol{e}'_2, \ldots, \boldsymbol{e}'_r, \boldsymbol{e}'_{r+1}, \ldots, \boldsymbol{e}'_m] \begin{pmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{O}_{r,n-r} \\ \boldsymbol{O}_{m-r,r} & \boldsymbol{O}_{m-r,n-r} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る． □

定義 1.48 (線形写像の階数) 線形写像 $f : V \to W$ に対し，像空間 $\mathrm{Im}\ f$ の次元，すなわち $\dim(\mathrm{Im}\ f)$ を線形写像 f の**階数**あるいは**ランク** (rank) という．同様に，$\dim(\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A})$ を行列 $\boldsymbol{A}$ の階数という．

注意 1.49 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$ とすると，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n$ なので，$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルの内，線形独立なものの最大数である．

注意 1.50 行列の階数を与える量には上記の他にも様々なものがある．例えば，$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数 rank $\boldsymbol{A} = \dim(\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A})$ を与える量には以下のようなものがある．

(i) $\boldsymbol{A}$ によって定まる $K^n \to K^m$ の線形写像 f の像の次元（定義 1.48）
(ii) $\boldsymbol{A}$ を基本変形で標準形に変換したとき, 対角線上に並ぶ 1 の数（補題 1.28，補題 1.47）
(iii) $\dim V - \dim(\mathrm{Ker}\ f)$ （定理 1.45）
(iv $\boldsymbol{A}$ の線形独立な列ベクトルの数（注意 1.49）
(v) $\boldsymbol{A}$ の線形独立な行ベクトルの数（後ほど，2.5.3 節の注意 2.70 で示される）
(vi) $\boldsymbol{A}$ の 0 でない小行列式の最大次数（この資料にはない）

注意 1.51 n 次正方行列 $\boldsymbol{A}$ において，以下は同値である．

(i) rank $\boldsymbol{A} = n$ （定義 1.48，注意 1.49，注意 1.50 参照）
(ii) $\boldsymbol{A}$ が正則，すなわち，$\boldsymbol{A}$ の逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ が存在する（注意 1.26 ）
(iii) Ker $\boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{0}\}$ （定理 1.45）
(iv) Im $\boldsymbol{A} = K^n$ （定理 1.21）
(v) $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ （この資料にはない）

「階数 = 線形写像の像の次元」は座標系に依らない固有の量であり，線形写像の構造を一意に定める．すなわち，階数は線形写像の不変量である．

注意 1.52 行列の行および列に対する基本変形を施しても階数は不変であるため，行列の階数を求める際に基本変形を用いるが，これは，座標変換（基底の取り替え）に対応している（補題 1.27 参照)．つまり，行列の基本変形は，異なる基底に対する線形写像の表現行列を求めることに相当している．

例 1.53 (基底の取替えの例 1) V を以下の差分方程式（漸化式）を満たす数列 $\{x_n\}$ の全体とする．

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$$

このとき，$\boldsymbol{e}_0$ を $(x_0, x_1) = (1, 0)$, $\boldsymbol{e}_1$ を $(x_0, x_1) = (0, 1)$ で定まる数列とすると，$[\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1]$ は基底となる（標準基底）．実際，任意の (a, b) に対して $(x_0, x_1) = (a, b)$ で定まる数列 $\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{f} = a\boldsymbol{f}_0 + b\boldsymbol{f}_1$ で与えられる．一方，$(x_0, x_1) = (1, 1)$ である数列を $\boldsymbol{f}_0$，$(x_0, x_1) = (1, 2)$ である数列を $\boldsymbol{f}_1$ とすると，$[\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1]$ も基底となる．実際，任意の (a, b) に対して $(a, b) = \alpha(1, 1) + \beta(1, 2)$ となる α，β が一意に定まり，$(x_0, x_1) = (a, b)$ で定まる数列 $\boldsymbol{f}$ は $\boldsymbol{f} = \alpha\boldsymbol{f}_0 + \beta\boldsymbol{f}_1$ で与えられる．さらに，$[\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1]$ から $[\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1]$ への基底の取替の行列 $\boldsymbol{S}$ は

$$[\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1] = [\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1]\boldsymbol{S}, \qquad \boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．

次に，V 上の線形変換として 1 項だけ先へずらす写像 $T\colon\ \{x_n\} \to \{x_{n+1}\}$ を考える．標準基底の下では

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_0 &= \{x_0 = 1, x_1 = 0, x_2 = -2, \cdots\} \\
\boldsymbol{e}_1 &= \{x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 3, \cdots\} \\
T(\boldsymbol{e}_0) &= \{x_0 = 0, x_1 = -2, x_2 = -6, \cdots\} = -2\boldsymbol{e}_1 \\
T(\boldsymbol{e}_1) &= \{x_0 = 1, x_1 = 3, x_2 = 7, \cdots\} = \boldsymbol{e}_0 + 3\boldsymbol{e}_1
\end{aligned}$$

であり，T の基底 $[\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1]$ に関する表現行列は

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

となる．よって，基底を $[\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1]$ から $[\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1]$ に取り替えたとき，基底 $[\boldsymbol{f}_0, \boldsymbol{f}_1]$ に関する表現行列 $\boldsymbol{A}'$ は

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

で与えられる．ここで $\boldsymbol{A}'$ の形に注意すると，$T\boldsymbol{f}_0 = \boldsymbol{f}_0,\ T\boldsymbol{f}_1 = 2\boldsymbol{f}_2$ であることが分かる．これらは，一項ずらしても同じ数列，および一項ずらせば 2 倍となる数列を表しているので，二つの基底を $\boldsymbol{f}_0 = \{1\}$，$\boldsymbol{f}_1 = \{2^n; n \in \mathbb{N}\}$ と取ることができる．これらの基底に基づくと，V の任意の数列は

$$\{x_n; n \in \mathbb{N}\} = \{\alpha + \beta 2^n; n \in \mathbb{N}\} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

で与えられる．

例 1.54 (基底の取替えの例 2（問 1.18 参照）) V を 3 次以下の実係数多項式全体の空間 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ とし，W を 2 次以下の実係数多項式全体の空間 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ とする．さらに，$\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ の基底を $\boldsymbol{E} = [x^3, x^2, x, 1]$, $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ の基底を $\boldsymbol{E}' = [x^2, x, 1]$ とする．写像 T を

$$T:\ \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}):\ f(x) \mapsto xf''(x) - 2f'(x-1)$$

と定義すると，これは線形写像となる．V の基底 $\boldsymbol{E} = [x^3, x^2, x, 1]$ の行き先は

$$T(x^3) = 12x - 6, \quad T(x^2) = -2x + 4, \qquad T(x) = -2, \qquad T(1) = 0$$

である（確認せよ）．よって，基底 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}'$ に関する T の表現行列は

$$T([x^3, x^2, x, 1]) = [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -2 & 0 & 0 \\ -6 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．問 1.18 とは基底を構成するベクトルの順序が異なっていることに注意せよ（定義 1.14 参照）．

上記の結果より，明らかに線形写像 T の像の $\mathrm{Im}\, T$ の次元は 2 であり，その基底として例えば $-2x+4$ および -2 を取ることができる（まず, V の基底に対し, W 上で線形独立となる基底の行き先を考えることで，像の基底を取る）．

$$T([x^2, x]) = [-2x + 4, -2] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

続いて，次元定理より，$\dim \mathrm{Ker}\, T = 2$ であるので，これは例えば

$$T(1) = 0,$$
$$T(x^3 + 6x^2 + 9x) = (12x - 6) + 6(-2x + 4) + 9(-2) = 0$$

があることが分かる．また，これらは線形独立であるので，1 および $x^3 + 6x^2 + 9x$ は $\mathrm{Ker}\, T$ の基底となる（このように, うまく探して核の基底をを取る）．以上を上合わせると以下を得る．

$$T([x^2,\ x,\ x^3 + 6x^2 + 9x,\ 1]) = [-2x + 4,\ -2] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

以上より，V の基底を $[x^2, x, x^3 + 6x^2 + 9x, 1]$ とし（像の基底の設定に用いた基底と核の基底をあわせたもの），W の基底を（$\mathrm{Im}\, T$ を適当に延長して）$[-2x + 4, -2, x^2]$ とすると，これらの基底に対する T の表現行列は

$$T([x^2, x, x^3 + 6x^2 + 9x, 1]) = [-2x + 4, -2, x^2] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

問 1.30　3 次以下の実係数多項式の全体の空間 $\mathcal{P}_3$ 上の線形変換 $f(x) \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ に対して

$$(Tf)(x) = (x+1)f''(x) - f'(x)$$

とする線形写像 $T:\ \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R}):\ f(x) \mapsto (x+1)f''(x) - f'(x)$ について，以下の問いに答えよ．

(i) $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ および $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ の（簡単な）基底を設定し，これらの基底間の関係を考えることで，線形写像 T の表現行列を求めよ．

(ii) T の像空間 $(\mathrm{Im}\ T)$ の次元を求め，その基底を 1 組与えよ．

(iii) 次元定理を用いて T の核 $(\mathrm{Ker}\ T)$ の次元を求め，その（簡単な）基底を 1 組与えよ．

(iv) (i)–(iii) の結果を用いて，T の表現行列が標準形となるような始空間と終空間の基底を 1 組与えよ．

2 内積空間と線形方程式

ここまで，線形空間のベクトルに関する演算は，加法とスカラー乗法のみであった．この章では，ベクトルの内積を導入することで，議論可能な範囲を広げる．

なお，以下では，断らない限り，体 K は複素数体 $\mathbb{C}$ を想定する．複素数 $x = a + ib$ $(a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1)$ の共役 (conjugate) を $\overline{x} = a - ib$ と書く．複素数 x が実数であるための必要十分条件は $\overline{x} = x$ であるので，実数体 $\mathbb{R}$ を考える際には共役 $^-$ を無視して，$\overline{x} = x$ と読み替えれば良い．

2.1 内積，ノルム，内積空間

定義 2.1 (直積) 集合 X，Y に対して，X，Y の順序付けられた元の組の全体からなる集合

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

を集合 X，Y の**直積** (direct product) という．これはデカルト (de Cartes) の解析幾何と座標空間の概念を端緒としているため，**デカルト積** (Cartesian product) とも呼ばれる．

定義 2.2 (内積) $\mathbb{C}$ 上の線形空間 V における**内積** (inner product) とは，V の直積空間 $V \times V$ から $\mathbb{C}$ への写像 $(\cdot, \cdot)\colon V \times V \to \mathbb{C}$ であって，任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in V$ ならびにスカラー $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

(i) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ は 0 または正の実数，かつ，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

(ii) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$

(iii) $(\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(iv) $(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

が成立するものを指す．

問 2.1 以下が成立することを示せ．

(i) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$

(ii) $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$

(iii) $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 0$

(iv) $\exists \boldsymbol{x} \in V, \forall \boldsymbol{y} \in V, (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

例 2.3 (内積の例)

(i) **標準内積** (standard inner product)：

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\top \overline{\boldsymbol{y}} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i \tag{11}$$

注意：数学以外の分野では，標準内積を $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{\boldsymbol{x}}^\top \boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$ と定義する場合もあるが，本講義では，式 (11) を標準内積の定義とする．

(ii) 有限区間 $[a,b]$ 内で連続な関数 $f,g\colon [a,b]\to\mathbb{C}$ に対して

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}\mathrm{d}x$$

(iii) $n\times m$ 行列 $\boldsymbol{A}$ と $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{B}$ の積 $\boldsymbol{AB}$ の **トレース** (trace)

$$\boldsymbol{A}\bullet\boldsymbol{B}=\mathrm{trace}\boldsymbol{AB}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{i,j}\bar{b}_{j,i}$$

問 2.2 $\mathbb{C}$ 上の線形空間 $\mathbb{C}^n$ における標準内積の定義を $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ とすることができないのはなぜか.

定義 2.4 (内積空間) 内積が定義された線形空間 V を内積と組にして**内積空間** (inner product space) あるいは**計量線形空間** (metric linear space) という.

定義 2.5 (ノルム) $\mathbb{C}$ 上の線形空間 V において，$\|\cdot\|\colon V\to\mathbb{R}$ が任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ ならびにスカラー $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して

(i) $\|\boldsymbol{x}\|=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$

(ii) $\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$

(iii) $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\le\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$

を満たすとき，$\|\cdots\|$ を $\boldsymbol{x}$ の**ノルム** (norm) あるい**長さ** (length) という.

注意 2.6 定義 2.5 (iii) は**三角不等式** (triangle inequality) と呼ばれる．この性質から，$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ の**距離** (distance)

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|$$

がノルムを用いて自然な形で定義できる.

内積 $(\cdot,\cdot)$ が導入された内積空間 V において

$$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})} \tag{12}$$

はノルムである（ノルムの性質 (i), (ii) が成立することを確認せよ）．ノルムは内積から誘導されるものだけではなく，様々なものがあるが，これ以降，ノルムは式 (12) で与えられるとする.

次に，ノルムの性質 (iii) を議論する.

定理 2.7 (コーシー・シュヴァルツ (Cauchy-Schwarz) の不等式) 内積 $(\cdot,\cdot)$ が導入された複素数体 $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V において，$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義する．このとき，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in V$ に対して

$$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\le\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$$

が成立し，かつ，等号が成立するのは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が 1 次従属のときに限る.

証明. $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ ならば明らかに等号が成り立つ．よって，以下では $\boldsymbol{x}\ne\boldsymbol{0}$ を仮定する．任意のスカラー $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して

$$\begin{aligned}0&\le\|\alpha\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}\|^2=(\alpha\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y},\alpha\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=(\alpha\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{x})-(\boldsymbol{y},\alpha\boldsymbol{x})-(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})\\&=\alpha(\boldsymbol{x},\alpha\boldsymbol{x})-\overline{(\alpha\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}-\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})=\alpha\overline{\alpha}\|\boldsymbol{x}\|^2-\overline{\alpha}\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}-\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\|\boldsymbol{y}\|^2\end{aligned}$$

である．ここで

$$\left(\alpha\|\boldsymbol{x}\|-\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\overline{\left(\alpha\|\boldsymbol{x}\|-\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)}=\alpha\overline{\alpha}\|\boldsymbol{x}\|^2-\overline{\alpha}\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}-\alpha(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\frac{|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2}$$

に注意すると

$$
\begin{aligned}
0 \le \|\alpha \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 &= \left(\alpha\|\boldsymbol{x}\| - \frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)\overline{\left(\alpha\|\boldsymbol{x}\| - \frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right)} - \frac{|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \\
&= \left|\alpha\|\boldsymbol{x}\| - \frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right|^2 - \frac{|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \qquad (13)
\end{aligned}
$$

を得る．α は任意なので，$\alpha = \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}/\|\boldsymbol{x}\|^2$ とすると

$$
-\frac{|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|^2}{\|\boldsymbol{x}\|^2} + \|\boldsymbol{y}\|^2 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| \le \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|
$$

を得る．次に等号条件を考える．$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ が一次従属であることは，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ であるか，あるいは，$\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}$ ，かつ，あるスカラー $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して，$\boldsymbol{y} = \alpha \boldsymbol{x}$ であることと等価である．前者ならば等号が成立するので後者を考える．後者が成立すると仮定すると，$|(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{x})| = |\alpha||(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|^2 = \|\alpha\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{x}\|$ より等号 $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ が成立する．逆に，等号 $|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| = \|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|$ が成立するならば，式 (13) より

$$
0 \le \|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = \left|\alpha\|\boldsymbol{x}\| - \frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{\|\boldsymbol{x}\|}\right|^2
$$

が任意の α に対して成立するので，$\alpha = \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}/\|\boldsymbol{x}\|^2$ とすると，$\|\alpha\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2 = 0$ となり，$\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$ を得る． □

定理 2.8 (三角不等式) 内積 $(\cdot,\cdot)$ が導入された複素数体 $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V において，$\|\boldsymbol{x}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})}$ と定義する．このとき，任意の $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in V$ に対して

$$
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\| \le \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|
$$

が成立する．

証明.

$$
\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \|\boldsymbol{x}\|^2 + (\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})} + \|\boldsymbol{y}\|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2\mathrm{Re}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) + \|\boldsymbol{y}\|^2 \le \|\boldsymbol{x}\|^2 + 2|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})| + \|\boldsymbol{y}\|^2
$$

の右辺第2項に対してコーシー･シュヴァルツの不等式を適用すれば $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2 \le \|\boldsymbol{x}\|^2+2\|\boldsymbol{x}\|\|\boldsymbol{y}\|+\|\boldsymbol{y}\|^2 = (\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|)^2$ を得る．ノルムは非負なので題意が示された． □

問 2.3　式 (12) で与えた，標準内積（式 (11)）から誘導されるノルムに対して，$\|\overline{\boldsymbol{x}}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ を示せ．

n 次元実線形空間 $\mathbb{R}^n$ に標準内積を入れたものを n 次元**ユークリッド空間** (Euclidean space)，n 次元複素線形空間 $\mathbb{C}^n$ に標準内積を入れたものを n 次元**ユニタリ空間** (unitary space) という．

定義 2.9 (直交) $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = 0$ のとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ は**直交** (orthogonal) するという．

補題 2.10 $\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ が互いに直交するならば，それらは線形独立である．

証明.

$$
\alpha_1\boldsymbol{x}_1 + \alpha_2\boldsymbol{x}_2 + \cdots + \alpha_k\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{0}
$$

に対して，各 $\boldsymbol{x}_i$ $(i = 1,\ldots,k)$ と上式の両辺の内積を取り，$\boldsymbol{x}_i \neq \boldsymbol{0}$ に注意すると $\alpha_i = 0$ を得る． □

注意 2.11 補題 2.10 の逆は成立しない．すなわち，$\boldsymbol{0}$ でないベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_k$ が線形独立であっても，直交するとは限らない．例えば，２次元実ベクトル $(1,0)$ と $(1,1)$ は線形独立であるが直交しない．

定義 2.12 (正規直交基底) $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 V のベクトル $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\ldots,\boldsymbol{x}_k$ が互いに直交し，かつ，これらの長さが 1 のとき，**正規直交系** (orthonormal system) という．特に，これらが V の基底であるとき，すなわ

ち，$k = n$ であるとき，この基底を**正規直交基底** (orthonormal basis) という（orthonormal = orthogonal and normal）.

補題 2.13 $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V の正規直交基底を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ としたとき，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ は

$$\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i, \quad \forall \boldsymbol{x} \in V \tag{14}$$

のように表すことができる.

証明. 一般に $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \boldsymbol{v}_i$ となる α_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が存在する．ここで $\boldsymbol{x}$ と各 $\boldsymbol{v}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の内積をとると $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_k) = \alpha_k(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k) = \alpha_k$ を得る. □

定理 2.14 (正規直交基底によるノルムの評価) $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 V の正規直交基底を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ としたとき，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)|^2 = \|\boldsymbol{x}\|^2, \quad \boldsymbol{x} \in V \tag{15}$$

が成立する．逆に，$\|\boldsymbol{v}_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を満たす $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が式 (15) を満たすならば，これらは V の正規直交基底である.

証明. 補題 2.13 を用いると

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \Big(\sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i, \sum_{i=1}^{n} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)\boldsymbol{v}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)|^2 (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)|^2$$

を得る．逆に，式 (15) が成立するならば，各 k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ に対して $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}_k$ を代入すると

$$\sum_{i=1}^{n} |(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i)|^2 = \|\boldsymbol{v}_k\|^2 = (\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k) = 1$$

となるが，一方で定義より

$$\sum_{i=1}^{n} |(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i)|^2 = |(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k)|^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i)|^2 = 1 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} |(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i)|^2$$

であるので，$i \neq k$ なる i に対して $|(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_i)| = 0$ を得る．よって，$\boldsymbol{v}_k$ と $\boldsymbol{v}_i$ は直交する. □

定理 2.14 より，直ちに以下の系が得られる.

系 2.15 (ベッセル (Bessel) の不等式) $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V の正規直交系を $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_r$ としたとき，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\sum_{i=1}^{r} |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}_i)|^2 \leq \|\boldsymbol{x}\|^2, \quad \boldsymbol{x} \in V$$

が成立する.

定理 2.16 (シュミットの直交化) $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 V において $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が基底であるとき，

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{x}_1}{\|\boldsymbol{x}_1\|}, \qquad \boldsymbol{v}_i = \frac{\boldsymbol{a}_i}{\|\boldsymbol{a}_i\|}, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

ただし

$$\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{i-1} (\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{v}_j)\boldsymbol{v}_j, \quad i = 2, 3, \ldots, n$$

によって，正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ を作ることができる．これを**シュミット (Schmidt) の直交化** (orthnormalization of Schmidt) という.

証明． 正規性（長さが 1）は保証されている．よって以下では直交性を示す．まず，定義より

$$(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}_1) = \big(\boldsymbol{x}_2 - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1)\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1\big) = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1) - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1)(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_1) = (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1) - (\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{v}_1) = 0$$

なので，$(\boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_1) = (1/\|\boldsymbol{a}_2\|)(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{v}_1) = 0$ となり，$\boldsymbol{v}_1$ と $\boldsymbol{v}_2$ は直交している．そこで，ある i $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$ に対して $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_i$ は正規直交系をなすと仮定する．このとき，$\boldsymbol{v}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, i)$ に対して

$$(\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{v}_k) = (\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{v}_k) - \sum_{j=1}^{i} (\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{v}_j)(\boldsymbol{v}_j, \boldsymbol{v}_k) = (\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{v}_k) - (\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{v}_k)(\boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{v}_k) = (\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{v}_k) - (\boldsymbol{x}_{i+1}, \boldsymbol{v}_k)$$

となるので $(\boldsymbol{a}_{i+1}, \boldsymbol{v}_k) = 0$，すなわち $(\boldsymbol{v}_{i+1}, \boldsymbol{v}_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, i)$ を得る．よって，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_{i+1}$ は正規直交系をなす．さらに，$\dim V = n$ なので，$\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は正規直交基底となる． □

任意の線形空間 $V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ には必ず基底が存在する（定理 1.18 参照）．よって，定理 2.16 より，以下の系が直ちに得られる．

系 2.17 $\mathbb{C}$ 上の任意の内積空間 $V \neq \{\boldsymbol{0}\}$ には必ず正規直交基底が存在する．

定義 2.18 $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V の線形部分空間 W に対して，W の全てのベクトルと直交する V のベクトル全てからなる集合を W の**直交補空間** (orthogonal complement) と呼び, 以下で表す．

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in V \mid (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0, \forall \boldsymbol{y} \in W\}$$

問 2.4　上記で定義された直交補空間 $W^{\perp}$ は V の線形部分空間であることを示せ．

定理 2.19 (直交補空間と直和) $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V の線形部分空間 W に対して

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

が成立する．

証明． 定理 1.39 より，$V = W + W^{\perp}$ かつ $W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$ を示せば良い．まず，$\boldsymbol{x} \in W \cap W^{\perp}$ とすると，直交補空間の定義より $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ となり, $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を得る．すなわち $W \cap W^{\perp} = \{\boldsymbol{0}\}$ である．W の正規直交基底を $\boldsymbol{w}_1, \cdots, \boldsymbol{w}_r$ とし，任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \qquad \boldsymbol{x}_1 = \sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i, \qquad \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1$$

とすると，明らかに $\boldsymbol{x}_1 \in W$ である（$\boldsymbol{x}_1$ の取り方に関しては補題 2.13 参照）．よって $\boldsymbol{x}_2 \in W^{\perp}$ を示せば良い．これは $(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{w}_k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ と等価であり，実際，

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{w}_k) = (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{w}_k) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_k) - (\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{w}_k) &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_k) - \Big(\sum_{i=1}^{r} (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_i)\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{w}_k\Big) \\ &= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_k) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_k)(\boldsymbol{w}_k, \boldsymbol{w}_k) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_k) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{w}_k) = 0\end{aligned}$$

が全ての $k = 1, 2, \ldots, r$ に対して成立する． □

注意 2.20 一般に，$V = U \oplus W$ であっても，$U^{\perp} = W$ であるとは限らない．例えば，$U = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \alpha(1, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}\}$，$W = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \beta(1, 1),\ \beta \in \mathbb{R}\}$ とすれば $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$ だが $U^{\top} \neq W$ である（注意 2.11 参照）．直和 $\oplus$ は線形空間において定義される概念であり，直交（補空間）は線形空間に内積を導入した内積空間の概念である．英語名 direct sum と orthogonal (complement) を想起すれば違いは明らかなのだが，残念ながら，日本語からはその意味を正確に認識することは難しい．

問 2.5　$\mathbb{C}$ 上の内積空間 V の線形部分空間 W_1，W_2 に対して以下が成立することを示せ．

(i) $(W_1^{\perp})^{\perp} = W_1$

(ii) $W_1 \subset W_2 \quad \Leftrightarrow \quad W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp}$

(iii) $(W_1 + W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$

(iv) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

例 2.21 (直交補空間の例) $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対し，方程式系

$$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n, \qquad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

の解空間を考える．$\boldsymbol{A}$ の行ベクトルを $\boldsymbol{a}_1^{\top}, \boldsymbol{a}_2^{\top}, \ldots, \boldsymbol{a}_m^{\top}$ とすると，

$$(\boldsymbol{a}_i^{\top}, \boldsymbol{x}) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

である．よって，上記の方程式系の解空間 Ker $\boldsymbol{A}$ は $\boldsymbol{A}$ の行ベクトル $\boldsymbol{a}_1^{\top}, \boldsymbol{a}_2^{\top}, \cdots, \boldsymbol{a}_m^{\top}$ で張られる $\mathbb{C}^n$ の線形部分空間の直交補空間である．

例 2.22 (直交補空間の例（続き）) 前例と同じく，$\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列とし，$\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m$ とすると，標準内積に対して次式が成立する．

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} \Big(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big) \overline{y}_i = \sum_{j=1}^{n} x_j \Big(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overline{y}_i \Big) = \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{\Big(\sum_{i=1}^{m} \overline{a}_{ij} y_i \Big)} = (\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{A}}^{\top} \boldsymbol{y})$$

これを用いると，

$$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \ \Leftrightarrow\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m, (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m, (\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{A}}^{\top} \boldsymbol{y}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x} \in (\mathrm{Im}\ \overline{\boldsymbol{A}}^{\top})^{\perp} \tag{16}$$

を得る．すなわち，$(\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A})^{\perp} = \mathrm{Im}\ \overline{\boldsymbol{A}}^{\top}$ である．

定義 2.23 (随伴行列) 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して $\overline{\boldsymbol{A}}^{\top}$ を $\boldsymbol{A}$ の**随伴行列** (adjoint matrix) といい，$\boldsymbol{A}^*$ で表す．

注意 2.24 実行列 $\boldsymbol{A}$ に対しては，随伴行列 $\boldsymbol{A}^*$ は転置行列 $\boldsymbol{A}^{\top}$ となる．以下の議論は複素数体を対象に行うが，実数体に限る場合は，随伴行列 $\boldsymbol{A}^*$ を転置行列 $\boldsymbol{A}^{\top}$ に読み替えればよい．

随伴行列の定義から以下の性質が容易に確認できる．

$$(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}, \qquad (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*, \qquad (\alpha \boldsymbol{A})^* = \overline{\alpha} \boldsymbol{A}^*, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^* \boldsymbol{A}^*,$$

また，最初と最後の性質から

$$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* \tag{17}$$

が成立する．これらから分かるように，随伴行列の演算規則は転置行列の演算規則と同じである．

定義 2.25 (エルミート行列と対称行列) $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}$ となる正方行列を**エルミート行列** (Hermitian matrix) という．特に $\boldsymbol{A}$ が実行列であるときは $\boldsymbol{A}^{\top} = \boldsymbol{A}$ なので対称行列である．

式 (17) より，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ は共にエルミート行列である．この性質から，正方行列 X，Y がある行列 $\boldsymbol{A}$ を用いて，$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ と表現できるとき，これらの右辺が共にエルミート行列なので，$\boldsymbol{X}$，$\boldsymbol{Y}$ もエルミート行列であることが分かる．

$$\boldsymbol{X}^* = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}, \qquad \boldsymbol{Y}^* = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{Y}$$

問 2.6　正則な正方行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$(\boldsymbol{A}^*)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^*$$

が成立することを示せ．

問 2.7　$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ と 0 でない任意のスカラー $\alpha\ (\neq 0)$ に対して，$\alpha \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ は正則である，すなわち，$\operatorname{rank}(\alpha \boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = m$ であることを示せ．また，$\alpha \boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ が正則であることを示せ（注意 1.51 参照）．

例 2.21 ならびに例 2.22 の議論を踏まえた上で，以下の二つの定理を与える．

定理 2.26 (線形写像と内積) 任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m$，並びに $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，標準内積の下で

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y})$$

が成立する．また，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$，$\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y})$$

が成立するならば $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^*$ である．

証明． まず，

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^\top \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}^\top \overline{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{x}^\top \overline{(\overline{\boldsymbol{A}}^\top \boldsymbol{y})} = (\boldsymbol{x}, \overline{\boldsymbol{A}}^\top \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y})$$

である（例 2.22 と見比べよ）．もし，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y})$ が成立すれば，任意の $\boldsymbol{x}$ に対して

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{B})\boldsymbol{y}) = 0$$

となるので，任意の $\boldsymbol{y}$ に対して $(\boldsymbol{A}^* - \boldsymbol{B})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ でなければならない．よって $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{B}$．　□

定理 2.27 (Im $\boldsymbol{A}$，Ker $\boldsymbol{A}$ の直交補空間) $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ で定まる線形写像において，

$$(\operatorname{Im} \boldsymbol{A}^*)^\perp = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}, \qquad (\operatorname{Im} \boldsymbol{A})^\perp = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}^*$$

が成立する．すなわち，Im $\boldsymbol{A}^*$ と Ker $\boldsymbol{A}$ は互いに $\mathbb{C}^n$ における直交補空間である（定義 2.18 参照）．同様に Im $\boldsymbol{A}$ と Ker $\boldsymbol{A}^*$ は互いに $\mathbb{C}^m$ における直交補空間である．この結果，

$$\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} \boldsymbol{A}^* \oplus \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}, \qquad \mathbb{C}^m = \operatorname{Im} \boldsymbol{A} \oplus \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}^*$$

であることも分かる．

証明． 定理 2.19 より，$(\operatorname{Im} \boldsymbol{A}^*)^\perp = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}$ であれば $\mathbb{C}^n = \operatorname{Im} \boldsymbol{A}^* \oplus \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}$ が成立する．よって，$(\operatorname{Im} \boldsymbol{A}^*)^\perp = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}$ を示す．定理 2.26 を用いると

$$\boldsymbol{x} \in \operatorname{Ker} \boldsymbol{A} \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \ \Leftrightarrow\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m \ \Leftrightarrow\ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}) = 0,\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{x} \in (\operatorname{Im} \boldsymbol{A}^*)^\perp$$

を得る．直和を用いた表現は定理 2.19 から従う．$(\operatorname{Im} \boldsymbol{A})^\perp = \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}^*$ の証明は $\boldsymbol{A}$ の代わりに $\boldsymbol{A}^*$ を用いて同じ議論を行えば良い．　□

問 2.8　定理 2.27 の後半を証明せよ．

系 2.28 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ による線形写像 $f\colon\ \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ を考える．ここで，$\mathbb{C}^n$ は

$$\mathbb{C}^n = U \oplus \operatorname{Ker} \boldsymbol{A}$$

のように直和分解されているとする．このとき，行列 $\boldsymbol{A}$ による $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への線形写像の定義域を $U \subset \mathbb{C}^n$ に制限すると，この制限された写像は Im $\boldsymbol{A}$ を終空間にもつ全単射となる．

証明． 定義域を線形部分空間 U に制限した，$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ による線形写像を $f\colon\ U \to W\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ とする．このとき，

$$\boldsymbol{x}_1 \in U \subset \mathbb{C}^n \ \Rightarrow\ f(\boldsymbol{x}_1) \in \operatorname{Im} f \subset \operatorname{Im} \boldsymbol{A}$$

である．以下では，逆の包含関係 Im $\boldsymbol{A} \subset$ Im f も成立することを示す．$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ （問 1.9 参照）に注意すると，

$$\boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} \ \Rightarrow\ f(\boldsymbol{x}_2) = \mathbf{0} = f(\mathbf{0}) \in \mathrm{Im}\ f$$

を得る．直和の定義 1.38 より，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ （$\boldsymbol{x}_1 \in U$，$\boldsymbol{x}_2 \in$ Ker $\boldsymbol{A}$）と一意に書くことができ，$f(\boldsymbol{x}_1) \in$ Im f，$f(\boldsymbol{x}_2) \in$ Im f なので

$$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) \in \mathrm{Im}\ f$$

を得る．すなわち，Im $\boldsymbol{A} \subset$ Im f である．よって Im $\boldsymbol{A} =$ Im f となり，全射である．さらに $f: U \to W: \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ の核 Ker f は Ker $f = \{\mathbf{0}\}$ なので，定理 1.44 より単射である． □

系 2.29 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}^* = \mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}$$

が成立する．

証明． 定理 1.39，定理 2.27 より

$$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}^* = \dim(\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}^*) = n - \dim(\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A})$$

一方，次元定理 1.45 より

$$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A} = \dim(\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}) = n - \dim(\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A})$$

なので，題意が成立． □

補題 2.30 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}) = \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}^*, \qquad \mathrm{Im}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$$

ならびに

$$\mathrm{rank}\ (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}) = \mathrm{rank}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}$$

が成立する．

証明． 前半が成立すれば後半は系 2.29 より直ちに従う．よって前半を考える．ある $\boldsymbol{y} =$ Ker $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)$ に対して，問 2.3 に注意すると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \ \Rightarrow\ \overline{\boldsymbol{y}}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y} = \mathbf{0} \ \Leftrightarrow\ \|\overline{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}}\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \|\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}\| = 0 \ \Leftrightarrow\ \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y} = 0$$

なので（上記は問 1.29 の別証明），定理 2.27 を用いると

$$\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) \subset \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}^* = (\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A})^\perp \tag{18}$$

を得る．最初の包含関係から $\left(\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)\right)^\perp \supset \left(\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}^*\right)^\perp$ であることに注意（問 2.5 参照）．さらに，定理 2.27 を用いると

$$\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \left(\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^*\right)^\perp = \left(\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)\right)^\perp \supset \left(\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^*)\right)^\perp = \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$$

なので Im $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) \supset$ Im $\boldsymbol{A}$ を得る．一方，定義より（問 1.29 参照）

$$\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m\} = \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^m\} \subset \{\boldsymbol{y} \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{z},\ \boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^n\} = \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$$

となり，逆の包含関係 Im $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) \subset$ Im $\boldsymbol{A}$ も成立するので，Im $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) =$ Im $\boldsymbol{A}$ を得る．Im $(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})$ に関しては $\boldsymbol{A}$ が与えられたときの Im $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)$ に対する結果を $\boldsymbol{A}^*$ へ適用すれば直ちに得られる． □

定義 2.31 (等長写像（その 1）) $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V から内積空間 W への線形写像 $f: V \to W$ が

$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V \tag{19}$$

を満たすとき，f は**等長写像** (distance preserving mapping) あるいは計量同型写像であるという．特に，$V = W$ のとき，f は**等長変換** (distance preserving transformation) あるいは計量同型変換であるという．

定義 2.32 (等長写像（その 2）) 内積空間 V から内積空間 W への線形写像 $f\colon V \to W$ が

$$\|f(\boldsymbol{x})\| = \|\boldsymbol{x}\|, \qquad \boldsymbol{x} \in V \tag{20}$$

を満たすとき，f は**等長写像**であるという．特に $V = W$ のとき，f は**等長変換**であるという．

これら二つの定義が同一のものであることは以下のようにして示される．式 (19) が成立するならば，

$$\|f(\boldsymbol{x})\| = \sqrt{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x}))} = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})} = \|\boldsymbol{x}\|$$

である．逆に，式 (20) が成立するならば，$\|f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})\| = \|f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})\| = \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|$ が成立するので，この式の両辺を 2 乗して，$(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y})$ も成立する．ここで左辺は

$$(f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})) = (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) + (f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})) + (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y}))$$

右辺は

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$$

であり，(20) より $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$，$(f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ なので

$$(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + (f(\boldsymbol{y}), f(\boldsymbol{x})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$$

を得る．ここで 右辺，左辺，それぞれの 2 項は複素共役なので $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の実部は等しい．また，$\boldsymbol{x}$ を $i\boldsymbol{x}$ に置き換えたものに対して同じ計算を行うと

$$(f(i\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) + (f(\boldsymbol{y}), f(i\boldsymbol{x})) = (i\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, i\boldsymbol{x})$$

が得られ，$(f(\boldsymbol{y}), f(i\boldsymbol{x})) = \overline{(f(i\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))} = \overline{i(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))} = -i\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$，$(\boldsymbol{y}, i\boldsymbol{x}) = \overline{(i\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})} = -i\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}$ 等に注意すると

$$i\big[(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y})) - \overline{(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))}\big] = i\big[(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}\big]$$

を導くことができる．これから $(f(\boldsymbol{x}), f(\boldsymbol{y}))$，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ の虚部が等しいことが分かる． □

系 2.33 $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V，W に対して $f\colon V \to W\colon \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ が等長写像であるならば，単射である．さらに $\dim V = \dim W$ ならば f は同型写像である．

証明． $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を満たす $\boldsymbol{x} \in V$ に対して，$\|\boldsymbol{x}\| = \|f(\boldsymbol{x})\| = 0$ なので $\mathrm{Ker}\, f = \{\boldsymbol{0}\}$．よって，定理 1.44 より f は単射．さらに，$\dim V = \dim W$ のとき，次元定理 1.45 より $\dim(\mathrm{Im}\, f) + \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim V = \dim W$ が成立するので $\dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim W$ を得る．よって定理 1.44 より，f は全射でもある． □

定理 2.34 (正規直交基底の等長変換) $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 V 上の等長変換 $f\colon V \to V$ と V の正規直交基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ に対して，$f(\boldsymbol{v}_1), f(\boldsymbol{v}_2), \ldots, f(\boldsymbol{v}_n)$ も V の正規直交基底となる．

証明．

$$(f(\boldsymbol{v}_i), f(\boldsymbol{v}_j)) = (\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

ならびに $\|f(\boldsymbol{v}_i)\| = \|\boldsymbol{v}_i\| = 1$ より題意が示される． □

次に，標準内積を入れた n 次元内積空間 $\mathbb{C}^n$ 上の線形変換 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ が等長変換となるのはどのようなときか，を考える．

定義 2.35 正方行列 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ を満たすとき，$\boldsymbol{A}$ を**ユニタリ行列** (unitary matrix) という．特に $\boldsymbol{A}$ が実行列の場合，**直交行列** (orthogonal matrix) という．

系 2.36 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \ldots\ \boldsymbol{a}_n)$ がユニタリ行列であることと，

$$(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_j) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{21}$$

であることは等価である．

証明． 一般に

$$\overline{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}^\top \overline{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_n) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2) & \cdots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix}$$

が成立する．もし $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ は $\overline{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}} = \overline{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I}$ と等価なので，上式より式 (21) を得る．逆に，式 (21) が成立するならば，上式より $\overline{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{I} = \overline{\boldsymbol{I}}$，すなわち，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ を得る． □

定理 2.37 (等長変換とユニタリ行列) 標準内積を入れた $\mathbb{C}$ 上の n 次元内積空間 $\mathbb{C}^n$ における線形変換 $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ に対して

(i) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ が成立する．

(ii) 任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$ が成立する．

(iii) 任意のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ が成立する．

は同値である．

証明． (ii) と (iii) は等長写像の定義そのものであり，等価であることは既に示した．よって，以下では (i) ⇒ (ii) と (iii) ⇒ (i) を示す．まず，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$ ならば

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\|^2 = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x})^\top \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}^\top \overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^\top (\overline{\boldsymbol{A}}^\top \boldsymbol{A})^\top \overline{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^\top \overline{\boldsymbol{x}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

なので，(i) ⇒ (ii) が成立．また，$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ ならば，任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ に対して，定理 2.26 に注意すると

$$(\boldsymbol{x}, (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$$

を得る．これが任意の $\boldsymbol{x}$ に対して成立するので，$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ でなければならず，さらに，$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ が任意の $\boldsymbol{y}$ について成立するので，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{O}$ を得る． □

注意 2.38 定理 2.37 より，等長変換の表現行列はユニタリ行列である．これより，等長変換はユニタリ変換とも呼ばれる．同様に，体が実数体である場合，等長変換は直交変換とも呼ばれる（定義 2.35 参照）．

例 2.39 (n 次以下のフーリエ級数)

(i) $2n+1$ 個の関数 $1, \cos kx, \sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ の実数による線型結合の全体を V とすれば，V は $\mathbb{R}$ 上の $2n+1$ 次元線形空間である．

(ii) さらに，V 内の二つの関数 ϕ, ψ に対して，内積 (ϕ, ψ) を

$$(\phi, \psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$

と定義すれば，V は実内積空間である（確認せよ）．

(iii) 任意の実数 c に対して「平行移動」$T_c\colon V \to V\colon \phi(x) \mapsto \phi(x+c)$，すなわち，

$$(T_c\phi)(x) = \phi(x+c)$$

を定義すれば，T_c は V の線形変換である．実際，

$$\cos k(x+c) = \cos kc \cos kx - \sin kc \sin kx, \qquad \sin k(x+c) = \sin kc \cos kx - \cos kc \sin kx \tag{22}$$

なので，V 内の関数は平行移動後も V 内に留まる．線形性はほぼ自明．

(iv) 平行移動 T_c は等長変換である．実際，

$$(T_c\phi, T_c\psi) = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x+c)\psi(x+c)\mathrm{d}x = \int_{-\pi+c}^{\pi+c} \phi(x)\psi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\psi(x)\mathrm{d}x = (\phi, \psi)$$

が成立する．

(v) V の正規直交基底は以下のように得られる．まず，

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \sin \ell x \mathrm{d}x = 0$$

であり，$k \neq \ell$ ならば

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos \ell x \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \sin \ell x \mathrm{d}x = 0$$

なので，$2n+1$ 個の関数 $1, \cos kx, \sin kx$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ は互いに直交する．さらに

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1\mathrm{d}x = 2\pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx \mathrm{d}x = \pi, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 kx \mathrm{d}x = \pi$$

なので，

$$\boldsymbol{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \qquad \boldsymbol{e}_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx, \qquad \boldsymbol{e}_{2k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

とおけば，$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}]$ は V の正規直交基底である．

(vi) 最後に，基底 $\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{2n}]$ に対する平行移動 T_c の表現行列 $\boldsymbol{A}$ は式 (22) より

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \begin{matrix} \cos c & \sin c \\ -\sin c & \cos c \end{matrix} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} & \begin{matrix} \cos 2c & \sin 2c \\ -\sin 2c & \cos 2c \end{matrix} & \cdots & \boldsymbol{O} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \begin{matrix} \cos nc & \sin nc \\ -\sin nc & \cos nc \end{matrix} \end{pmatrix}$$

で与えられる．

2.2 射影

この節では，線形変換の特別な場合である射影について論じる．

定義 2.40 (射影（その 1）) $\mathbb{C}$ 上の線形空間 V の線形部分空間 W，U が $V = W \oplus U$ を満たすとき（定義 1.38 参照），V の任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'', \qquad \boldsymbol{x}' \in W, \ \ \boldsymbol{x}'' \in U$$

と一意に表現できる．このとき，写像 $f\colon\ V \to V\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}'$ を V の U に沿っての W 上への**射影** (projection) という．

問 2.9 V の U に沿っての W への射影 f は線形変換であり，かつ，全射であることを示せ．

問 2.10 I を恒等変換 (identity transformation)，すなわち，$I\colon\ V \to V\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$ とする．このとき，$f\colon\ V \to V\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$ が V の U に沿っての W 上への射影であるならば，$I - f\colon\ V \to V\colon\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x})$ は V の W に沿っての U 上への射影であることを示せ．

定義 2.41 (射影（その 2）) 線形変換 $f\colon V \to V$ が $f^2 = f \circ f = f$ を満たすとき，f を（Ker f に沿っての Im f 上への）射影という．

射影に関する二つの定義が等価であることは以下のようにして示される．まず，定義 2.40 に従う射影 f に対して，$f^2(\boldsymbol{x}) = f \circ f(\boldsymbol{x}) = f(f(\boldsymbol{x})) = f(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}' = f(\boldsymbol{x})$ が成立するので，$f^2 = f$ である．逆は次の定理の (iii) から従う．

定理 2.42 (射影における像と核) 線形変換 $f\colon V \to V$ が $f^2 = f$ を満たすならば

(i) $\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Im}\ (I - f)$

(ii) $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Ker}\ (I - f)$

(iii) $V = \mathrm{Im}\ f \oplus \mathrm{Ker}\ f$

が成立する．

証明． 最初に (i) を考える．もし $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ f$ ならば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) = (I - f)(\boldsymbol{x})$ となり，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\ (I - f)$ である．逆に，もし $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\ (I - f)$ ならば，ある $\boldsymbol{y} \in V$ が存在し，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{y})$ が成立する．よって，$f(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{y} - f(\boldsymbol{y})) = f(\boldsymbol{y}) - f(f(\boldsymbol{y})) = f(\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ f$ である．以上より，$\mathrm{Ker}\ f = \mathrm{Im}\ (I - f)$．(ii) は (i) と同様に示すことができる．最後に (iii) を示す．任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}) + (I - f)(\boldsymbol{x})$ なので，(i) に注意すると，$V = \mathrm{Im}\ f + \mathrm{Ker}\ f$ である．よって，$\mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f = \{\boldsymbol{0}\}$ を示せば良い（定理 1.39 (ii) 参照）．今，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f$ であるとすると，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\ f$ なので，$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{y})$ なる $\boldsymbol{y} \in V$ が存在する．よって $\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{y}) = f(f(\boldsymbol{y})) = f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ を得る（最後の等号は $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ f$ より従う）．以上より，$\mathrm{Im}\ f \cap \mathrm{Ker}\ f = \{\boldsymbol{0}\}$．
□

問 2.11　定理 2.42 (ii) を証明せよ．

定義 2.43 (射影行列) $\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}$ を満たす行列を**射影行列** (projection matrix) という．

定義 2.44 (正射影) $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V おける線形部分空間 W に対して，U を W の直交補空間（$U = W^{\perp}$，定義 2.18 参照）とした場合の W への射影を, **正射影** あるいは**直交射影** (orthogonal projection) という．

定義 2.45 (対称変換) 線形変換 $P\colon V \to V\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ が

$$(\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}), \quad \forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$$

を満たすとき，線形変換 P は**エルミート変換** (Hermitian transformation) と呼ばれる．特に，$\boldsymbol{P}$ が実行列のとき，線形変換 P は**対称変換** (symmetric transformation) と呼ばれる．

注意 2.46 P がエルミート変換であるための条件は $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^*$，すなわち $\boldsymbol{P}$ がエルミート行列であることと等価である（定理 2.26 参照）．特に $\boldsymbol{P}$ が実行列ならば，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\top}$ である．すなわち，実行列 $\boldsymbol{P}$ が対称行列ならば，線形変換 $\boldsymbol{P}\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ は対称変換と呼ばれる．

定理 2.47 (直交射影であるための必要十分条件) 内積空間 V 上の線形変換 f が線形部分空間 W への直交射影となるための必要十分条件は，$f^2 = f$，かつ，f が対称変換であること，すなわち，$f\colon \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$ としたとき，

$$\boldsymbol{P}^2 = \boldsymbol{P}, \qquad \boldsymbol{P}^* = \boldsymbol{P}$$

となることである．

証明． 以下では，V のベクトル $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ を

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{x}'', \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y}'', \qquad \boldsymbol{x}', \boldsymbol{y}' \in W,\ \ \boldsymbol{x}'', \boldsymbol{y}'' \in W^{\perp}$$

と表す．P が W への射影ならば $\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{x}'$ である．ここで，特に $\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{0}\in W^{\perp}$ とすると $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{Px}'$ を得る．よって，$\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{Px})=\boldsymbol{Px}'=\boldsymbol{x}'$ より $\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Px}$ を得る．すなわち，$(\boldsymbol{P}^2-\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ が任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して成立する．よって，$\boldsymbol{P}^2-\boldsymbol{P}=\boldsymbol{O}$ を得る．$\boldsymbol{P}^2=\boldsymbol{P}$ ならば P が射影を表すことは省略する（定理 2.42 の証明を参照せよ）．次に $\boldsymbol{P}^*=\boldsymbol{P}$ を示す．まず，

$$(\boldsymbol{Px},\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'+\boldsymbol{y}'')=(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')+(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}'')=(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{y}')=(\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{y}')=(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Py})$$

が任意の $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ に対して成立するので，定理 2.26 より $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^*$．逆に $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^*$ が成立するならば，$W=\mathrm{Im}\ P$ としたとき，$\boldsymbol{x}'\in W$ ならば，ある $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Px}$ なので，$\boldsymbol{Px}'=\boldsymbol{P}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{x}'$ となる．また，$\boldsymbol{x}''\in W^{\perp}$ ならば，$W=\mathrm{Im}\ P$ より，任意の $\boldsymbol{y}\in V$ に対して定理 2.26 を用いると $(\boldsymbol{Px}'',\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{P}^*\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x}'',\boldsymbol{Py})=0$ が任意の $\boldsymbol{y}\in V$ について成立することが分かる．よって $\boldsymbol{Px}''=\boldsymbol{0}$ である．この結果，任意の $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}''$ $(\boldsymbol{x}'\in W,\boldsymbol{x}''\in W^{\perp})$ に対して，$\boldsymbol{Px}=\boldsymbol{Px}'+\boldsymbol{Px}''=\boldsymbol{x}'$． □

補題 2.48 $\mathbb{C}$ 上の内積空間 V の線形部分空間 W への正射影行列を $\boldsymbol{P}$ とする．このとき，$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}$ は $W^{\perp}$ への正射影行列である．

証明． 定理 2.19 より $V=W\oplus W^{\perp}$ である．よって，任意の $\boldsymbol{x}\in V$ に対して $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}''$，$\boldsymbol{x}'\in W$，$\boldsymbol{x}''\in W^{\perp}$ なる $\boldsymbol{x}'$，$\boldsymbol{x}''$ が一意に定まり，

$$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{Px}'-\boldsymbol{Px}''=\boldsymbol{x}'+\boldsymbol{x}''-\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{0}=\boldsymbol{x}''$$

となる． □

補題 2.49 $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=n$ のとき，正方行列 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ は正則である．同様に，$m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=m$ のとき，正方行列 $\boldsymbol{AA}^*$ は正則である．

証明． $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ は $n\times n$ 行列であり，もし $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=n$ ならば，補題 2.30 より $\mathrm{rank}\ (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})=\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=n$ を得る．同様に，$\boldsymbol{AA}^*$ は $m\times m$ 行列であり，もし $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=m$ ならば，補題 2.30 より $\mathrm{rank}\ (\boldsymbol{AA}^*)=\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=m$ を得る． □

定理 2.50 (列フルランク，行フルランクの場合の正射影行列) $m\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ が $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=n$ のとき，$\mathbb{C}^m$ の $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ への正射影行列は

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*$$

で与えられる．同様に $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=m$ のとき，$\mathbb{C}^n$ の $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}^*$ への正射影行列は

$$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{AA}^*)^{-1}\boldsymbol{A}$$

で与えられる．

証明． 階数の定義 1.48 から $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=\dim(\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A})$ である．また，$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=n$ は $\boldsymbol{A}$ が列フルランク（列ベクトルが線形独立）であることを示している．よって，補題 2.49 より，$n\times n$ 行列 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ は正則であり，逆行列が存在する．今，ある $\boldsymbol{x}'\in\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}\subset\mathbb{C}^m$ に対して $\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{Ay}$ となる $\boldsymbol{y}\in\mathbb{C}^n$ が存在し，

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}'=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{Ay})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ay}=\boldsymbol{x}'$$

となる．一方，$\boldsymbol{x}''\in(\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A})^{\perp}\subset\mathbb{C}^m$ に対しては，定理 2.27 より $(\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A})^{\perp}=\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}^*$ なので，$\boldsymbol{x}''\in\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}^*$ である．よって，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}''=\boldsymbol{0}$ を得る．後半の証明は $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}^*=\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}$ （系 2.29 参照）と $(\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}^*)^{\perp}=\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$ （定理 2.27 参照）に注意して，$\boldsymbol{A}$ の代わりに $\boldsymbol{A}^*$ として同じ議論を行えば良い． □

問 2.12　定理 2.50 の後半を証明せよ．

2.3 線形方程式の解の存在条件

$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ と m 次元ベクトル $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$ に対して，以下の線形方程式を考える．

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \tag{23}$$

定理 2.51 (線形方程式の可解条件) 線形方程式 (23) の解が存在するための必要十分条件は $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ であり，これは

$$\mathrm{rank}\ [\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\ [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}$$

と等価である．ただし $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m)$.

証明． 式 (23) を $\mathbb{C}^n$ から $\mathbb{C}^m$ への線形写像と見れば，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ が必要十分であることは明らか．一般には $\mathrm{span}\ \boldsymbol{A} \subset \mathrm{span}\ [\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}]$ であるが，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ ならば，$\boldsymbol{b}$ は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線型結合で表現できるため

$$\mathrm{span}\ \boldsymbol{A} = \mathrm{span}\ [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m] = \mathrm{span}\ [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m, \boldsymbol{b}]$$

であり，$\boldsymbol{b}$ を加えても $\boldsymbol{A}$ の列ベクトルで張られる空間は拡大しない（系 1.36 参照）．逆に $\mathrm{rank}\ [\boldsymbol{A}\ \boldsymbol{b}] = \mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}$ ならば，b は $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ の線形結合で表現されるので，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ である． □

定理 2.52 (線形方程式の解空間) 線形方程式 (23) の解 $\boldsymbol{x}^\dagger$ が存在すると仮定する．このとき，全ての解からなる空間 S は

$$S = \{\boldsymbol{x}^\dagger\} + \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{x}^\dagger + \boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}\}$$

で与えられる．

証明． $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{b}$ を満たす任意の $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^\dagger$ とすると，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^\dagger + \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ となるので，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$，すなわち，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$ を得る．逆に，$\boldsymbol{y} \in S$ ならば $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x}^\dagger \in \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$ なので $\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^\dagger + \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^\dagger + \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^\dagger = \boldsymbol{b}$ である． □

系 2.53 (線形方程式の解の一意性) 線形方程式 (23) の解が一意であるための必要十分条件は $\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{0}\}$ である．特に $m = n$ の場合，$\boldsymbol{A}$ が正則（すなわち，$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A} = n$）であることが必要十分条件である．

証明． 前半は定理 2.52 から直ちに従う．後半は，階数の定義 1.48 と次元定理 1.45 に注意すると，$n \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，$\dim V = n$ なので

$$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A} = n \ \Leftrightarrow\ \mathrm{rank}\ (\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}) = n \ \Leftrightarrow\ \dim(\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}) = n \ \Leftrightarrow\ \dim(\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}) = 0 \ \Leftrightarrow\ \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{0}\}$$

であることから従う． □

2.4 一般化逆行列と線形方程式の陽な解

前節の系 2.53 で論じたように，$\boldsymbol{A}$ が正則な正方行列であるならば線形方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の唯一解 $\boldsymbol{x}^\dagger$ は $\boldsymbol{x}^\dagger = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$ で与えられる．一般には，$\boldsymbol{A}$ は正方行列とは限らず，また，正方行列であっても正則とは限らない．本節では，そのような場合の線形方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解について論じる．

定義 2.54 (一般化逆行列（その 1）) $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{A}^-$ を $n \times m$ 行列とする．任意の $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ に対して，$\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b}$ が

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

の解となるとき，$\boldsymbol{A}^-$ を $\boldsymbol{A}$ の**一般化逆行列**あるいは**一般逆行列** (generalized inverse matrix) という．

定義 2.55 (一般化逆行列（その 2）) $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

を満たす $n \times m$ 行列 $\boldsymbol{A}^{-}$ を $\boldsymbol{A}$ の**一般化逆行列**という．

この二つの定義が等価であることは以下のように示される．任意の $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ に対して，$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{b}$ が $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解となるとする．このとき，$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ とし，$\boldsymbol{E} = [\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n]$ を標準基底とすると，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i$ なので，全ての $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\boldsymbol{a}_i \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ である．そこで，$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}_i$ とすると $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{a}_i$ は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}_i$ の解となる．すなわち，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{a}_i) = \boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ が成立する．さらに $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i$ に注意すると

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

を得る．これは全ての i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ に対して $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ の第 i 番目の列ベクトルと $\boldsymbol{A}$ の第 i 番目の列ベクトルが等しいことを示しているため $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ を得る．逆に $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ が成立する場合，任意に選ばれた $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ に対して，ある $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ が $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ を満たすとすると，仮定より，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$，すなわち，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ が成立する．この式は，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解（の一つ）が $\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{b}$ で与えられることを示している． □

定義 2.55 より

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}, \qquad \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$$

が成立することが分かる．すなわち，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}$ は $\mathbb{C}^m$ 上の射影行列，$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ は $\mathbb{C}^n$ 上の射影行列となっている（定義 2.43 参照）．

補題 2.56 行列 $\boldsymbol{A}$ に対する一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^{-}$ に対して

$$\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} = \mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}) = \mathrm{Im}\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$$

が成立する．

証明． 1 番目の等号を考える．$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$，すなわち，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので $\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} \subset \mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$ である．逆に，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$，すなわち，$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば，定義 2.55 より $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ なので $\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}) \subset \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$ である．よって，$\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} = \mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$ を得る．次に 2 番目の等号を考える．$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ならば，$\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ なので，$\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}) \subset \mathrm{Im}\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$ である．一方，$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}$ なので，$\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ となる．そこで，任意の $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ に対して $\boldsymbol{y} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}$ とすれば $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$ かつ $\boldsymbol{O}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ なので，$\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}) \subset \mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$ を得る．よって，$\mathrm{Ker}\ (\boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A}) = \mathrm{Im}\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$． □

定理 2.57 (線形方程式の陽な解) $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A} \subset \mathbb{C}^m$ としたとき，線形方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$$

という形で，一般化逆行列を用いて陽に書き下される．

証明． 一般化逆行列の定義から，$\boldsymbol{x}^{\dagger} = \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{b}$ は線形方程式 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ の解である．任意の解は，定理 2.52 により，この $\boldsymbol{x}^{\dagger}$ に任意の $\boldsymbol{z} \in \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$ を加えたもので与えられる．補題 2.56 によれば，このような $\boldsymbol{z}$ は $\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})$ のベクトルであるので，

$$\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A} = \{\boldsymbol{z} \in \mathbb{C}^m \mid \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n\}$$

であり，$\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}$ の任意のベクトル $\boldsymbol{z}$ は適当な $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ を用いて，$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{-}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ と表現できる． □

2.5　一般化逆行列と擬似逆行列

$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対する一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ は，線形方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ において，解が存在する，すなわち，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ であるような $\boldsymbol{b}$ が与えられたとき，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{x}$ のうち，一つを $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b}$ として与える．しかし，一つの $\boldsymbol{b}$ に対して，一般に線形方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解空間 S（定理 2.52 参照）の次元は 1 以上（すなわち $\dim(\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}) \geq 1$）であり，無数の解 $\boldsymbol{x}$ が存在するため，どのような解を選択するかに関して自由度がある．通常，考えられている選択基準として，以下で述べる最小ノルム型と最小 2 乗型がある．なお，$\boldsymbol{A}$ は $m \times n$ 行列であり，標準内積を想定する．

2.5.1　最小ノルム型一般化逆行列

一般化逆行列の中で，$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解 $\boldsymbol{x}^\dagger = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b}$ のノルム

$$\|\boldsymbol{x}^\dagger\| = \sqrt{(\boldsymbol{x}^\dagger, \boldsymbol{x}^\dagger)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_i^\dagger \overline{x}_i^\dagger}$$

が最小となる $\boldsymbol{A}^-$ を最小ノルム型一般化逆行列という．

定理 2.58 (最小ノルム型であるための必要十分条件) 一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ が最小ノルム型であることは

$$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \qquad (\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} \tag{24}$$

が成立することと等価である．

証明． $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A} \subset \mathbb{C}^m$ としたとき，定理 2.57 より，線形方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n)$ で与えられる．ただし $\boldsymbol{A}^-$ は $\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ を満たす．今，$\boldsymbol{x}^\dagger = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b}$ としたとき，$\boldsymbol{A}^-$ が最小ノルム型一般化逆行列であるということは

$$\|\boldsymbol{x}^\dagger + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}\|^2 - \|\boldsymbol{x}^\dagger\|^2 \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n \tag{25}$$

が成立することと等価である．以下では $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ とする．このとき，式 (25) の左辺は，定理 2.26 を用いると

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{x}^\dagger + \boldsymbol{By}\|^2 - \|\boldsymbol{x}^\dagger\|^2 &= (\boldsymbol{x}^\dagger + \boldsymbol{By}, \boldsymbol{x}^\dagger + \boldsymbol{By}) - \|\boldsymbol{x}^\dagger\|^2 = (\boldsymbol{x}^\dagger, \boldsymbol{By}) + (\boldsymbol{By}, \boldsymbol{x}^\dagger) + \|\boldsymbol{By}\|^2\\ &= (\boldsymbol{x}^\dagger, \boldsymbol{By}) + \overline{(\boldsymbol{x}^\dagger, \boldsymbol{By})} + \|\boldsymbol{By}\|^2 = 2\mathrm{Re}\big((\boldsymbol{x}^\dagger, \boldsymbol{By})\big) + \|\boldsymbol{By}\|^2 = 2\mathrm{Re}\big((\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}^\dagger, \boldsymbol{y})\big) + \|\boldsymbol{By}\|^2\end{aligned}$$

となるので，$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}^\dagger = \boldsymbol{0}$ ならば，$\|\boldsymbol{x}^\dagger + \boldsymbol{By}\|^2 - \|\boldsymbol{x}^\dagger\|^2 = \|\boldsymbol{By}\|^2 \geq 0$ となり，式 (25) が成立する．以上の議論から，$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}^\dagger = \boldsymbol{0}$，すなわち $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ $(\forall \boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A})$ が成立すれば良く，逆にこれが成立すれば，式 (25) が成立することが分かる．$\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ であるならば $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b}$ となる $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$ が存在するので，最小ノルム型であるための条件は

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{0}, \quad \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$$

すなわち

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O} \tag{26}$$

である．この等式は $(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ と等価であり，左辺はエルミート行列なので（式 (17) ならびにその直後のコメント参照），右辺もエルミート行列となり $(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ を得る．

逆に，式 (24) が成立するならば，

$$(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^-(\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$$

となり，式 (26) が成立する．後は，上記の議論をを逆にたどれば，式 (25) が成立することが示されるので，省略する． □

既に述べたように，任意の一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ に対して，$\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ は $\mathbb{C}^n$ 上の射影行列であり，定理 2.58 の 2 番目の制約は $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ が $\mathbb{C}^n$ 上の正射影であることを示している（定理 2.47 参照）．さらに

$$\text{Ker } \boldsymbol{A} = \text{Ker } (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}) \supset \text{Ker } (\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}) \supset \text{Ker } \boldsymbol{A}$$

より（問 1.29 参照），$\text{Ker } (\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}) = \text{Ker } \boldsymbol{A}$ を得る．よって，$(\text{Ker } \boldsymbol{A})^\perp = \text{Im } \boldsymbol{A}^*$ （定理 2.27 参照）を考慮すると，$\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ は $\mathbb{C}^n$ の $\text{Ker } \boldsymbol{A}$ に沿った $\text{Im } \boldsymbol{A}^*$ への正射影行列であることが分かる．$\boldsymbol{A}$ に対する最小ノルム型一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ は一意に定まらないが，$\mathbb{C}^n$ の $\text{Im } \boldsymbol{A}^*$ への正射影行列 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ は一意に定まることに注意する（$\text{rank } \boldsymbol{A} = m$ の場合は定理 2.50 で $\boldsymbol{P}$ を明示的に与えた）．

2.5.2　最小 2 乗型一般化逆行列

一般化逆行列の中で，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$（$\boldsymbol{b} \notin \text{Im } \boldsymbol{A}$ を含む）が与えられたとき，誤差のノルムの 2 乗

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2$$

が最小となる，すなわち，最小 2 乗解を与えるものを最小 2 乗型一般化逆行列という．定義から，$\boldsymbol{b} \in \text{Im } \boldsymbol{A}$ の場合には $\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 = 0$ でなければならないことに注意する．

定理 2.59 (最小 2 乗型であるための必要十分条件) 一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ が最小 2 乗型であることは

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \qquad (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- \tag{27}$$

が成立することと等価である．

証明． $\boldsymbol{A}$ を $m \times n$ 行列，$\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$ としたとき，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ を満たす $\boldsymbol{A}^-$ が最小 2 乗型一般化逆行列であるということは $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ に対して $\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b}$ が最小 2 乗誤差を与えるということなので，

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\|^2 \geq 0, \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \tag{28}$$

が成立することと等価である．式 (28) の左辺は，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{y}$ とおくと

$$\|\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b} + \boldsymbol{y}) - \boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{b} - \boldsymbol{b}\|^2 = \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|^2 - \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b}\|^2$$

と書き直すことができる．よって，定理 2.58 の証明と同様に計算を進めると，

$$\|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|^2 - \|(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b}\|^2 = 2\text{Re}\big((\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b}, \boldsymbol{y})\big) + \|\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\|^2$$

が得られる．以上より，不等式 (28) が成立するためには，任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$ に対して $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- - \boldsymbol{I})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ が成立していれば良く，逆に，これが成立していれば，式 (28) が成立することが分かる．よって，$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{O}$，すなわち $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}^*$ であれば良いことになるが，これは

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

と等価である．この等式の両辺に右から $\boldsymbol{A}^-$ を掛けると $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ が成立することが分かる．ここで左辺はエルミート行列なので（式 (17) ならびにその直後のコメント参照），右辺もエルミート行列となり $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ を得る．

逆に，式 (27) が成立しているならば

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^*\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$$

が得られ，これは $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}^*$，すなわち $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^- - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{O}$ と等価である．後は，上記の議論を逆にたどれば良いので省略する．　□

定理 2.59 の 2 番目の制約は $\boldsymbol{AA}^-$ が $\mathbb{C}^n$ の正射影であることを示している（定理 2.47 参照）．さらに

$$\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A} = \mathrm{Im}\ (\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A}) \subset \mathrm{Im}\ (\boldsymbol{AA}^-) \subset \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$$

より（問 1.29 参照），$\mathrm{Im}\ (\boldsymbol{AA}^-) = \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ を得る．すなわち，$\boldsymbol{AA}^-$ は $\mathbb{C}^m$ の $\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{A}^*$ に沿った $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ への正射影行列である（定理 2.27 参照）．$\boldsymbol{A}$ に対する最小 2 乗型一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ は一意に定まらないが，$\mathbb{C}^m$ の $\mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ への正射影行列 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{AA}^-$ は一意に定まることに注意する（$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A} = n$ の場合は定理 2.50 で $\boldsymbol{P}$ を明示的に与えた）．

2.5.3 擬似逆行列

前節で述べたように，$\boldsymbol{A}$ に対する最小 2 乗型一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ は，必ずしも解をもつとは限らない線形方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ に対して，最小 2 乗解を与える．一般に最小 2 乗解は一意に定まらないため，最小 2 乗型一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ も一意に定まらない．そこで，最小 2 乗解の中でノルムが最小となる解を与える一般化逆行列を考える．ノルムが最小となる最小 2 乗解は（ほぼ）一意に定まるので，それを与える一般化逆行列も一意に定まることになる．このような一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は擬似逆行列，あるいは，Moore-Penrose の一般化逆行列と呼ばれている．

定義 2.60 (擬似逆行列) $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，

$$\text{(i)}\ \ \boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \qquad \text{(ii)}\ \ \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{AA}^+ = \boldsymbol{A}^+ \qquad \text{(iii)}\ \ (\boldsymbol{AA}^+)^* = \boldsymbol{AA}^+ \qquad \text{(iv)}\ \ (\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} \tag{29}$$

を満たす $n \times m$ 行列 $\boldsymbol{A}^+$ を**擬似逆行列** (pseudo inverse matrix) または **Moore-Penrose（ムーア-ペンローズ）の一般化逆行列**という．

注意 2.61 $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A}^-$ の一般化逆行列となるもの，すなわち，

$$\boldsymbol{AA}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{AA}^- = \boldsymbol{A}^-$$

が同時に成立するものを反射型一般化逆行列という．

定義から，擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は，一般化逆行列の性質 (i) と最小 2 乗型の性質 (iii) のみならず，最小ノルム型の性質 (iv)，反射型の性質 (ii) も同時に備えていることに注意する．

定理 2.62 最小 2 乗形一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ の中でノルムが最小となる解を与える一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は擬似逆行列である．すなわち，このような $\boldsymbol{A}^+$ は式 (29) の 4 条件を満たす．

証明． 最小 2 乗型一般化逆行列の中でノルムが最小となる解を与える一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は最小 2 乗型一般化逆行列の特殊な場合であるので

$$\boldsymbol{AA}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}, \qquad (\boldsymbol{AA}^+)^* = \boldsymbol{AA}^+$$

が成立する．定理 2.57 より線形方程式 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ の解は

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$$

と表現できるので，$\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$ が最小のノルムをもつということは

$$\|\boldsymbol{x}^+\|^2 \le \|\boldsymbol{x}^+ + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}\|^2, \quad \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n \tag{30}$$

と等価である．節 2.5.1 で与えた最小ノルム型一般化逆行列での議論では $\boldsymbol{b} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}$ であったが，ここでは $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$ であることに注意する．表記の簡単化のため $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$ とおき，定理 2.26 を用いると

$$\|\boldsymbol{x}^+ + \boldsymbol{By}\|^2 - \|\boldsymbol{x}^+\|^2 = (\boldsymbol{x}^+ + \boldsymbol{By}, \boldsymbol{x}^+ + \boldsymbol{By}) - \|\boldsymbol{x}^+\|^2 = (\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{By}) + (\boldsymbol{By}, \boldsymbol{x}^+) + \|\boldsymbol{By}\|^2$$

$$= (\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{By}) + \overline{(\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{By})} + \|\boldsymbol{By}\|^2 = 2\mathrm{Re}\big((\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{By})\big) + \|\boldsymbol{By}\|^2 = 2\mathrm{Re}\big((\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}^+, \boldsymbol{y})\big) + \|\boldsymbol{By}\|^2$$

となるので，$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{0}$ ならば，$\|\boldsymbol{x}^+ + \boldsymbol{By}\|^2 - \|\boldsymbol{x}^+\|^2 = \|\boldsymbol{By}\|^2 \geq 0$ となり，式 (30) が成立する．以上の議論から，$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{x}^+ = \boldsymbol{0}$，すなわち，

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$$

が任意の $\boldsymbol{b} \in \mathbb{C}^m$ について成立すれば良く，逆にこれが成立していれば，式 (30) も成立することが分かる．この条件は $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{O}$ を意味しており，

$$(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^+ \tag{31}$$

を得る．式 (31) が，最小ノルム型ならびに反射型の一般化逆行列を特徴づける性質

$$(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}, \qquad \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^+ \tag{32}$$

を同時に満たすことと等価であることは，以下のように示される．式 (32) が成立するならば，式 (32) の 1 番目の等式の両辺に右から $\boldsymbol{A}^+$ を掛け，2 番目の等式を用いれば，式 (31) が得られる．逆に，式 (31) が成立するならば，式 (31) の両辺に右から $\boldsymbol{A}$ を掛けると

$$(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$$

を得る．この式の左辺はエルミート行列であるのでよって，この式の右辺 $\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$ もエルミート行列であることが分かる（式 (17) ならびにその直後のコメント参照）．すなわち，$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$ とすると上式は $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$ であるので

$$(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{B}^* = (\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{B}^*)^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}$$

となり，式 (32) の 1 番目の等式が得られる．さらに，これを式 (31) に代入して，式 (32) の 2 番目の等式を得る．

□

定理 2.63 (擬似逆行列の一意性) 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は一意に定まる．

証明． もし，二つの行列 $\boldsymbol{A}_1^+$，$\boldsymbol{A}_2^+$ が共に式 (29) の 4 条件を満たしているならば

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_1^+ &= \boldsymbol{A}_1^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^+ = (\boldsymbol{A}_1^+\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}_1^+)^*\boldsymbol{A}_1^+ = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^+\boldsymbol{A})^*(\boldsymbol{A}_1^+)^*\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}_2^+)^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}_1^+)^*\boldsymbol{A}_1^+ \\
&= \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}_2^+)^*(\boldsymbol{A}_1^+\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}_2^+)^*\boldsymbol{A}_1^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}_2^+)^*\boldsymbol{A}_1^+ = (\boldsymbol{A}_2^+\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}_2^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}_2^+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^+)^* \\
&= \boldsymbol{A}_2^+(\boldsymbol{A}_1^+)^*\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}_2^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^+(\boldsymbol{A}_1^+)^*\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}_2^+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^+)^*(\boldsymbol{A}_1^+)^*\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}_2^+(\boldsymbol{A}_2^+)^*\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}_1^+)^*\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}_2^+(\boldsymbol{A}_2^+)^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^+\boldsymbol{A})^* \\
&= \boldsymbol{A}_2^+(\boldsymbol{A}_2^+)^*\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}_2^+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^+)^* = \boldsymbol{A}_2^+\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^+ = \boldsymbol{A}_2^+
\end{aligned}$$

より，$\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}_2^+$ となる．□

以下では，擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ の構成法について述べる．まず，行列 $\boldsymbol{A}$ が行または列に関してフルランクの場合，以下のような結果が知られている．

補題 2.64 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ が $\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A} = m$ であるならば，$\boldsymbol{A}$ の最小ノルム型一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ は一意に定まり，$\boldsymbol{A}^- = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ で与えられる．

証明． $\boldsymbol{A}^-$ が最小ノルム型一般化逆行列であれば，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^-)^*$ が成立する（定理 2.58 参照）．今，$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A} = m$ なので，補題 2.49 より，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ は正則であり，

$$(\boldsymbol{A}^-)^* = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}$$

が成立する．よって，$(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ （問 2.6 参照）に注意すると

$$\boldsymbol{A}^- = \big((\boldsymbol{A}^-)^*\big)^* = \big((\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}\big)^* = \boldsymbol{A}^*\big((\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}\big)^* = \boldsymbol{A}^*\big((\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^*\big)^{-1} = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}$$

となり，$\boldsymbol{A}^-$ は一意に定まる．□

既に述べたように，$\boldsymbol{A}^-$ が最小ノルム型一般化逆行列であるとき，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ は $\mathbb{C}^n$ の Im $\boldsymbol{A}^*$ への正射影行列であり，これは一意に定まる．特に rank $\boldsymbol{A} = m$ の場合，定理 2.50 より，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}$ となっており，上記の結果 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A}$ と整合している．

補題 2.65 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ が rank $\boldsymbol{A} = n$ であるならば，$\boldsymbol{A}$ の最小 2 乗型一般化逆行列 $\boldsymbol{A}^-$ は一意に定まり，$\boldsymbol{A}^- = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*$ で与えられる．

証明． $\boldsymbol{A}^-$ が最小 2 乗型一般化逆行列であるならば，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-)^*\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^-)^*\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ が成立する（定理 2.59 参照）．今，rank $\boldsymbol{A} = n$ なので，補題 2.49 より，$\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}$ は正則であり

$$(\boldsymbol{A}^-)^* = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}$$

が成立する．よって，$(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ （問 2.6 参照）に注意すると

$$\boldsymbol{A}^- = \big((\boldsymbol{A}^-)^*\big)^* = \big(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\big)^* = \big((\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\big)^*\boldsymbol{A}^* = \big((\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^*\big)^{-1}\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*$$

となり，$\boldsymbol{A}^-$ は一意に定まる． □

$\boldsymbol{A}^-$ が最小 2 乗型一般化逆行列であるとき，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ は $\mathbb{C}^m$ の Im $\boldsymbol{A}$ への正射影行列であり，これは一意に定まる．特に rank $\boldsymbol{A} = n$ の場合，定理 2.50 より，$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*$ となっており，上記の結果 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^-$ と整合している．

定理 2.66 (列フルランク，行フルランクの場合の擬似逆行列) $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して，

(i) rank $\boldsymbol{A} = m$ ならば，$\boldsymbol{A}$ の擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1} \tag{33}$$

で与えられる．

(ii) rank $\boldsymbol{A} = n$ ならば，$\boldsymbol{A}$ の擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は

$$\boldsymbol{A}^+ = (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^* \tag{34}$$

で与えられる．

証明． (i) は以下のようにして示される．$\boldsymbol{A}$ の擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は最小ノルム型一般化逆行列であり，rank $\boldsymbol{A} = m$ の場合，補題 2.64 より後者は $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}$ と一意に定まる．一方，擬似逆行列も一意に定まるので（定理 2.63 参照），これが $\boldsymbol{A}$ の擬似逆行列を与える．(ii) も同様に示すことができるので省略する． □

問 2.13 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して rank $\boldsymbol{A} = m$ のとき，式 (33) で与えられる $\boldsymbol{A}^+$ が式 (29) で与えられる擬似逆行列であるための 4 条件を満たしていることを確認せよ．

問 2.14 $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して rank $\boldsymbol{A} = n$ のとき，式 (34) で与えられる $\boldsymbol{A}^+$ が式 (29) で与えられる擬似逆行列であるための 4 条件を満たしていることを確認せよ．

注意 2.67 問 2.13，問 2.14 の解答でも触れたように，$m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ に対して

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}\big(\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}\big) = \boldsymbol{I} && (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* \text{ が正則，すなわち rank } \boldsymbol{A} = m \text{ のとき}) \\
&\big((\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*\big)\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} && (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A} \text{ が正則，すなわち rank } \boldsymbol{A} = n \text{ のとき})
\end{aligned}$$

が成立するので，もし $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}$ が存在するならば（補題 2.49 参照），$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}$，$(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^*$ はそれぞれ $\boldsymbol{A}$ の右逆行列，左逆行列である．

最後に，一般の場合の擬似逆行列を考える．

定義 2.68 (階数分解) $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ が rank $\boldsymbol{A} = r$ のとき，$m \times r$ 行列 $\boldsymbol{C}$ および $r \times n$ 行列 $\boldsymbol{D}$ によって

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}, \qquad \text{rank}\ \boldsymbol{C} = \text{rank}\ \boldsymbol{D} = r$$

が成立するとき,（最大）**階数分解** (rank decomposition) という.

定理 2.69 rank $\boldsymbol{A} = r$ をもつ $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数分解は必ず存在する.

証明. $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ の階数が r であるとする．注意 1.49 で述べたように

$$r = \text{rank}\ \boldsymbol{A} = \dim(\text{Im}\ \boldsymbol{A}) = \dim(\text{span}\ [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n])$$

である．そこで，$[\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_r]$ を Im $\boldsymbol{A}$ における任意の基底とすれば，各 $\boldsymbol{a}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ は適当なスカラー $d_{i,j}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ を用いて

$$\boldsymbol{a}_j = d_{1,j}\boldsymbol{c}_1 + d_{2,j}\boldsymbol{c}_2 + \cdots + d_{r,j}\boldsymbol{c}_r, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

と表現できる．そこで $m \times r$ 行列 $\boldsymbol{C}$ を $\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_r)$ とし，(i, j) 要素が $d_{i,j}$ で与えられる $r \times n$ 行列を $\boldsymbol{D}$ とすると $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}$ を得る．定義より，rank $\boldsymbol{C}$ = rank $\boldsymbol{A} = r$ である．よって，rank $\boldsymbol{D} = r$ を示せば良い.

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}$ の転置を取った $\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{D}^\top\boldsymbol{C}^\top$ を考える．まず，この式は，$\boldsymbol{A}^\top$ の各列ベクトルを $\boldsymbol{D}^\top$ の列ベクトルの線型結合で表現している，とみなすことができる．すなわち，span $[\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n] \in$ Im $\boldsymbol{D}^\top$ であるので，Im $\boldsymbol{A}^\top \subset$ Im $\boldsymbol{D}^\top$ を得る．よって rank $\boldsymbol{A}^\top \leq$ rank $\boldsymbol{D}^\top$ が成立する．さらに $\boldsymbol{D}^\top$ は $n \times r$ 行列なので rank $\boldsymbol{D}^\top \leq r =$ rank $\boldsymbol{A}$ である．よって rank $\boldsymbol{A}^\top \leq$ rank $\boldsymbol{A}$ を得る.

この $\boldsymbol{A}$ の階数に関する不等式を $\boldsymbol{A}^\top$ に対して適用すると rank $(\boldsymbol{A}^\top)^\top \leq$ rank $\boldsymbol{A}^\top$ が得られるが，$(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}$ なので，rank $\boldsymbol{A} \leq$ rank $\boldsymbol{A}^\top$ を得る．以上より，rank $\boldsymbol{A}^\top$ = rank $\boldsymbol{A} = r$ が成立する．さらに rank $\boldsymbol{A}^\top \leq$ rank $\boldsymbol{D}^\top \leq r$ なので rank $\boldsymbol{D}^\top = r$ となり，さらに rank $\boldsymbol{D}^\top$ = rank $\boldsymbol{D}$ なので rank $\boldsymbol{D} = r$ である. □

注意 2.70 定理 2.69 の証明において

$$\text{rank}\ \boldsymbol{A}^\top = \text{rank}\ \boldsymbol{A}$$

を導いた．一方，注意 1.49 より，rank $\boldsymbol{A}^\top$ は行列 $\boldsymbol{A}^\top$ における線形独立な列ベクトルの最大数であり，これは行列 $\boldsymbol{A}$ における線形独立な行ベクトルの最大数でもある．すなわち，行列 $\boldsymbol{A}$ における線形独立な行ベクトルの最大数は rank $\boldsymbol{A}$ に等しい．また，系 2.29 で示したように rank $\boldsymbol{A}^*$ = rank $\boldsymbol{A}$ なので rank $\boldsymbol{A}^\top$ = rank $\boldsymbol{A}$ = rank $\boldsymbol{A}^*$ = rank $\overline{\boldsymbol{A}}^\top$，すなわち，

$$\text{rank}\ \overline{\boldsymbol{A}} = \text{rank}\ \boldsymbol{A}$$

が成立することもわかる.

定理 2.71 (階数分解を用いた擬似逆行列) $m \times n$ 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数分解が $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}$ で与えられるとき，$\boldsymbol{A}$ の擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^*)^{-1}(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^* \tag{35}$$

で与えられる.

注意 2.72 行列 $\boldsymbol{A}$ の階数分解は必ず存在するが，一意ではない（定理 2.69 とその証明を参照）．一方，$\boldsymbol{A}$ の擬似逆行列 $\boldsymbol{A}^+$ は必ず存在し一意に定まる（定理 2.62 ならびに定理 2.63 参照）．すなわち，二通りの階数分解 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}_1\boldsymbol{D}_1$，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}_2\boldsymbol{D}_2$ に対して，式 (35) の左辺 $\boldsymbol{A}^+$ は同一である．それ故，式 (35) を擬似逆行列の定義とする場合もある.

証明. $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}$ と階数分解されることから $(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^*$ は $\boldsymbol{C}$ の左逆行列，$\boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^*)^{-1}$ は $\boldsymbol{D}$ の右逆行列となっている（注意 2.67 参照）．以下では，この条件下で，擬似逆行列の定義 2.60 にある 4 条件を満たす行列 $\boldsymbol{B}$ を求める．まず，条件 (i) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ より $\boldsymbol{C}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{D}$ であり，これに $\boldsymbol{C}$ の左逆行列を掛けると

$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{BC})\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}$ を得る．すなわち，$\boldsymbol{BC}$ は $\boldsymbol{D}$ の一般化逆行列である．さらに，条件 (iv) $(\boldsymbol{BA})^* = \boldsymbol{BA}$ より $((\boldsymbol{BC})\boldsymbol{D})^* = (\boldsymbol{BC})\boldsymbol{D}$ を得る．これは $\boldsymbol{BC}$ が最小ノルム型であることを示している．よって，補題 2.64 より

$$\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{DD}^*)^{-1}$$

を得る．一方，条件 (i) より $\boldsymbol{CDBCD} = \boldsymbol{CD}$ であったが，これに $\boldsymbol{D}$ の右逆行列を掛けると $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{DB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}$ を得る．すなわち，$\boldsymbol{DB}$ は $\boldsymbol{C}$ の一般化逆行列である．さらに，条件 (iii) $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{AB}$ より $(\boldsymbol{C}(\boldsymbol{DB}))^* = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{DB})$ を得る．これは $\boldsymbol{DB}$ が最小 2 乗型であることを示している．よって，補題 2.65 より

$$\boldsymbol{DB} = (\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^*$$

を得る．最後に条件 (ii) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BAB}$ と上記の結果を用いると

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{BAB} = \boldsymbol{BCDB} = \boldsymbol{D}^*(\boldsymbol{DD}^*)^{-1}(\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{C})^{-1}\boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{A}^+$$

を得る． □

参考文献

[1] 布川莫，中山弘隆，谷野哲三 (1991) 線形代数と凸解析，コロナ社
[2] 伊理正夫 (2009) 線形代数汎論，朝倉出版
[3] 磯野修 (1982) 一般逆行列の初等理論．一橋大学研究年報．自然科学研究，21, 3–80
[4] 木村達明 (2022) 大阪大学工学部電子情報工学科配当科目「情報通信数学 I」講義ノート
[5] 児玉慎三，須田信英 (1981) システム制御理論のためのマトリクス理論，コロナ社
[6] 室田一雄，杉原正顕 (2015) 東京大学工学教程　基礎系　数学　線形代数 I，丸善出版
[7] 室田一雄，杉原正顕 (2013) 東京大学工学教程　基礎系　数学　線形代数 II，丸善出版
[8] 齋藤正彦 (1966) 線形代数入門，東京大学出版社
[9] 谷野哲三 (2013) システム線形代数 —工学系への応用—，朝倉書店
[10] 階数因数分解 `https://ja.wikipedia.org/wiki/`階数因数分解，2023.9.29 確認
[11] 山本裕 (1988) システムと制御の数学，朝倉書店

A　群，環，体の定義

集合 S 上の２項演算 (binary operation)　$a, b \in S$ に対して，$c = a \circ b \in S$ を対応させるもの．例えば，実数 a, b の和 $a + b$ や積 $a \times b$ は実数上の 2 項演算．一般には，$a \circ b \neq b \circ a$ であることに注意する．$a \circ b = b \circ a$ であるとき，**可換** という．

乗法群 (multiplicative group)　集合 G が以下を満たすとする．

1. ２項演算 $\circ$ が存在する．
2. 結合法則 (associative law) $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ が任意の要素 $a, b, c \in G$ に対して成立する．
3. 全ての $a \in G$ に対して $e \circ a = a \circ e = a$ となる $e \in G$ が唯一，存在する．e を単位元という．
4. 各 $a \in G$ に対して，$a^{-1} \circ a = a \circ a^{-1} = e$ となる a^{-1} が唯一，存在する．a^{-1} を a の逆元という．

このとき，G は（演算 $\circ$ により乗法）群であるという．特に 2 項演算が可換である場合，可換群あるいは可換な乗法群と言う．なお，乗法群では，しばしば $\circ$ が省略される（ab は $a \circ b$ と等価）．

加群 (module)　可換な乗法群において，演算子 $\circ$ を $+$ とし，単位元を 0，$a \in G$ の逆元を $-a$ と記したものを加群という．加群は可換であるが，乗法群は一般には可換ではないことに注意．

環 (ring)　集合 R が以下を満たすとする．

1. R は加群である．

2. R において (i) 乗法で表される 2 項演算 $\circ$ が存在し，(ii) 任意の $a,b,c \in R$ に対して結合法則 $(a\circ b)\circ c = a \circ (b \circ c)$ が成立する．
3. 任意の $a,b,c \in R$ に対して，$a \circ (b+c) = a \circ b + a \circ c$，$(b+c)\circ a = ba + ca$ が成立する．

このとき，R は環と呼ばれる．特に，環 R において $a \circ b = b \circ a$ である場合，可換環という．

体 (field)　二つ以上の要素をもつ可換環 F において，0 以外の要素の集合 $F^\times = F \setminus \{0\}$ が乗法によって群をなすとき，F を体という．

B　練習問題の略解

問 1.1. $\mathbf{0}, \mathbf{0}'$ が共に零元であるならば，$\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$

問 1.2. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}'$ が共に $\boldsymbol{x}$ の逆元ならば，$\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}' + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}' + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{a}' + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}') + \boldsymbol{a} = \mathbf{0} + \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a} + \mathbf{0} = \boldsymbol{a}$

問 1.3. (iii), (iv) $\Rightarrow$ (iii'): 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ に対して $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{y} + (-\boldsymbol{x})$ とすると $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \big(\boldsymbol{y} + (-\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{x} + \big((-\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}\big) = \big(\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})\big) + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}$ であるので，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{z}$ は存在する．そこで，$\boldsymbol{z}'$ に対しても $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}' = \boldsymbol{y}$ が成立しているとすると $\boldsymbol{y} + (-\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}') + (-\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{z}' + \boldsymbol{x}) + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}' + \big(\boldsymbol{x} + (-\boldsymbol{x})\big) = \boldsymbol{z}' + \mathbf{0} = \boldsymbol{z}'$ となり，$\boldsymbol{z}' = \boldsymbol{y} + (-\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{z}$ である．
(iii') $\Rightarrow$ (iii): (iii') より任意の $\boldsymbol{x}$ に対して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}$ となる（一般には x に依存する）$\boldsymbol{z}$ が唯一定まる．また，任意の $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{w}$ が唯一定まる．よって $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{w}) + \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{w} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{w} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{y}$ より，任意の $\boldsymbol{y}$ に対して $\boldsymbol{z}$ は $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{y}$ を満たす．
(iii') $\Rightarrow$ (iv): 任意の $\boldsymbol{x}$ に対して，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ となる（$\boldsymbol{x}$ に依存する）$\boldsymbol{v}$ がただ一つ定まる．

問 1.4. 任意の $\boldsymbol{x} \in V$，$\alpha \in K$ に対して $\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x}$ とする．このとき，$\boldsymbol{y} = \alpha\boldsymbol{x} = \alpha(\boldsymbol{x} + \mathbf{0}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\mathbf{0} = \boldsymbol{y} + \alpha\mathbf{0}$ が成立するので，$\alpha\mathbf{0}$ は零元 $\mathbf{0}$ に等しい．

問 1.5. $0\boldsymbol{x} = (0+0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$ なので $0\boldsymbol{x}$ は零元 $\mathbf{0}$ に等しい．

問 1.6. $\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = \big(1 + (-1)\big)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ より $(-1)\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x}$ の逆元 $-\boldsymbol{x}$ に等しい．

問 1.7. 線形空間ではない．和を取ることで x^n の項が相殺し，$n-1$ 次以下になる場合がある．また，零元が n 次の複素係数多項式全体からなる集合に含まれていない．

問 1.8. (i), (ii) が成立するならば，$f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = f(\alpha\boldsymbol{x}) + f(\beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$ ．逆に，$f(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}) = \alpha f(\boldsymbol{x}) + \beta f(\boldsymbol{y})$ が成立するならば，$\alpha = \beta = 1$ とすれば (i) が得られ，$\beta = 0$ とすれば (ii) が得られる．

問 1.9. $f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0})$ となるため，零元の定義 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \mathbf{0}$ より $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}' \in W$

問 1.10. 単射の定義の対偶をとると，任意の $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ に対して $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2$ である．すなわち，任意の $\boldsymbol{y} \in \mathrm{Im}\ f$ に対して $\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$ となる $\boldsymbol{x} \in V$ が存在し，一意に定まる．もし，$\boldsymbol{y}_1 \neq \boldsymbol{y}_2$ かつ $\boldsymbol{y}_i = f(\boldsymbol{x}_i)$ $(i = 1,2)$ なる任意の $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}\ f$ に対して，$\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{x}$ であるならば，$\boldsymbol{x}$ の行き先が異なる $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2$ であることになり，f が写像であることと矛盾する．よって，$\boldsymbol{y}_1 \neq \boldsymbol{y}_2$ かつ $\boldsymbol{y}_i = f(\boldsymbol{x}_i)$ $(i = 1,2)$ なる任意の $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \mathrm{Im}\ f$ に対して，常に $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ であり，これは f^{-1} が単射な写像であることを示している．

問 1.11. (i) 恒等変換 $I:\ \boldsymbol{x} \mapsto \boldsymbol{x}$ が存在するので反射律が成立する．(ii) 全単射な写像 $f:\ V \to W$ が存在すれば，全単射な逆写像 $f^{-1}:\ W \to V$ も存在するので対称律が成立する．(iii) 同型写像 $f:\ V \to W:\ \boldsymbol{x} \mapsto f(\boldsymbol{x})$，$g:\ W \to U:\ \boldsymbol{y} \mapsto g(\boldsymbol{y})$ に対して，合成写像 $g \circ f:\ V \to U:\ \boldsymbol{x} \mapsto g(f(\boldsymbol{x}))$ を考える．f は全射なので，$\mathrm{Im}\ f = W$ である，よって，g は $g:\ \mathrm{Im}\ f \to U$ かつ $\mathrm{Im}\ g = U$ と書くことができる．よって $\mathrm{Im}\ g \circ f = \mathrm{Im}\ g = U$ となり全射である．また，f が単射であることから，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in V$ かつ $\boldsymbol{x}_1 \neq \boldsymbol{x}_2$ に対して $f(\boldsymbol{x}_1) \neq f(\boldsymbol{x}_2)$ であり，さらに g も単射であることから $g(f(\boldsymbol{x}_1)) \neq g(f(\boldsymbol{x}_2))$ が成立するので，合成写像 $g \circ f$ も単射である．

問 1.12. 線形関係 $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2=0$ が $(\alpha_1,\alpha_2)\neq(0,0)$ で成立するならば，$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+0\times\boldsymbol{x}_3=0$ も成立するので，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ は線形従属となり，仮定に矛盾する．よって，$(\alpha_1,\alpha_2)=(0,0)$ でなければならない．他の組合せも同様．逆が成り立たないことは，以下の反例から分かる．反例：$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$ は線形独立，$\boldsymbol{x}_3=\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2$ とすると，$0=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_3\boldsymbol{x}_3=(\alpha_1+\alpha_3)\boldsymbol{x}_1+\alpha_3\boldsymbol{x}_2$ なので $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_3$ は線形独立．同様に，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ も線形独立．しかし $\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{x}_2-\boldsymbol{x}_3=0$ なので，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{x}_3$ は線形従属．

問 1.13. (i)，(ii) が共に成立していれば，任意の $\boldsymbol{y}\in V$ は $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n$ の線型結合で表すことができるので (ii') が成立する．逆に，(i)，(ii') が共に成立していれば，線形関係 $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n+\beta\boldsymbol{y}=0$ が非自明な $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n,\beta$ に対して成立する．もし，$\beta=0$ ならば，線形関係は $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=0$ となり，(i) より $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ となり，自明な解しかもたないことが分かる．よって $\beta\neq0$ であり，このとき，$\boldsymbol{y}=-(\alpha_1/\beta)\boldsymbol{x}_1-(\alpha_2/\beta)\boldsymbol{x}_2-\cdots-(\alpha_n/\beta)\boldsymbol{x}_n$ が成立するので (ii) が示される．

問 1.14. $\boldsymbol{x}=\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_n\boldsymbol{x}_n=\beta_1\boldsymbol{x}_1+\beta_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\beta_n\boldsymbol{x}_n$ であれば，$(\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{x}_1+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)\boldsymbol{x}_n=0$ が成立する．$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_n$ は V の基底をなすので，線形独立である．よって $\alpha_i-\beta_i=0$ $(i=1,2,\dots,n)$ を得る．

問 1.15. $\boldsymbol{x}_{r+1},\boldsymbol{x}_{r+2},\dots,\boldsymbol{x}_m\in V$ $(m>r)$ を加えたとする．このとき，線形関係 $\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_m\boldsymbol{x}_m=0$ を $\alpha_{r+1}=\alpha_{r+2}=\cdots=\alpha_m=0$ に限定して考えると，$\alpha_1\boldsymbol{x}_1+\alpha_2\boldsymbol{x}_2+\cdots+\alpha_r\boldsymbol{x}_r=0$ を得るが，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_r$ は線形従属なので，後者の線形関係は非自明な解（$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_r=0$ でない解) をもつ．よって，前者の線形関係も非自明な解をもち，$\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\dots,\boldsymbol{x}_m$ は線形従属である．

問 1.16. 次元 n をもつ K 上の線形空間 V と W を考える．補題 1.19 より $V\cong K^n$，$W\cong K^n$ である（定義 1.8 参照）．同型対応は同値関係なので（問 1.11 参照），対称律 $K^n\cong W$ が成立する．これと $V\cong K^n$ に推移律を適用して $V\cong W$ を得る．

問 1.17. (i) 問題文より，任意のベクトルは

$$f(x)=(x-1)(\alpha x^2+\beta x+\gamma)=\alpha(x^3-x^2)+\beta(x^2-x)+\gamma(x-1)$$

で表される．よって，この空間の次元は 3 であり，基底の組は例えば，$[x^3-x^2,x^2-x,x-1]$ が挙げられる．
(i) 任意の $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ の元を $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ で表すと

$$\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{2b}{3}+2d=0$$

となる．よってこの空間は 3 次元であり，基底は例えば $[x^3,\ x,\ x^2-\frac{1}{3}]$
(iii) 対角成分 + 対角成分以外の下三角（あるいは上三角）に関する自由度があるので，$n(n+1)/2$ 次元であり，基底は $\boldsymbol{E}_{ii}$ $(i=1,2,\dots,n)$ および $\boldsymbol{E}_{ij}+\boldsymbol{E}_{ji}$ $(1\le i<j\le n)$ である．
(iv) 対角成分以外の下三角（あるいは上三角）に関する自由度があるので（対角成分は必ず 0），$n(n-1)/2$ 次元であり，基底は $\boldsymbol{E}_{ij}-\boldsymbol{E}_{ji}$ $(1\le i<j\le n)$ である．

問 1.18. (i)

$$\begin{aligned}(T(\alpha f+\beta g))(x)&=x(\alpha f''(x)+\beta g''(x))-2(\alpha f'(x-1)+\beta g'(x-1))\\&=\alpha(x\alpha f''(x)-2f'(x-1))+\beta(xg''(x)-2\beta g'(x-1))=\alpha(Tf)(x)+\beta(Tg)(x)\end{aligned}$$

(ii)

$$(T(1))=0,\qquad (T(x))=-2,\qquad (T(x^2))=-2x+4,\qquad (T(x^3))=12x-6$$

なので，$f(x)=\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\alpha_3x^3$ とすると

$$(Tf)(x)=-2\alpha_1+4\alpha_2-6\alpha_3+(-2\alpha_2+12\alpha_3)x$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-2&4&-6\\0&0&-2&12\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

問 1.19. $\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_m]$ とし，$\boldsymbol{x}$ を i 番目の標準基底（式 (1) 参照）とすると，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{0}$ を得る．これが全ての i に対して成立するので $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$.

問 1.20. 式 (5) とは逆に，$\boldsymbol{E}$ を構成する各ベクトル $\boldsymbol{v}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を基底 $\boldsymbol{E}'$ の下で

$$\boldsymbol{v}_i = s'_{1,i}\boldsymbol{v}'_1 + s'_{2,i}\boldsymbol{v}'_2 + \cdots + s'_{n,i}\boldsymbol{v}'_n, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

と一意に書くことができ，(i, j) 要素が $s'_{i,j}$ である n 次正方行列 $\boldsymbol{S}'$ を用いると

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]\boldsymbol{S}'$$

を得る．よって

$$[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n] = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]\boldsymbol{S}' = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}',$$
$$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n] = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]\boldsymbol{S} = [\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]\boldsymbol{S}'\boldsymbol{S}$$

を得る．$n \times n$ 正方行列 $[\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n]$，$[\boldsymbol{v}'_1, \boldsymbol{v}'_2, \ldots, \boldsymbol{v}'_n]$ のいずれにおいても，列ベクトルは線形独立なので，これらの逆行列が存在する．よって，上式のそれぞれに左から逆行列を掛けると $\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}' = \boldsymbol{S}'\boldsymbol{S} = \boldsymbol{I}$ を得る．すなわち $\boldsymbol{S}$ は逆行列 $\boldsymbol{S}'$ をもつ．

問 1.21. (i) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{I}$. (ii) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}^{-1})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}$. (iii) $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q} \ \Rightarrow\ \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q})$

問 1.22. (i) $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ が線形独立ならば，これらは $S = \mathrm{span}\ [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k]$ の基底である．よって $\dim S = k$. さらに $S \subset V$ であり，定理 1.18 より，S の基底に幾つかのベクトルを加えることで V の基底を得ることができる．よって，$\dim S \leq \dim V$. (ii) まず $m < k$ なので，$\mathrm{span}\ [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m] \subset S$ である．一方，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in S$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \cdots, \boldsymbol{x}_k$ の線型結合で表現される．また，$\boldsymbol{x}_{m+1}, \boldsymbol{x}_{m+2}, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ は $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m$ の線型結合で表現される．よって，任意のベクトル $\boldsymbol{x} \in S$ は $\boldsymbol{x} \in \mathrm{span}\ [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m]$ を満たす．すなわち $S \subset \mathrm{span}\ [\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_m]$. 以上より，式 (7) が成立する．(iii) 式 (7) が成立するので，定理 1.18 より，$\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_k$ から線形独立な $\dim S$ 個のベクトルを選び，これらに幾つかのベクトルを加えることで V の基底を構成できる．よって，(iii) の結論が得られる．

問 1.23. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W_1 \cap W_2$ に対して，スカラー α, β による線形演算 $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ を考える（問 1.8 参照）．まず，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は線形部分空間 W_1 のベクトルなので，$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in W_1$ である．同様に，$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ は線形部分空間 W_2 のベクトルなので，$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in W_2$ である．よって $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in W_1 \cap W_2$ となり，$W_1 \cap W_2$ は線形演算について閉じている．

問 1.24. x 軸 $W_1 = \{\alpha(1, 0) \mid -\infty < \alpha < \alpha\}$, y 軸 $W_2 = \{\beta(0, 1) \mid -\infty < \beta < \alpha\}$. 和集合 $W_1 \cup W_2$ は x 軸ならびに y 軸上の点の集合なので加法に関して閉じていない．たとえば $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W_i$ $(i = 1, 2)$.

問 1.25. 線形部分空間には必ず零元が含まれている（$\boldsymbol{0} \in W_1$，$\boldsymbol{0} \in W_2$）ことに注意すると，$W_1 + W_2$ の定義より，$W_i \in W_1 + W_2$ $(i = 1, 2)$ なので $W_1 \cup W_2 \subset W_1 + W_2$. 一方，ある線形部分空間 U が $W_1 \cup W_2$ を含むならば，U は $W_1 + W_2$ も含まなければならない．すなわち $W_1 + W_2 \subset U$. $W_1 + W_2$ は線形部分空間なので，$W_1 + W_2$ が $W_1 \cup W_2$ を含む最小の線形部分空間となる．

問 1.26. $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ の (i, j) 要素をそれぞれ $a_{i,j}$，$b_{i,j}$, $c_{i,j}$ とする．このとき，任意の $c_{i,j}$, $c_{j,i}$ $(i \neq j)$ に対して $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$, $c_{j,i} = a_{j,i} + b_{j,i} = a_{i,j} - b_{i,j}$ を満たす $a_{i,j}$，$b_{i,j}$ が唯一定まる．交代行列 $\boldsymbol{B}$ の対角要素は全て 0 なので，$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ ならば，$a_{i,i} = c_{i,i}$ である．

問 1.27. $\boldsymbol{x}_i \in V$ $(i = 1, 2)$ に対して $\boldsymbol{y}_i = f(\boldsymbol{x}_i) \in \mathrm{Im}\ f$ $(i = 1, 2)$ としたとき $\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2 = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) \in \mathrm{Im}\ f$，$\alpha\boldsymbol{y}_1 = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) = f(\alpha\boldsymbol{x}_1) \in \mathrm{Im}\ f$ なので $\mathrm{Im}\ f$ は W の線形部分空間. また，$\boldsymbol{x}_i \in V$ $(i = 1, 2)$ に対して $f(\boldsymbol{x}_1) = f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$ ならば $f(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = f(\boldsymbol{x}_1) + f(\boldsymbol{x}_2) = \boldsymbol{0}$ より $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in \mathrm{Ker}\ f$，$f(\alpha\boldsymbol{x}_1) = \alpha f(\boldsymbol{x}_1) = \boldsymbol{0}$ より $\alpha\boldsymbol{x}_1 \in \mathrm{Ker}\ f$ なので，$\mathrm{Ker}\ f$ は V の線形部分空間.

問 1.28. (i) $c \neq 0$ のとき，$\boldsymbol{x}$ を定数倍すると必ずユークリッド長さは変わるので，線型部分空間にならない．一方，$c = 0$ であれば，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ のみが W に含まれる．以上より，$c = 0$ の場合のみ線型部分空間となる．
(ii) $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$ とすると，$\boldsymbol{x}$ のスカラー倍 $\alpha\boldsymbol{x}$ は明らかに W に含まれない．一方，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ とすると，W は Ker $\boldsymbol{A}$ となり，これは線型部分空間となる （$W = \{\boldsymbol{0}\}$ も含む ）．以上より，$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$ の場合のみ線形部分空間となる．
(iii) $\boldsymbol{A}' = \lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ とおけば $W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid \boldsymbol{A}'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$．よって (ii) の結果より，常に線型部分空間となる．

問 1.29. Im $\boldsymbol{B} \subset \mathbb{C}^n$ に注意すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Im}\ \boldsymbol{AB} &= \{\boldsymbol{y} \in K^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{ABx},\ \boldsymbol{x} \in K^r\} = \{\boldsymbol{y} \in K^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Az},\ \boldsymbol{z} = \boldsymbol{Bx},\ \boldsymbol{x} \in K^r\} \\ &= \{\boldsymbol{y} \in K^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Az},\ \boldsymbol{z} \in \mathrm{Im}\ \boldsymbol{B}\} \subset \{\boldsymbol{y} \in K^m \mid \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Az},\ \boldsymbol{z} \in C^n\} = \mathrm{Im}\ \boldsymbol{A}\end{aligned}$$

後者は

$$\begin{aligned}\mathrm{Ker}\ \boldsymbol{AB} &= \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{ABx} = \boldsymbol{0}\} = \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}\} \cup \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{Bx} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{ABx} = \boldsymbol{0}\} \\ &= \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{B} \cup \{\boldsymbol{x} \in K^n \mid \boldsymbol{Bx} \neq \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{ABx} = \boldsymbol{0}\} \supset \mathrm{Ker}\ \boldsymbol{B}\end{aligned}$$

問 1.30. (i) 始空間 V と終空間 W の基底をそれぞれ $[x^3, x^2, x, 1]$, $[x^2, x, 1]$ として設定する．基底の行き先を考えることで，以下の表現行列を得る．

$$T([x^3, x^2, x, 1]) = [x^2, x, 1]\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(ii) 表現行列の階数 = 像空間の次元は明らかに 2 次元である．(i) の結果を考慮すると，像空間の基底は

$$[3x^2 + 6x, \quad 2, \quad 1]$$

で張られる $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ の線型部分空間となる．$\dim \mathrm{Im}\ T = 2$ であることに注意すると，例えばその基底として，$[3x^2 + 6x, 2]$ が取れる．($[3x^2 + 6x, -1]$ でもよいし，$[x^2 + x, 1]$ などでも構わない)
(iii) 次元定理より，核 Ker T の次元は

$$\dim \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) - \dim \mathrm{Im}\ T = 4 - 2 = 2$$

なので 2 次元となる．つまり，$T(f) = 0$ となる $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ の線形独立な元を 2 つ探す必要がある．例えば (i) より，$T(1) = 0$ は明らか．あとは適当に探すと $x^2 + 2x$ もそうであることが分かる（定数倍でもよい)．よって，基底の例は $[x^2 + 2x, 1]$．
(iv) ここまでの議論で，始空間の基底を $[x^3, x^2, x^2 + 2x, 1]$ として取り，終空間の基底の一部を $[3x^2 + 6x, 2]$ とすると

$$T([x^3, x^2, x^2 + 2x, 1]) = [3x^2 + 6x, 2]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる．終空間の次元は 3 なので，これに基底を 1 つ適当に加えて $[3x^2 + 6x, 2, x]$ とする．以上をあわせて

$$T([x^3, x^2, x^2 + 2x, 1]) = [3x^2 + 6x, 2, x]\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

問 2.1. (i) $(\boldsymbol{x}, \alpha\boldsymbol{y}) = \overline{(\alpha\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \overline{\alpha(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \overline{\alpha}\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})} = \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$
(ii) $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})} = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})} = \overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z})} + \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})} = (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{z}, \boldsymbol{y})$
(iii) $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0} + \boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x})$ より $(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x}) = 0$ (iv) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ のとき $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ より $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

問 2.2. 仮に，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ であるとすると，例えば，$\boldsymbol{x} = (1, i)$ としたとき，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1 - 1 = 0$ となり，内積の定義 (i) に反する（すなわち，内積ではない）．

問 2.3. $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ のとき，

$$\|\overline{\boldsymbol{x}}\|^2 = (\overline{\boldsymbol{x}}, \overline{\boldsymbol{x}}) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{x}_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^2$$

問 2.4. 任意の $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W^{\perp}$ に対して，スカラー α, β による線形演算 $\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}$ を考える（問 1.8 参照）．定義より，任意の $\boldsymbol{z} \in W$ に対して，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$ である．さらに，内積の定義 2.2 に従うと，任意の $\boldsymbol{z} \in W$ に対して，$(\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (\alpha\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + (\beta\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = \alpha(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) + \beta(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = 0$ となり，$\alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{y} \in W^{\perp}$ である．すなわち，$W^{\perp}$ は線形演算に対して閉じており，V の線形部分空間である．

問 2.5. (i) $\boldsymbol{x} \notin (W_1^{\perp})^{\perp}$ ならば $\exists \boldsymbol{y} \in W_1^{\perp}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \neq 0$，すなわち，$\boldsymbol{x} \notin W_1$ である．この対偶を取ると $\boldsymbol{x} \in W_1 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{x} \in (W_1^{\perp})^{\perp}$ となり，$W_1 \subset (W_1^{\perp})^{\perp}$ を得る．さらに，定理 2.19 より $V = W^{\perp} \oplus (W^{\perp})^{\perp}$ が成立するので，定理 1.39 と定理 2.19 を用いると

$$\dim(W_1^{\perp})^{\perp} = \dim V - \dim W_1^{\perp} = \dim V - (\dim V - \dim W_1) = \dim W_1$$

となり，補題 1.43 より $(W_1^{\perp})^{\perp} = W_1$ を得る．
(ii) $\boldsymbol{y} \in W_1$ とする．$W_1 \subset W_2$ ならば $\boldsymbol{y} \in W_2$ なので，$\boldsymbol{x} \in W_2^{\perp}$ に対して $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ であるが，これは $\boldsymbol{x} \in W_1^{\perp}$ を意味する．よって $W_1 \subset W_2 \;\Rightarrow\; W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp}$．逆は W_1, W_2 をそれぞれ $W_1^{\perp}, W_2^{\perp}$ に置き換えて同じ議論を行い，最後に (i) を用いればよい．
(iii) $W_1 \subset W_1 + W_2$ ならびに (ii) より $(W_1 + W_2)^{\perp} \subset W_1^{\perp}$，同様に $(W_1 + W_2)^{\perp} \subset W_2^{\perp}$ なので $(W_1 + W_2)^{\perp} \subset W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$．逆に，$\boldsymbol{x} \in W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp}$ のとき，任意の $\boldsymbol{y} \in W_1 + W_2$ は $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2$ ($\boldsymbol{y}_1 \in W_1, \boldsymbol{y}_2 \in W_2$) と表すことができ，$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_1) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}_2) = 0 + 0 = 0$ なので，$\boldsymbol{x} \in (W_1 + W_2)^{\perp}$ を得る．すなわち，$W_1^{\perp} \cap W_2^{\perp} \subset (W_1 + W_2)^{\perp}$．
(iv) (iii) において，W_1, W_2 をそれぞれ $W_1^{\perp}, W_2^{\perp}$ に置き換えて (i) を用いると $(W_1^{\perp} + W_2^{\perp})^{\perp} = W_1 \cap W_2$．よって再び (i) を用いて，$(W_1 \cap W_2)^{\perp} = (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})$．

問 2.6. 正方行列 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ に対して $(\boldsymbol{AB})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$，$(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$ に注意すると

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^*\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^* = \boldsymbol{I}^* = \boldsymbol{I}, \qquad \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{I}^* = \boldsymbol{I}$$

が成立するので，$\boldsymbol{A}^*$ の逆行列は $(\boldsymbol{A}^{-1})^*$ で与えられる．

問 2.7. 前半は，$\alpha\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ の列ベクトルが線形独立であることを示せば十分である．もし，ある $\boldsymbol{c}$ に対して $(\alpha\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ ならば，$\overline{\boldsymbol{c}}^{\top}(\alpha\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)\boldsymbol{c} = 0$，すなわち，$\alpha\|\boldsymbol{c}\|^2 + \|\overline{\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{c}}\|^2 = 0$ となり，$\alpha \neq 0$ なので $\|\boldsymbol{c}\| = 0$ である．よって，$\alpha\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ の列ベクトルは線形独立である．一方，ある $\boldsymbol{c}$ に対して $(\alpha\boldsymbol{I}_n + \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{0}$ ならば，$\overline{\boldsymbol{c}}^{\top}(\alpha\boldsymbol{I}_m + \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = 0$，すなわち，$\alpha\|\boldsymbol{c}\|^2 + \|\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}}\|^2 = 0$ となり，$\alpha \neq 0$ なので $\|\boldsymbol{c}\| = 0$ である．

問 2.8. $(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A})^{\perp} = \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}^*$ を示せば十分である．定理 2.26 より $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}^* \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0} \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0,\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n \;\Leftrightarrow\; (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{y}) = 0,\ \forall \boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{x} \in (\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A})^{\perp}$ である．

問 2.9. $\boldsymbol{x}$ と同様に，$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{y}'', \quad \boldsymbol{y}' \in W,\ \boldsymbol{y}'' \in U$ とする．このとき，$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' + \boldsymbol{x}'' + \boldsymbol{y}''$ なので $f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{y}' = f(\boldsymbol{x}) + f(\boldsymbol{y})$．また，$\alpha\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x}' + \alpha\boldsymbol{x}''$ なので $f(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\boldsymbol{x}' = \alpha f(\boldsymbol{x}')$．よって，$f$ は線形変換である．また，定義より $\mathrm{Im}\,f \subset W$ であり，逆に，任意の $\boldsymbol{x}' \in W \subset V$ に対して $f(\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{x}'$ となるので，$W \in \mathrm{Im}\,f$．よって $\mathrm{Im}\,f = W$ となり，f は全射である．

問 2.10. 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して $(I - f)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'$，すなわち，$I - f$ によって，$\boldsymbol{x}$ は $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{x}'' \in U$ に移される．

問 2.11. もし $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\,f$ ならば，ある $\boldsymbol{y} \in V$ が存在し，$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{y})$ が成立する．よって，$(I - f)(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} - f(f(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{0}$ となり，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\,(I - f)$ である．逆に，もし $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\,(I - f)$ ならば，$\boldsymbol{x} - f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$，すなわち，$\boldsymbol{x} = f(\boldsymbol{x}) \in \mathrm{Im}\,f$ である．以上より，$\mathrm{Im}\,f = \mathrm{Ker}\,(I - f)$．

問 2.12. ある $\boldsymbol{x} \in \mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}^* \subset \mathbb{C}^n$ に対して $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y}$ となる $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^m$ が存在し，$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y})$ $= \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}$ となる．一方，$\boldsymbol{x} \in (\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}^*)^{\perp} \subset \mathbb{C}^n$ に対しては，定理 2.27 より $(\mathrm{Im}\,\boldsymbol{A}^*)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$ なので，$\boldsymbol{x} \in \mathrm{Ker}\,\boldsymbol{A}$ である．よって，$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*)^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ を得る．

問 2.13. 一般化逆行列の条件 (i) は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*})^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ より確かめられる．同様に，$\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*})^{-1} = \boldsymbol{A}^{+}$ より，反射型の条件 (ii) を満たす．また，最小ノルム型の条件 (iii) は
$(\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{*} = (\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*})^{-1}\boldsymbol{A})^{*} = \boldsymbol{A}^{*}\big((\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*})^{-1}\big)^{*}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}$ と確かめることができる．最後に，$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*})^{-1} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}^{*} = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})^{*}$ より，最小 2 乗型の条件 (iv) を満たす．なお，これから，$\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*})^{-1}$ は $\boldsymbol{A}$ の右逆行列になっていることが分かる．

問 2.14. 一般化逆行列の条件 (i) は $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ より確かめられる．反射型の条件 (ii) は $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+} = (\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+} = \boldsymbol{A}^{+}$ より確かめられる．最小ノルム型の条件 (iii) は問 2.6 を用いると $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+})^{*} = (\boldsymbol{A}^{+})^{*}\boldsymbol{A}^{*} = \big((\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\big)^{*}\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{A}\big((\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{-1}\big)^{*}\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{A}\big((\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{*}\big)^{-1}\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{+}$ より確かめられる．最後に最小 2 乗型の条件 (iv) は $\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I} = (\boldsymbol{A}^{+}\boldsymbol{A})^{*}$ より確かめられる．なお，これから，$\boldsymbol{A}^{+} = (\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{*}$ は $\boldsymbol{A}$ の左逆行列になっていることが分かる．

索 引