場合の数と確率

滝根 哲哉*

目 次

1 順列と組合わせ

★ 異なる n 個から r 個を選んで作られる順列の個数 ${}_nP_r$ は

$$
{}_nP_r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}
$$

★ 樹形図をイメージする

問 1.1 1 から 9 までの数字から異なる 5 個をとって作った順列のうちで，次の条件を満たすものの個数をそれぞれ求めよ．　(i) 奇数番目に必ず奇数がある．　(ii) 奇数は必ず奇数番目にある．

問 1.2 A, A, B, B, C, C の 6 文字を 1 列に並べる順列の中で，同じ文字が隣り合わない順列の数を求めよ．

★ 異なる n 個から r 個を選んで作られる組合わせの個数 ${}_nC_r$ は

$$
n(n-1)\cdots(n-r+1) = {}_nC_r \times r! \qquad \Rightarrow \qquad {}_nC_r = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}
$$

★ 大学では ${}_nC_r$ を $\binom{n}{r}$ と書く．

$$
\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}
$$

*大阪大学大学院工学研究科電気電子情報工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
電話：(06)6879-7740　FAX：(06)6875-5901　電子メール：takine@comm.eng.osaka-u.ac.jp
URL：http://www2b.comm.eng.osaka-u.ac.jp/~takine/

問 1.3　$\sum_{k=10}^{50}\binom{60}{k}\binom{40}{50-k}$ を，式の意味を考えて，計算を行うことなく求めよ．

問 1.4　1 から 10 までの自然数の順列 $a_1a_2\cdots a_{10}$ は全部で 10! あるが，その中で条件

$$a_1 < a_4 < a_7 < a_{10}, \qquad a_2 > a_5 > a_8, \qquad a_3 < a_6 < a_9$$

を全て満たすものは何通りあるか．

★ a 個の A，b 個の B，c 個の C を全て並べて作られる順列の個数 x は

$$x \times a!b!c! = (a+b+c)! \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{(a+b+c)!}{a!b!c!}$$

★ 集合 A の要素の個数を $\#(A)$，全体集合を Ω，その部分集合 A の補集合を $\overline{A}$ とすると

$$\#(A\cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A\cap B), \qquad \#(A) = \#(\Omega) - \#(\overline{A})$$
$$\#(\overline{A\cup B}) = \#(\bar{A}\cap\bar{B}), \qquad \#(\overline{A\cap B}) = \#(\bar{A}\cup\bar{B}),$$

★ ベン図をイメージする．

問 1.5　4 桁の内線電話番号は 0000 から 9999 まで 10,000 通りある．この内，(i) 0007，3556 のように同じ数字が連続しているものは何通りあるか．(ii) 数字 1 と 6 の両方を含むものは何通りあるか．

2　整数解の個数と分割の個数

★ $1 \le k \le n$ なる自然数 k，n に対して

$$1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_k \le n$$

を満たす整数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ は $\binom{n}{k}$ 通りある（なぜならば，$(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ は $\{1, 2, \ldots, n\}$ から要素を k 個選び，昇順に並べたもの）．

それ故，

$$1 \le x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_k \le n$$

を満たす整数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$（これは $\{1, 2, \ldots, n\}$ から重複を許して要素を k 個選び，昇順に並べたもの）は

$$1 \le x_1 < x_2 + 1 < x_3 + 2 < x_4 + 3 < \cdots < x_k + k - 1 \le n + k - 1$$

すなわち，$y_i = x_i + i - 1$ としたとき $1 \le y_1 < y_2 < \cdots < y_k \le n + k - 1$ を満たす整数の組と書き換えることができるので $\binom{n+k-1}{k}$ 通りある．

問 2.1　$2k - 1 \le n$ なる自然数 k，n に対して $x_1 \ge 1$，$x_k \le n$ かつ $x_{i+1} - x_i \ge 2$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$ を満たす整数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ は何通りあるか．

★ $k \le n$ なる自然数 k, n に対して

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n \quad \text{かつ} \qquad x_i \ge 1 \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

を満たす整数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ を考える．これは n 個のミカンを k 人で分ける（ただし、各人は最低一つもらう）分け方の場合の数であるので，n 個のミカンを並べて $k-1$ 個の仕切り $|$ で分割すると考えて $\binom{n-1}{k-1}$ 通りある．

問 2.2　自然数 k と非負整数 n に対して $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = n$ かつ $x_i \ge 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ を満たす整数の組 $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ は何通りあるか．

問 2.3　1 そう当たり 4 人まで乗れるボート 2 そうに 6 人が分乗するとき，次の乗り方は何通りあるか．(i) 人は区別しないがボートは区別する．(ii) 人もボートも区別する．(iii) 人は区別するがボートは区別しない．

3 二項係数について

★ $\binom{n}{k} = {}_nC_k$ は二項係数と呼ばれる．

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$a = b = 1$ の特別な場合に対しては

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

問 3.1 $n+1$ 個の二項係数 $\binom{n}{k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ について「k が偶数のものの総和＝ k が奇数のものの総和」が成立することを示せ．

問 3.2 1 から $n+1$ までの自然数から $k+1$ 個を選ぶ場合の数は $\binom{n+1}{k+1}$ であるが，これを $k+1$ 個の自然数の内，最大の自然数が何であるかで場合分けして求めることにより $\binom{n+1}{k+1}$ の別表現を与えよ．

4 組み合わせ論的確率

★ ある試行で n 通りの出来事（標本＝根元事象）が起こりえて，それらが同様に確からしいとき，事象 A に属する標本が a 通りあるならば，事象 A が起こる確率 $\Pr(A)$ は a/n で与えられる．

★ 多数ある物の中から n 個 $(n \geq 2)$ を選ぶ場合，(i) 同時に n 個を選ぶ (ii) ひとつずつ順に n 個選ぶ，の 2 パターンある．さらに後者は (ii-1) 選んだものは戻さない (ii-2) 選んだものを元に戻す，の 2 パターンある．(i) の場合，組み合わせに興味がある．(ii) の場合は，最終的な組み合わせ以外に，取り出した順番（順列）も意識する．

問 4.1 赤，青，黄，緑の玉がそれぞれ 2 個ずつ合計 8 個箱の中に入っている．この箱から 3 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した 3 個の玉の中に同色の玉がある確率を求めよ．

問 4.2 二つのサイコロを同時に振るとき，互いの目の差が 2 以下となる確率を求めよ．

問 4.3 10 本中 3 本が当たりのくじを 10 人の人が順に 1 本ずつ引いていくくじ引きにおいて k 番目 $(k = 2, 3, \ldots, 9)$ の人が 2 本目の当たりくじを引く確率を求めよ

★ 各標本は同様に確からしいとする．標本全体の集合を Ω，その部分集合 A の要素の個数を $\#(A)$ としたとき，$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$，$\#(A) = \#(\Omega) - \#(\overline{A})$ である．これらの両辺を $\#(\Omega)$ で割ると

$$\Pr(A \cup B) = \Pr(A) + \Pr(B) - \Pr(A \cap B), \qquad \Pr(A) = 1 - \Pr(\overline{A})$$

なお，標本全体の集合 Ω は標本空間と呼ばれ，その部分集合 A は事象と呼ばれる．

問 4.4 $\Pr(A \cap B) = 1 - \Pr(\overline{A}) - \Pr(\overline{B}) + \Pr(\overline{A} \cap \overline{B})$ を示せ．

問 4.5 1 から 10 の自然数が書かれた 10 枚のカードから同時に 3 枚のカードを選び，選んだカードに書かれた数字の積を X とする．(i) X が偶数である確率を求めよ．(ii) X が 10 の倍数である確率を求めよ．

5 独立

★ 試行の結果が互いに影響を与えないような複数回の試行は独立であるといわれる．

★ 試行の独立と，その結果生じる事象の独立は意味が異なる．後者は複数の事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ が同時の起こる確率が，それぞれが起こる確率の積で書けるとき,（互いに）独立であるといわれる．

$$\begin{aligned} \text{事象 } A_1, A_2 \text{ が独立} &\iff \Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1)\Pr(A_2) \\ \text{事象 } A_1, A_2, \ldots, A_n \text{ が互いに独立} &\iff \Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \Pr(A_1)\Pr(A_2)\cdots\Pr(A_n) \end{aligned}$$

★ 特に独立な試行 T_1，T_2 において，T_1 に関する事象 A_1 と T_2 に関する事象 A_2 は独立である．すなわち，$\Pr(A_1 \cap A_2) = \Pr(A_1)\Pr(A_2)$ が成立する．

問 5.1 A さんが $n+1$ 枚 $(n \geq 1)$ の硬貨を，B さんが n 枚の硬貨を同時に投げるとき，A さんが B さんより多くの表を出す確率を求めよ．

問 5.2 硬貨を n 回（$n \geq 2$）投げるとき，表も裏も出るという事象 A と表が高々1 回しか出ないという事象が独立となる n の値を求めよ．

6 反復試行の確率：二項分布

★ 1 回の試行において，ある事象 A が起こる確率を p とする．この試行を独立に n 回繰り返すとき，m 回目の試行で事象 A が起こることを A_m，起こらないことを $\overline{A}_m$ としたとき，

$$\Pr(A_m) = p, \qquad \Pr(\overline{A}_m) = 1 - p \qquad\qquad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

であり，$n \geq 3$ に対して，最初の k 回でのみ事象 A が起こる確率は

$$\Pr(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \overline{A}_{k+2} \cap \cdots \cap \overline{A}_n) = p \cdots p \cdot (1-p) \cdots (1-p) = p^k (1-p)^{n-k}$$

である．

★ 上記の試行を独立に n 回繰り返すとき，事象 A が k 回起こる確率は,

$$\Pr(n \text{ 回の独立な試行において事象 } A \text{ が } k \text{ 回起こる}) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

右辺の確率分布は二項分布と呼ばれる．

問 6.1 1 枚の硬貨を n 回投げ，表が出たときは 1，裏が出たときは 0 を割り当てることで得られる数の列を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とする．同じ試行を新たに行うことによって得られた数の列を $y_1, y_2, \ldots, y_n$ とするとき $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ が偶数になる確率 p_n を二項定理を用いて求めよ．

7 条件付き確率

★ ある試行で n 通りの出来事（標本＝根元事象）が起こりえて（$\#(\Omega) = n$），それらが同様に確からしいとき，事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる条件付き確率 $\Pr(B \mid A)$ は

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\#(A \cap B)}{\#(A)}$$

で与えられる．事象 A が起こったとき，事象 B も同時に起こっているか否かによって，場合分けが可能であり，

$$\#(A) = \#(A \cap B) + \#(A \cap \overline{B})$$

となる．条件付き確率 $\Pr(B \mid A)$ は事象 A が起こったとき，その中で，さらに事象 B が起こる割合である．なお，定義式の右辺を $\#(\Omega) = n$ で割って

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)}$$

を条件付き確率の定義としても良い．

★ 今まで考えてきた事象 A が起こる確率は，何かが起こった（＝事象 Ω が起こった）という条件の元で事象 A が起こったというように解釈することもできる．

$$\Pr(A \mid \Omega) = \frac{\Pr(\Omega \cap A)}{\Pr(\Omega)} = \frac{\Pr(A)}{1} = \Pr(A)$$

★ 条件付き確率の定義を書き換えて

$$\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B \mid A) = \Pr(B)\Pr(A \mid B)$$

とする．最初の等号は，二つの事象 A，B が共に起こる確率が，まず事象 A が起こり，かつ，事象 A が起こったという条件のもとで事象 B が起こる確率に等しいことを示している．右辺の A と B は対等なので A，B を入れ替えると 2 番めの等式を得る（あるいは，$\Pr(A \mid B) = \Pr(A \cap B)/\Pr(B)$ を代入すると右辺となる）．

問 7.1　3 枚のカードのうち，1 枚目のカードは両面とも赤，2 枚目は両面とも白，残りの 1 枚は片面が赤，その裏は白である．これら 3 枚のカードの順序も表裏もデタラメにして，1 枚取り出したら，見えている一つの面は赤であった．その裏が白である確率を求めよ．

★ 事象 A，B が独立である，すなわち $\Pr(A \cap B) = \Pr(A)\Pr(B)$ ならば

$$\Pr(B \mid A) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(A)} = \frac{\Pr(A)\Pr(B)}{\Pr(A)} = \Pr(B)$$

問 7.2　事象 A，B が独立であるとき，事象 $\overline{A}$，B も独立であることを示せ．

よって，事象 A，B が独立であるならば，$\Pr(B \mid A) = \Pr(B \mid \overline{A}) = \Pr(B)$ が成立する（事象 B が起こる確率は事象 A が起こるか否かとは無関係）．

問 7.3　重さの異なる n 個（$n \geq 2$）の玉が入っている袋から無作為に玉を一つ取り出し，それを元に戻さずに，更にもう一つ，玉を無作為に取り出したところ 2 番目の玉の方が重かった．2 番目に取り出した玉が n 個の玉の中で最も重い玉である確率を求めよ．

問 7.4　それぞれに $1, 2, \ldots, 6$ の数字が書かれた 6 枚のカードから無作為に 1 枚選び，それを元に戻さずに，更にもう 1 枚，無作為に選んだとき，1 枚目は 5 以下で，2 枚目は 3 以下である確率を求めよ．

★ $\#(A) = \#(A \cap B) + \#(A \cap \overline{B})$ を変形すると

$$\#(A) = \#(B) \cdot \frac{\#(A \cap B)}{\#(B)} + \#(\overline{B}) \cdot \frac{\#(A \cap \overline{B})}{\#(\overline{B})}$$

となる．これより

$$\Pr(A) = \Pr(B)\Pr(A \mid B) + \Pr(\overline{B})\Pr(A \mid \overline{B})$$

を得る．これは事象 A が起こる確率を事象 B が起こったか否かで場合分けして求める際に用いているもので，自然な形で条件付き確率が登場する．

★ 特に，連続的に試行を行う際，n 回目である事象が起こることを A_n で表すと

$$\Pr(A_n) = \Pr(A_{n-1})\Pr(A_n \mid A_{n-1}) + (1 - \Pr(A_{n-1}))\Pr(A_n \mid \overline{A}_{n-1})$$

という $\Pr(A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ に関する漸化式を得ることができる場合がある．

★ 例えば，n 回サイコロを投げたとき出た目の総和が偶数である確率を p_n とすると

$$p_n = p_{n-1} \times \mathrm{Pr}(n\text{ 回目は偶数}) + (1-p_{n-1}) \times \mathrm{Pr}(n\text{ 回目は奇数}) = p_{n-1} \cdot \frac{1}{2} + (1-p_{n-1})\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

★ 2 項間の漸化式 $p_n = ap_{n-1} + b$ は $p_n - \alpha = \beta(p_{n-1} - \alpha)$ の形に変形して， $p_n - \alpha = \beta^n(p_0 - \alpha)$ あるいは $p_n - \alpha = \beta^{n-1}(p_1 - \alpha)$ という形で求解できる．

問 7.5　直線上に赤と白の旗を持った何人かの人が，番号 $0, 1, 2, \ldots$ をつけて並んでいる．番号 0 の人は，赤と白の旗を等しい確率で無作為にあげるとし，他の番号 j の人は，番号 $j-1$ の人のあげた旗の色を見て，確率 p で同じ色，確率 $1-p$ で異なる色の旗をあげるものとする．このとき番号 0 と番号 n の人が同じ色の旗をあげる確率 q_n を求めよ．

★ 3 項間の漸化式 $p_n = ap_{n-1} + bp_{n-2}$ は $p_n - \alpha p_{n-1} = \beta(p_{n-1} - \alpha p_{n-2}) = \beta^{n-2}(p_2 - \alpha p_1)$ のように変形して，2 項間の漸化式に帰着させることができる場合がある．

問 7.6　数直線上を原点から正の向きに硬貨を投げて，表が出れば 1 進み，裏が出れば 2 進むものとする．このようにして，ちょうど点 n に到達する事象を A_n とし，$p_n = \mathrm{Pr}(A_n)$ と定義する．ただし n は自然数．(i) 2 以上の n について, 最初に投げた硬貨の裏表で場合分けすることにより， p_{n+1} と p_n，p_{n-1} の関係式を求めよ．(ii) 事象 A_n を事象 A_{n-1} が生起するか否かで場合分けして p_n と p_{n-1} の関係式を導け．(iii) (i) で求めた 3 項間の関係式から (ii) で求めた 2 項間の関係式を導け．(iv) p_n を求めよ．

問 7.7　3 つの野球チーム A, B, C が試合をする．まず 2 チームが対戦し，その勝者が残りの 1 チームと対戦する．これを繰り返して， 2 連勝したチームが優勝する．A が B, C に勝つ確率は p, q $(0 < p, q < 1)$，B が C に勝つ確率は 1/2 とする．最初に B と C が対戦する場合，A が優勝する確率を求めよ．

8　補足：定係数をもつ 2 階差分方程式について

一般の定係数をもつ 2 階差分方程式

$$p_{n+2} + Ap_{n+1} + Bp_n = 0, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{1}$$

を考える．もし二つの系列 $\{a_1, a_2, \ldots\}$, $\{b_1, b_2, \ldots\}$ がともに (1) を満たすならば，それらの線形結合 $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ で与えられる系列 $\{c_1, c_2, \ldots\}$ も (1) を満たす．

$$\begin{aligned} c_{n+2} + Ac_{n+1} + Bc_n &= (\alpha a_{n+2} + \beta b_{n+2}) + A(\alpha a_{n+1} + \beta b_{n+1}) + B(\alpha a_n + \beta b_n) \\ &= \alpha(a_{n+2} + Aa_{n+1} + Ba_n) + \beta(b_{n+2} + Ab_{n+1} + Bb_n) = 0 \end{aligned}$$

すなわち，(1) を満たす系列全てからなる集合は線形空間をなす．

一方，系列 $\{p_1, p_2, \ldots\}$ は，最初の 2 項 p_1，p_2 が定まれば，それ以降の項も一意に定まる．よって，例えば，$(a_1\ a_2) = (1\ 0)$ であるような系列 $\{a_1, a_2, \ldots\}$ と $(b_1\ b_2) = (0\ 1)$ であるような系列 $\{b_1, b_2, \ldots\}$ は線形空間の基底をなし，任意の系列 $\{c_1, c_2, \ldots\}$ は

$$c_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 = \alpha \qquad c_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 = \beta$$

すなわち，$(\alpha\ \beta) = (c_1\ c_2)$ を用いて

$$c_n = \alpha a_n + \beta b_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

で与えられる．

(1) に対応する 2 次方程式

$$x^2 + Ax + B = 0 \tag{2}$$

は特性方程式と呼ばれており，その根を r としたとき，$p_n = r^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は明らかに (1) を満たす．

$$p_{n+2} + Ap_{n+1} + Bp_n = r^{n+2} + Ar^{n+1} + Br^n = r^n(r^2 + Ar + B) = 0$$

よって，もし特性方程式 (2) が異なる 2 根 r_1, r_2 $(r_1 \neq r_2)$ を持つならば，$a_n = r_1^n$，$b_n = r_2^n$ は基底をなし，任意の系列 $\{c_1, c_2, \ldots\}$ は

$$c_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n \qquad (r_1 \neq r_2 \text{ の場合})$$

の形で表現できる．このとき，α, β は初期条件

$$c_1 = \alpha r_1 + \beta r_2, \qquad c_2 = \alpha r_1^2 + \beta r_2^2 = -\alpha(Ar_1 + B) - \beta(Ar_2 + B)$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ -(Ar_1 + B) & -(Ar_2 + B) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

であるため，解と係数の関係 $A = -(r_1 + r_2)$ に注意すると，右辺に現れる行列の行列式は

$$r_1 \times [-(Ar_2 + B)] - r_2 \times [-(Ar_1 + B)] = -B(r_1 + r_2) = AB$$

となり，

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ -(Ar_1 + B) & -(Ar_2 + B) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{AB} \begin{pmatrix} -(Ar_2 + B) & -r_2 \\ Ar_1 + B & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

を得る．

もし，重根 r を持つ場合（解と係数の関係から $B = r^2$）には $a_n = r^n$ と $b_n = nr^n$ が基底となる．

$$(n+2)r^{n+2} + A(n+1)r^{n+1} + Bnr^n = r^n[n(r^2 + Ar + B) + 2r^2 + Ar] = r^n[2r^2 + Ar] = r^n[r^2 + Ar + B] = 0$$

よって，任意の系列 $\{c_1, c_2, \ldots\}$ は

$$c_n = \alpha r^n + \beta nr^n \qquad (\text{重根 } r \text{ をもつ場合})$$

となる（α，β の決定法は異なる 2 根をもつ場合と同様なので省略）．

9 期待値

★ 有限個の標本からなる標本空間 $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ から値を取る確率変数 X の期待値 $\mathrm{E}[X]$ は

$$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} x_k \Pr(X = x_k)$$

で与えられる．$\mathrm{E}[X]$ は，確率的なゲームを行い，その結果 X 円もらえるとき，平均いくらもらえるか，を X がとり得る値で場合分けをして計算していると考えれば良い．

★ 上記の X と関数 $f(x)$ に対して $Y = f(X)$ とすると Y も確率変数となる．例えば，$f(x) = x^2$ なら $Y = X^2$．Y の期待値 $\mathrm{E}[Y]$ は

$$\mathrm{E}[Y] = \mathrm{E}[f(X)] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \Pr(X = x_k)$$

で与えられる．$\mathrm{E}[Y]$ は，確率的なゲームを行い，その結果 $X = x$ となったとき，$y = f(x)$ 円もらえる，と考えれば良い．例えば，定数 a に対して $f(x) = ax^2$ ならば

$$\mathrm{E}[aX^2] = \sum_{k=1}^{n} ax_k^2 \Pr(X = x_k) = a \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \Pr(X = x_k) = a\mathrm{E}[X^2]$$

★ 確率変数 X，Y の期待値のうち，少なくとも一方が有限ならば，それらの和の期待とは期待値の和となる．

$$\mathrm{E}[X+Y]=\mathrm{E}[X]+\mathrm{E}[Y]$$

問 9.1　1 から n までの自然数が書かれたカードがそれぞれ 2 枚，合計 $2n$ 枚ある．この $2n$ 枚のカードを無作為に並べたとき，(i) 1 が書かれた 2 枚のカードが隣り合っている確率，ならびに (ii) 同じ数字が書かれた 2 枚のカードが隣り合っているような 2 枚のカードの組数の期待値を求めよ．

問 9.2　それぞれ，自然数 1 から n が書かれた n 枚 $(n \geq 3)$ のカードの中から m 枚 $(2 \leq m \leq n)$ のカードを無作為に選び，それら m 枚のカードに書かれている数字の中で k 番目 $(k=1,2,\ldots,m)$ に小さな数字を X_k とする．$\mathrm{E}[X_{m-1}]$ を求めよ．

問 9.3　m 人が以下の規則で勝ち抜き戦を行う．まず，m 人の中から二人をくじ引きで選び勝負する．敗者は除かれる．残った $m-1$ 人の中から二人をくじ引きで選び勝負し，敗者を除く，という操作を繰り返す．残った者が一人になったところで勝ち抜き戦は終了する．引き分けはなく，各人の力量は互角であるとき，勝ち抜き戦が終了するまでに，ある一人が勝つ回数の期待値を求めよ．

★ 期待値の計算では等差級数の和や等比級数の和

$$\text{等差級数の和}=\frac{(\text{初項}+\text{最終項})\times\text{項数}}{2},\qquad \text{等比級数の和}=\text{初項}\times\frac{1-\text{公比の項数乗}}{1-\text{公比}}$$

に加えて

$$\sum_{k=0}^{n}k^2 \qquad \sum_{k=0}^{n}k^3 \qquad \sum_{k=0}^{n}kp^k, \qquad \sum_{k=0}^{n}k^2p^k$$

のような和の計算が必要となる場合が多い．これらは覚えてもすぐに忘れてしまうので，必要に応じて，導くことができるようにしておくことが肝要．

★ 例えば $(k+1)^3-k^3=3k^2+3k+1$ を利用して

$$(n+1)^3=\sum_{k=0}^{n}\{(k+1)^3-k^3\}=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\sum_{k=0}^{n}k+\sum_{k=0}^{n}1=3\sum_{k=0}^{n}k^2+3\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)$$

より次式を得る．

$$\sum_{k=0}^{n}k^2=\frac{(n+1)^3}{3}-\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n+1}{3}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

問 9.4　次式を導け．

$$\sum_{k=0}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

★ $S=\sum_{k=0}^{n}kp^k$ $(p\neq 1)$ は $S-pS$ を考えても良いが，以下のように微分を使って求める方法もある（和の範囲に注意）．

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}kp^k&=\sum_{k=1}^{n}kp^k=p\cdot\sum_{k=1}^{n}kp^{k-1}=p\cdot\sum_{k=1}^{n}\frac{d}{dp}p^k=p\cdot\frac{d}{dp}\sum_{k=1}^{n}p^k=p\cdot\frac{d}{dp}p\cdot\frac{1-p^n}{1-p}=p\cdot\frac{1-(n+1)p^n+np^{n+1}}{(1-p)^2}\\&=\frac{p}{(1-p)^2}\cdot[1-(n+1)p^n+np^{n+1}]\end{aligned}$$

なお，$\frac{d}{dp}\frac{p-p^{n+1}}{1-p}$ はそのまま微分するのではなく，$f(p)(1-p)=p-p^{n+1}$ の両辺を微分して $f'(p)$ について解くこと（分数の微分公式は計算間違えの元になるので，使ってはならない．これを機会に忘れてしまうこと）．

問 9.5　目の数が $1,2,\ldots,n$ である n 面体のサイコロを 3 回投げ，出た目の数の最小値を X とする．このとき $\lim_{n\to\infty}\mathrm{E}[X]/n$ を求めよ．

10　条件付き期待値

★ 確率変数 X の期待値 $\mathrm{E}[X]=\sum_{k=1}^{n}x_k\Pr(X=x_k)$ を計算する際，$\Pr(X=x_k)$ を

$$\Pr(X=x_k)=\Pr(A)\Pr(X=x_k\mid A)+\Pr(\overline{A})\Pr(X=x_k\mid\overline{A})$$

の右辺を用いて求めると

$$\mathrm{E}[X]=\Pr(A)\sum_{k=1}^{n}x_k\Pr(X=x_k\mid A)+\Pr(\overline{A})\sum_{k=1}^{n}x_k\Pr(X=x_k\mid\overline{A})$$

を得る．ここで出てくる $\sum_{k=1}^{n}x_k\Pr(X=X_k\mid A)$ は事象 A が起こったという条件のもとでの X の条件付き期待値といい，$\mathrm{E}[X\mid A]$ とかく．すなわち

$$\mathrm{E}[X]=\Pr(A)\cdot\mathrm{E}[X\mid A]+(1-\Pr(A))\cdot\mathrm{E}[X\mid\overline{A}]$$

★ 一般に，標本空間 Ω を排反な事象 $A_1,A_2,\ldots$ に分割したとき，

$$\mathrm{E}[X]=\sum_{n=1}^{\infty}\Pr(A_n)\mathrm{E}[X\mid A_n]$$

が成立する．

問 10.1　それぞれ，自然数 1 から n が書かれた n 枚 $(n\geq 3)$ のカードの中から 1 枚のカードを無作為に選び，そこに書かれている数字が m であれば，自然数 1 から m が書かれた m 枚のカード作った上，この m 枚のカードから無作為に 1 枚を選び，そこに書かれている数字を X とする．X の期待値を求めよ．

11　演習問題

1 回目

問 11.1　次の条件を満たす正の整数全てからなる集合を S とする.「各桁の数字は異なり，どの二つの桁の数字の和も 9 にならない」ただし，一桁の正の整数は S に含まれているとする．(i) S の要素の内，4 桁のものは何個あるか．(ii) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ．

問 11.2　りんご 6 個とみかん 4 個を A, B, C の 3 人で分けるとき，次の分け方は何通りあるか．ただし同じ種類の果物は区別しない．(i) 3 人ともりんごを少なくとも 1 個もらい，みかんも少なくとも 1 個もらう．(ii) 3 人とも少なくとも 1 個の果物をもらう．

問 11.3　半径 1 の円周上に $4n$ 個の点 $P_0,P_1,\ldots,P_{4n-1}$ が時計回りに等間隔で並んでいる．(i) 線分 P_0P_k の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ．(ii) $4n$ 個の点 $P_0,P_1,\ldots,P_{4n-1}$ から相異なる 3 点を頂点に持つ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ．

問 11.4　場所 1 から場所 n に異なる n 個のものが並んでいる．これらを並べ替えてどれもが元の位置にならないようにする方法の総数を $D(n)$ とする．定義より $D(2)=1$, $D(3)=2$．(i) $n\geq 4$ に対して $D(n)$，$D(n-1)$，$D(n-2)$ の間の関係式を導け．(ii) 無作為に並べ替えたとき，どれもが元の位置にならない確率 p_n $(n\geq 2)$ を求めよ．(iii) $\lim_{n\to\infty}p_n$ を求めよ．

2 回目

問 11.5　N は正の整数とし，p は $1/2\leq p\leq 1$ を満たす実数とする．A，B の二人が引き分けのないゲームで対戦し，続けて $2N+1$ 試合を行う．それぞれの試合で A が勝つ確率は p で，それぞれの試合の勝敗は互いに独立で

あるとする．(i) A が $2N+1$ 試合のうち，ちょうど k 回勝つ確率を $f(k)$ とする．このとき $\frac{1-p}{p}f(N+1)=f(N)$ および $\frac{1-p}{p}f(N+2)\geq f(N-1)$ を示せ．(ii) $2N+1$ 試合のうち，勝った試合数の多い方を優勝とし，A，B が優勝する確率を p_A，p_B とする．$\frac{1-p}{p}p_A\geq p_B$ を示せ．(iii) $p_A\geq p$ を示せ．

問 11.6　O 大学には 4 つの食堂があり，A さんと B さんは，それぞれ毎日正午に，前日とは異なる 3 つの食堂のうち一つを無作為に選んで昼食を取ることにしている．最初の日，二人は別々の食堂で食事を取ったとして，以下の確率を求めよ．(i) n 日後に，はじめて二人が食堂で出会う確率 p_n．ただし $n\geq 1$．(ii) n 日後に，二人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率 r_n．ただし $n\geq 2$．

問 11.7　箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う．このとき，はじめから j 回目 $(j=1,2,\ldots,k)$ までに取り出したカードの番号の和を X_j とし，$X_1,X_2,\ldots,X_k$ のうちのどれかが k となる確率を $p_N(k)$ とする．$k\leq N$ のとき，$p_N(k)$ を N と k で表せ．

問 11.8　A，B の 2 名で次のゲームを行う．初めに A は k 個，B は $2n-k$ 個の玉をもっている．ただし k，n は自然数で $1\leq k\leq 2n-1$．1 ゲームごとに，勝者が敗者から玉を一つ取り上げる，ということを繰り返し，一方が破産するまで続ける．また，各ゲームにおいて，A が勝つ確率は p，B が勝つ確率は $1-p$ である．(i) $p=1/2$ のとき，A が破産する確率と B が破産する確率の比を求めよ．(ii) $k=n$ かつ $p=m/(m+1)$ （ただし $m\neq 1$）のとき，B が破産する確率は A が破産する確率の何倍か．

3 回目

問 11.9　1 枚の硬貨を表が 2 回続けて出るまで投げ続けるとき，投げる回数が n 回 $(n=2,3,\ldots)$ である確率を p_n としたとき，p_{n+2} を p_{n+1} と p_n を用いて表せ．

問 11.10　1 個の白玉と 2 個の赤玉が入っている壺がある．これから玉を一つ取り出し，取り出した玉に新たな玉を一つ加えて戻す．ただし，新たな玉の色は確率 p で取り出した玉と同色，確率 $1-p$ で取り出した玉と反対色にする．この試行を続けるとき，n 回目の試行で白玉が取り出される確率を p_n とする．(i) n 回目で取り出された玉が直前に新たに加えた玉か否かで場合分けすることにより，p_n が満たす漸化式を求めよ．(ii) $p<1$ のとき，$\lim_{n\to\infty}p_n$ を求めよ．

問 11.11　n を 2 以上の自然数とし，次の操作を考える．(1) それぞれ 1 から n までの自然数が書かれた合計 n 枚のカードを無作為に並べる (2) 1 枚目の札を手に取る (3) 2 枚目以降，n 枚目のカードまでを順に見ていき，手にしている札よりも大きな数が書かれたカードがあれば，そのたびに，手持ちのカードを捨て，大きな数字が書かれたカードに持ち替える．このとき，k 回持ち替える確率を $p_{n,k}$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$ とし，持ち替えた回数の期待値を $E(n)$ とする．(i) $p_{n,k}$，$p_{n-1,k}$，$p_{n-1,k-1}$ の関係を求めよ．($k=n-1$ とそれ以外で場合分けをすること）．(ii) $E(n)$ と $E(n-1)$ の間の関係を求めよ．

問 11.12　1 枚の硬貨に対して次の 2 種類の操作 A, B を考える．
A: 表を向いている場合はそのままにして，裏を向いているときは硬貨を投げて裏表を決める．
B: 裏を向いている場合はそのままにして，表を向いているときは硬貨を投げて裏表を決める．
(i) 表を向いている場合に A を行い，次に B を行ったのち，硬貨が表を向いている確率 p を求めよ．(ii) 裏を向いている場合に A を行い，次に B を行ったのち，硬貨が表を向いている確率 q を求めよ．(iii) 最初に硬貨を投げ，裏表を決めた後，操作 A，操作 B を $A,B,A,B,\ldots$ の順に，交互に n 回ずつ行った後，表を向いている確率 r_n を求めよ．

4 回目

問 11.13　A, B, C の 3 人が色のついた札を 1 枚ずつ持っている．はじめに，A, B, C の持っている札はそれぞれ赤，白，青である．A がサイコロを投げて，3 の倍数の目が出たら A と B は持っている札を交換し，その他の目が出たら A と C が札を交換する．この試行を n 回繰り返した後に赤い札を A, B, C が持っている確率を，それぞれ a_n, b_n, c_n とする．(i) $n \geq 2$ のとき，a_n, b_n, c_n を $a_{n-1}, b_{n-1}, c_{n-1}$ で表せ．(ii) a_n を求めよ．

問 11.14　最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている．その後，4 つの側面から一つの面を無作為に選び，その面が上面になるように置き直す操作を n 回繰り返す．なお，サイコロの向かい合う面の目の数の和は 7 である．(i) 最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ．(ii) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ．

問 11.15　サイコロを n 回投げて出た目を順に $X_1, X_2, \ldots, X_n$ とする．さらに $Y_1 = X_1$, $Y_k = X_k + 1/Y_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ によって $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ を定める．$(1+\sqrt{3})/2 \leq Y_n \leq 1+\sqrt{3}$ となる確率 p_n を求めよ．

問 11.16　片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある，この 3 枚を全て白を表にして（「白白白」）机の上に横に並べ，次の操作を行う．サイコロを振り，出た目が 1,2 であれば左端の板を裏返し，3,4 であれば真ん中の板を裏返し，5,6 であれば右端の板を裏返す．(i) 3 回操作を行った結果，左端のみ黒が表になる（「黒白白」）確率を求めよ．(ii) n 回操作を行った結果，3 枚とも表が白か（「白白白」）または真ん中のみ表が黒となる（「白黒白」）確率を求めよ．(iii) k を自然数とする．$2k+1$ 回操作を行った結果，3 枚のうち，表が黒である板が 1 枚である確率を求めよ．

5 回目

問 11.17　じゃんけんをして勝者が出し方によって定まる歩数だけ進む遊びがある．「グーで勝ったときは 3 歩，チョキで勝ったときは 6 歩，パーで勝ったときは 5 歩，進む」とし，負けた場合もしくはあいこの場合には動かないものとする．今，A，B 二人が予め決められた確率にしたがって，グー，チョキ，パーを出すものとする．B がどのような確率にしたがってグー，チョキ，パーを出しても，1 回のじゃんけんで A の歩数の期待値が B の歩数の期待値より小さくならないようにしたい．A はグー，チョキ，パーを出す確率をどのように決めればよいか．

問 11.18　サイコロを n 回振って，出た目を大きさの順に並べたとき，第 i 番目 $(i = 1, 2, \ldots, n)$ を X_i とする．期待値 $\mathrm{E}[X_1 + X_n]$ を求めよ．

問 11.19　1 から n までの相異なる n 個の自然数 $(n \geq 4)$ の中から無作為に二つ取り出し，大きい方を X_1，小さい方を Y_1 とする．次に残りの $(n-2)$ 個の自然数の中から無作為に二つ取り出し，大きい方を X_2，小さい方を Y_2 とする．(i) X_1 の期待値を求めよ．(ii) Y_2 の期待値を求めよ．

問 11.20　横一列に並んだ 9 つの座席があり，女子学生 m 人と男子学生 $9-m$ 人が無作為に座る．ただし $1 \leq m \leq 4$．左から 1 番目と 2 番目，2 番目と 3 番目，... のように考えると 8 個の座席の組ができる．$n = 1, 2, \ldots, 8$ に対し，確率変数 X_n を左から n 番目と $n+1$ 番目の座席に座る二人が男女の組み合わせのときは 1，そうでないときは 0 とする．(i) X_n と X_{n+1} $(n = 1, 2, \ldots, 8)$ が独立となるような m の値を求めよ．(ii) 8 つの座席の組のうち，男女の組である組数の期待値を m を用いて表せ．

6 回目

問 11.21　A，B の 2 名で次のゲームを行う．A，B はそれぞれ表に 1 から n までの数字が一つずつ書かれた n 枚のカードを持っている．A は全てのカードを表を下にして並べる．B は，A が並べたそれぞれのカードの前に自分のカードを表を上にして 1 枚ずつ並べる．次に A のカードを表向きにし，B は数字が一致したカードの枚数だ

け得点を得る．確率変数 X を B の得点とする．(i) B のカードのうち数字が 1 のものが一致する確率を p とする．$p=\sum_{k=1}^{n} a_k \Pr(X=k)$ と表すとき，a_k $(k=1,2,\dots,n)$ を求めよ．(ii) 期待値 $\mathrm{E}[X]$ を求めよ．

問 11.22　袋の中に白玉が 1 個，赤玉が 2 個入っている．この状態から始めて，次のような試行を繰り返す．袋の中から無作為に玉を一つ取り出し，それが白玉であれば袋の中に戻し，赤玉であればそれを戻さずに代わりに白玉を 2 個袋の中に入れる．k を 2 以上の自然数とする．ただし，$0<a<1$ を満たす数 a に対し，$\lim_{n\to\infty} na^n=0$ であることを用いて良い．(i) ちょうど k 回目の試行の後に，袋の中の玉の個数がはじめて 5 となる確率 $p(k)$ を求めよ．(ii) $\sum_{k=2}^{\infty} kp(k)$ を求めよ．

問 11.23　格子座標平面上の点 P は 1 秒毎に上下左右の 4 方向に同じ確率 1/4 で距離 1 だけ移動する．点 P が原点を出発してから n 秒後の位置と原点の距離の 2 乗の期待値を求めよ．

問 11.24　袋 A には白玉 1 個と黒玉 1 個が入っている．袋 B には白玉 m 個と黒玉 m 個が入っている．ただし m は自然数．各袋からそれぞれ 1 つの玉を無作為に取り出し，それらを取り出した袋とは異なる袋へ戻す，という操作を n 回繰り返したとき，袋 A に白玉 1 個と黒玉 1 個が入っている確率 p_n を求めよ．ただし n は自然数．

12　練習問題の略解と演習問題の答え

問 1.1.　(i) 奇数番目の並べ方 $5\times4\times3$，偶数番目は奇数番目の三つ以外なら何でも良いため 6×5，答えは 1800 (ii) 2520 (対偶を考えると (i) と同型に帰着)

問 1.2.　樹形図をイメージする，$6\times(1+2\times2\times1)=30$

問 1.3.　$\binom{100}{50}$

問 1.4.　10! 通りの順列の内，題意を満たすものは 4!3!3! 個につき一つ，$10!/(4!3!3!)=4200$

問 1.5.　(i) 補集合を考える，$10,000-10\times9\times9\times9=2710$ (ii) $A\cap B=\Omega-\overline{A\cap B}=\Omega-(\bar{A}\cup\bar{B})=\Omega-[\bar{A}+\bar{B}-(\bar{A}\cap\bar{B})]$，$10,000-[9^4+9^4-8^4]=974$

問 2.1.　条件は $1\le x_1<x_2-1<x_3-2<x_4-3<\cdots<x_k-(k-1)\le n-(k-1)$ と等価，よって $y_i=x_i-(i-1)$ とおくと $1\le y_1<y_2<\cdots<y_k\le n-(k-1)$，$\binom{n-k+1}{k}$

問 2.2.　条件は $(x_1+1)+(x_2+1)+\cdots+(x_k+1)=n+k$，$x_i\ge 0$ と等価，よって $y_i=x_i+1$ とおくと $y_1+y_2+\cdots+y_k=n+k$，$y_i\ge 1$，$\binom{n+k-1}{k-1}$

問 2.3.　(i) 3 (ii) 定員がなければ $2^6=64$，定員オーバは (6,0), (0,6) で 2 通り，(5,1) (1,5) で 12 通り，$64-(2+12)=50$，あるいは一つのボートに注目して $\binom{6}{4}+\binom{6}{3}+\binom{6}{2}=50$ (iii) $50/2=25$

問 3.1.　$(1-1)^n$ を二項展開して，k が奇数の項と偶数の項に分けてみよ．

問 3.2.　$\binom{n+1}{k+1}=\sum_{m=k}^{n}\#$(最大値が $m+1$，残りの k 個は $1,2,\dots,m$ から選ぶ) $=\sum_{m=k}^{n}\binom{m}{k}$

問 4.1.　同色の玉も区別して，取り出し方は $\binom{8}{3}=56$，色が重複しているのは，4 色 $\times 6=24$，$24/56=3/7$

問 4.2.　サイコロを区別して 36 通り，最初が 1,6 は各 3 通り，最初が 2,5 は各 4 通り，最初が 3,4 なら各 5 通り，$(6+8+10)/36=2/3$

問 4.3.　$\binom{k-1}{1}\binom{10-k}{1}/\binom{10}{3}=k(10-k)/120$

問 4.4.　$\Pr(A\cap B)=1-\Pr(\overline{A\cap B})=1-\Pr(\overline{A}\cup\overline{B})=1-\Pr(\overline{A})-\Pr(\overline{B})+\Pr(\overline{A}\cap\overline{B})$.

問 4.5.　(i)「X が偶数」は「全てが奇数以外」と等価，$1-\binom{5}{3}/\binom{10}{3}=11/12$ (ii) A を偶数，B を 5 の倍数とす

る．前問の結果より，$\Pr(10\text{ の倍数}) = \Pr(A \cap B) = 1 - \Pr(\overline{A}) - \Pr(\overline{B}) + \Pr(\overline{A} \cup \overline{B})$．$\Pr(\overline{A}) = 1 - 11/12 = 1/12$，$\Pr(\overline{B}) = \binom{8}{3}/\binom{10}{3} = 7/15$，$\Pr(\overline{A} \cap \overline{B}) = \binom{4}{3}/\binom{10}{3} = 1/30$，よって，$\Pr(10\text{ の倍数}) = 1 - 1/12 - 7/15 + 1/30$

問 5.1. $\Pr(\text{A の方が多い}) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n+1}{i}(1/2)^{n+1}\binom{n}{j}(1/2)^n = (1/2)^{2n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n+1}{n+1-i}\binom{n}{n-j} = (1/2)^{2n+1}\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=n-i+1}^{n}\binom{n+1}{n+1-i}\binom{n}{j} = (1/2)^{2n+1}\sum_{i=0}^{n+1}\sum_{j=i}^{n}\binom{n+1}{i}\binom{n}{j} = \Pr(\text{A は B 以下})$，$1/2$

問 5.2. $\Pr(A) = 1 - 2(1/2)^n = 1 - (1/2)^{n-1}$，$\Pr(\text{高々 1 回}) = (1/2)^n + n(1/2)^n = (n+1)(1/2)^n$．$\Pr(A \cap \text{高々 1 回}) = \Pr(\text{ 1 回}) = n(1/2)^n$，独立なら $n(1/2)^n = [1 - (1/2)^{n-1}] \cdot (n+1)(1/2)^n$． これを整理すると $n = [1 - (1/2)^{n-1}] \cdot (n+1)$ となり，$n + 1 = 2^{n-1}$ と等価，$n = 3$

問 6.1. $x_i y_i$ が奇数になる確率は $1/4$,
偶数になる確率は $3/4$，各 $x_i y_i$ は独立，$\sum_{k\text{ が偶数 }(k \le n)}\binom{n}{k}(3/4)^k(1/4)^{n-k} = [(3/4+1/4)^n + (3/4-1/4)^n]/2 = [1 + (1/2)^n]/2$

問 7.1. 取り出すカードが両面とも赤という事象を $R2$，色違いを RW，両面白を $W2$，とし，見えている面が赤である事象を E とする．$\Pr(RW \cap E) = (1/3)(1/2) = 1/6$, $\Pr(E) = \Pr(R2)\Pr(E \mid R2) + \Pr(RW)\Pr(E \mid RW) = 1/3 + 1/6 = 1/2$, よって $\Pr(RW \mid E) = \Pr(RW \cap E)/\Pr(E) = 1/3$

問 7.2. $A \cap B$ と $\overline{A} \cap B$ は排反であり，かつ，$(B \cap A) \cup (\overline{A} \cap B) = B$ である．よって $\Pr(\overline{A} \cap B) + \Pr(A \cap B) = \Pr(B)$ が成立．もし A，B が独立ならば $\Pr(\overline{A} \cap B) = \Pr(B) - \Pr(A \cap B) = \Pr(B) - \Pr(A)\Pr(B) = (1 - \Pr(A))\Pr(B) = \Pr(\overline{A})\Pr(B)$ より，事象 $\overline{A}$，B は独立．

問 7.3. 条件を満たす順列の総数は $n(n-1)/2$，一方，２番目が最も重い順列（この場合，条件は必ず満たされる）の総数は $n - 1$，よって $2/n$

問 7.4. $\sum_{i=1}^{5}\Pr(\text{ 1 枚目が } i)\Pr(\text{2 枚目が 3 以下} \mid \text{ 1 枚目が } i) = (1/6)(2/5) + (1/6)(2/5) + (1/6)(2/5) + (1/6)(3/5) + (1/6)(3/5) = 12/30 = 2/5$

問 7.5. $q_1 = p$，$q_n = q_{n-1}p + (1 - q_{n-1})(1 - p) = (2p-1)q_{n-1} + 1 - p$，$q_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2p-1)^n\ (n \ge 1)$

問 7.6. (i) $p_{n+1} = p_n \cdot (1/2) + p_{n-1} \cdot (1/2)$ (ii) $p_n = p_{n-1} \cdot (1/2) + (1 - p_{n-1}) \cdot 1$ (iii) 略 (iv) $p_n = 2/3 - (2/3)(-1/2)^{n+1}$

問 7.7. 最初に B, C のいずれか勝つかで場合分け．最初に B が勝ち，A が優勝するのは $(BAC)^n BAA$ のパターン，これがおこる確率 r_B は $r_B = \sum_{n=0}^{\infty}[(1/2)p(1-q)]^n(1/2)pq = (1/2)pq + [(1/2)p(1-q)]r_B$ 最初に C が勝ち，A が優勝するのは $(CAB)^n CAA$ のパターン，これがおこる確率 r_C は $r_C = \sum_{n=0}^{\infty}[(1/2)q(1-p)]^n(1/2)qp = (1/2)pq + [(1/2)q(1-p)]r_C$, $r_B + r_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{pq}{pq-p+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{pq}{pq-q+2}$

問 9.1. (i) $(2n-1)/\binom{2n}{2} = 1/n$ (ii) X_i を番号 i が隣り合っているとき 1，そうでないとき 0 の値を取る確率変数とする．求める期待値は $\mathrm{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_n] = 1$

問 9.2. $X_{m-1} = i\ (i = m-1, m, \ldots, n-1))$ となる確率は $\binom{i-1}{m-2}(n-i)/\binom{n}{m}$，よって $\mathrm{E}[X_{m-1}] = \sum_{i=m-1}^{n-1} i\binom{i-1}{m-2}(n-i)/\binom{n}{m} = (m-1)\sum_{i=m-1}^{n-1}\binom{i}{m-1}(n-i)/\binom{n}{m}$，ここで $\sum_{i=m-1}^{n-1}\binom{i}{m-1}(n-i) = (n+1)\sum_{i=m-1}^{n-1}\binom{i}{m-1} - \sum_{i=m-1}^{n-1}(i+1)\binom{i}{m-1} = (n+1)\binom{n}{m} - m\sum_{i=m-1}^{n-1}\binom{i+1}{m} = (n+1)\binom{n}{m} - m\sum_{i=m}^{n}\binom{i}{m} = (n+1)\binom{n}{m} - m\binom{i+1}{m+1}$，よって $\mathrm{E}[X_{m-1}] = (m-1)[(n+1)\binom{n}{m} - m\binom{i+1}{m+1}]/\binom{n}{m} = (m-1)(n+1)/(m+1)$

問 9.3. n 番目の人が勝つ回数を X_n とすると $X_1 + X_2 + \cdots + X_m = m - 1$ なので $\mathrm{E}[X_1] + \cdots + \mathrm{E}[X_m] = m - 1$ である．$X_1, X_2, \ldots, X_n$ は対等なので $\mathrm{E}[X_1] = \cdots = \mathrm{E}[X_n]$．よって $\mathrm{E}[X_n] = (m-1)/m$.

問 9.4. $(k+1)^4 - k^4$ を元にして考えよ．

問 9.5. $\Pr(X > k) = (n-k)^3/n^3\ (k = 1, 2, \ldots, n-1)$，$\Pr(X = k) = \Pr(X > k-1) - \Pr(X > k) = [(n-k+1)^3 - (n-k)^3]/n^3 = [3k^2 - (6n+3)k + 3n^2 + 3n + 1]/n^3$，$\mathrm{E}[X]/n = \sum_{k=1}^{n} k[3k^2 - (6n+3)k + 3n^2 + 3n + 1]/n^4 = \sum_{k=1}^{n}[3k^3 - (6n+3)k^2 + k(3n^2 + 3n + 1)]/n^4$ より $\sum_{k=1}^{n}[3k^3 - (6n+3)k^2 + 3kn^2]$ における n^4 の係数が答え，

よって，$3(1/4) - 6(2/6) + 3(1/2) = 1/4$

問 10.1. $\Pr(X = k) = \sum_{m=k}^{n}(1/n)(1/m)$，$\mathrm{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} k \sum_{m=k}^{n}(1/n)(1/m) = \sum_{m=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} k(1/m)(1/n) = \sum_{m=1}^{n}[m(m+1)/2]\cdot(1/m)(1/n) = (1/2n)\sum_{m=1}^{n}(m+1) = (n+3)/4$

問 11.1. (i) 1728 個 (ii) 8695

問 11.2. (i) 30 通り (ii) 318 通り

問 11.3. (i) $n \le k \le 3n$ (ii) $2n(n+1)(n+2)/3$

問 11.4. (i) $D(n) = (n-1)\{D(n-1) + D(n-2)\}$ (ii) $p_n = \sum_{k=2}^{n}(-1)^k/k!$ (iii) $\lim_{n\to\infty} p_n = 1/e$

問 11.5. 略

問 11.6. (i) $p_n = (2/9)(7/9)^{n-1}$ (ii) $r_n = 2(4n-1)(7/9)^{n-3}/243$

問 11.7. $p_N(k) = (N+1)^{k-1}/N^k$

問 11.8. (i) $2n - k : k$ (ii) m^n 倍

問 11.9. $p_{n+2} = p_{n+1}/2 + p_n/4$

問 11.10. (i) $p_n = \frac{n+2p}{n+2}p_{n-1} + \frac{1-p}{n+2}$ （もし $p = 1$ ならば $p_n = p_{n-1} = p_1 = 1/3$）(ii) 1/2 （$a_n = (n+2p)/(n+2)$ としたとき $\lim_{n\to\infty} a_n a_{n-1}\cdots a_2$ の評価が必要，これは $\log a_k < a_k - 1$ を利用して示す）

問 11.11. (i) $p_{n,0} = p_{n-1,0}(n-1)/n$，$k = 1, 2, \ldots, n-2$ のとき $p_{n,k} = p_{n-1,k-1}/n + p_{n-1,k}(n-1)/n$，$k = n-1$ のとき $p_{n,n-1} = p_{n-1,n-2}/n$，(ii) $E(n) = E(n-1) + 1/n$

問 11.12. (i) $p = 1/2$ (ii) $q = 1/4$ (iii) $r_n = 1/3 + (1/6)(1/4)^n$

問 11.13. (i) $a_n = (1/3)b_{n-1} + (2/3)c_{n-1}$，$b_n = (1/3)a_{n-1} + (2/3)b_{n-1}$，$c_n = (2/3)a_{n-1} + (1/3)c_{n-1}$ (ii) n が奇数なら $a_n = 1/3 - (1/3)^{(n+1)/2}$，偶数なら $1/3 + (2/3)(1/3)^{n/2}$

問 11.14. (i) $1/6 + (1/3)(-1/2)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (ii) 7/2

問 11.15. $(1/5)[1 - (1/6)^n]$

問 11.16. (i) 7/27 (ii) $(1/4)[1 + (-1/3)^n + 2(1/3)^n]$ (iii) $3/4 + (1/4)(1/9)^k$

問 11.17. グー，チョキ，パーをそれぞれ 3/7, 5/14, 3/14 の確率で出せば良い.

問 11.18. 7

問 11.19. (i) $2(n+1)/3$ (ii) $(n+1)/3$

問 11.20. (i) $m = 3$ (ii) $2m(9-m)/9$

問 11.21. (i) $a_k = k/n$ (ii) $\mathrm{E}[X] = 1$

問 11.22. (i) $p(k) = (2/5)[(3/4)^{k-1} - (1/3)^{k-1}]$ (ii) 11/2

問 11.23. n

問 11.24. $p_n = (m/(2m+1))(-1/(2m))^n + (m+1)/(2m+1)$