連続時間マルコフ連鎖と即時系に対する通信トラヒック理論

Continuous-Time Markov Chains and Teletraffic Theory for Loss Systems

滝根 哲哉*

Tetsuya Takine

目 次

*連絡先：
大阪大学大学院工学研究科電気電子情報通信工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
電話：(06)6879-7740　FAX：(06)6879-7684　電子メール：takine@comm.eng.osaka-u.ac.jp
URL：http://www2b.comm.eng.osaka-u.ac.jp/~takine/

1　はじめに

通信ネットワークは多数の利用者が共有する回線や交換機からなるシステムである．回線の容量や，交換機において一時的に情報を蓄積するバッファの容量は高々有限であり，これらの資源に対する利用要求の発生は，予めスケジュールされたものではない．それゆえ，個々の利用者が通信ネットワークを利用する際，必ずしもこれらの資源を直ちに利用できるとは限らない．そこで，利用者が満足できる通信サービス品質（例えば，電話をかけたとき 99%の確率で回線が確保できる）を提供するためにはどの程度，資源を敷設しておけば良いかという問題が生じる．

通信ネットワークにおける交換方式は**回線交換型**（circuit switching）と**パケット交換型**（packet switching）に大別される．回線交換型では，送信要求（呼）が発生すると，実際に送信を開始する前に，必要な帯域（回線）を送り手と受け手の間で確保し，その後，送信が開始される．一方，パケット交換型では送り手は送信要求と同時に，受け手情報を含む予め定められたパケットと呼ばれる形式でデータを送出する．これらのパケットは，各交換機で一旦蓄積され，パケットがもつ受け手情報に従って，順番に適当な回線へ送り出される．

一般に，回線交換網では，送信要求が発生したとき，即座に通信網の資源（回線）を要求し，もし，資源が確保できなければ送信要求そのものが失われる．一方，パケット交換網では即座に資源（回線）が確保できない場合は，バッファで一時的に待ち，順次，処理されていくと見ることが出来る．このような観点から通信ネットワークは**即時系**（loss system）と**待時系**（delay system）に分類することができる．即時系での主な性能指標は，資源が確保できず送信要求が失われる確率であり，この確率は**呼損率**（loss probability）と呼ばれる．一方，待時系での主な性能指標は,（平均）遅延時間である．実際には待時系であってもバッファ容量は有限であるため，バッファ溢れによるパケットの棄却が生じる可能性がある．そのため，必要なバッファ容量を見積もるためのパケット棄却率も関心のある性能指標である．

このような性能指標を量的に見積もるための数学的道具に**待ち行列理論**（queueing theory）がある．待ち行列理論は，共有資源に対する利用要求が確率的に発生するという仮定の下で，資源競合問題を抽象化した数学モデルの構築と解析に関する理論である．それゆえ，上記のような問題に対して，抽象化されたモデルを通して，システムの定量的な評価を行い，問題解決への指針を与えるという役割を担っている．通信ネットワークへの応用を意識したとき，待ち行列理論は**通信トラヒック理論**（teletraffic theory）と呼ばれており，電話網の設計問題を解決するための枠組として，20 世紀初頭に研究が開始されている．それ以降，パケット交換網，衛星通信，LAN，狭帯域 ISDN，広帯域 ISDN（ATM）, インターネット，携帯電話網などの新しい通信ネットワークの出現に伴い新しいモデルが導入され，理論の発展が加速されてきた．

本稿では即時系に対する通信トラヒック理論を解説する．以下では，若干の準備をした上で，連続時間マルコフ連鎖の基本的性質を概観する．さらに可逆性ならびに準可逆性について説明した後，対称な待ち行列の定義と性質を概観する．これらの結果を踏まえて，即時系に対する通信トラヒック理論の概要を説明する．

2　準備 [11]

待ち行列理論において扱われる確率モデルは待ち行列モデルと呼ばれる．待ち行列モデルとは共有の資源であるサーバと待合室からなるシステムに外部から客が到着し，これらの客はシステム内で暫く滞在した後，システムを去るというものである．通信ネットワークにおける応用では客はパケットや呼に対応し，サーバと待合室はそれぞれ回線とルータや交換機内のバッファに対応する．

一般に待ち行列モデルは次の五つの要素からなる．

1. 到着過程（パケットや呼の発生時点に関する統計的情報）
2. サービス時間分布（パケットの伝送時間あるいは呼の保留時間に関する統計的情報）
3. サーバ数（回線の数）
4. システム容量（ルータや交換機内で保持できるパケットや呼の最大数）
5. サービス規律（ルータや交換機内のパケットや呼の送信順序を定める規則）

このような要素からなる待ち行列モデルを記述する方法として**ケンドールの記法**（Kendall’s notation）が広く用いられている．これは，通常 $A/B/c/N$ の形をしており，それぞれ，到着間隔分布／サービス時間分布／サーバ数／システム容量を示している．A，B に関しては M（指数分布），D （一定分布），E_k（k 次のアーラン分

布），H_k（k 次の超指数分布），G（一般分布：特定の分布を仮定しない），GI（独立同一分布：特定の分布は仮定しないが，到着間隔あるいはサービス時間が独立で同一の分布に従うことを強調したもの）などが用いられる．システム容量が無限大の場合は単に $A/B/c$ と書かれる．サービス規律は通常，先着順サービス（利用要求を到着順に処理するサービス規律）が仮定されており，**FCFS** (First-come, First-served) と書かれる.[1]サービス規律を明示する場合は，FCFS $A/B/c$ のように，この記号の前に書くことが多い.

待ち行列モデルにおいて興味のある性能指標には，客の待ち時間やシステム内の客数（以下では系内客数と呼ぶ）などがある．客の到着あるいはサービス時間が確率的に定まる場合，これらの性能指標は確定的な値ではなく**確率変数**（random variable）となる．確率変数とは事象を数値で表現したものであり，例えば，時刻 t における系内客数を $L(t)$ としたとき，時刻 t に系内客数が j 人であるという事象は $\{L(t)=j\}$ で記述され，この事象が起こる確率を $\Pr(L(t)=j)$ と書く．

確率変数 X の定義域を $\mathcal{S}$ とする．すなわち $\Pr(X\in\mathcal{S})=1$ である．定義域 $\mathcal{S}$ が**可算**（countable）である場合 X は離散確率変数と呼ばれ，そうでない場合は連続確率変数と呼ばれる．連続確率変数 X は，ほとんど全ての $x\in\mathcal{S}$ に対して $\Pr(X=x)=0$ である．すなわち $\Pr(X=x)>0$ となる $x\in\mathcal{S}$ は高々可算個しか存在しない．

確率変数 X と Y に対して $\{X\le x\}$ という事象と $\{Y\le y\}$ という事象が同時に起こる確率 $\Pr(X\le x, Y\le y)$ を結合確率という．さらに事象 $\{X\le x\}$ が起こったという条件の下で事象 $\{Y\le y\}$ が起こる確率を条件付き確率といい $\Pr(Y\le y \mid X\le x)$ と書く．結合確率は条件付き確率を用いて以下のように表現できる．

$$\Pr(X\le x, Y\le y)=\Pr(X\le x)\Pr(Y\le y\mid X\le x)$$

もし，結合確率 $\Pr(X\le x, Y\le y)$ が $\Pr(X\le x)\Pr(Y\le y)$ に等しいならば，確率変数 X と Y は**独立**（independent）であるといわれ，$\Pr(Y\le y\mid X\le x)=\Pr(Y\le y)$ となる．

離散確率変数 X の**平均**（mean）$E[X]$ は

$$E[X]=\sum_{x\in\mathcal{S}} x\Pr(X=x) \tag{1}$$

で与えられる．$E[X]$ は X の**期待値**（expectation）とも呼ばれる．また，実数 $\mathcal{R}$ を定義域にもつ連続確率変数 X は**分布関数**（distribution function）

$$F(x)=\Pr(X\le x)$$

によって特徴付けられる．$F(x)$ は非減少関数で $F(\infty)=1$ である．特に

$$\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=F(x)$$

なる $f(x)$ が存在するとき，$f(x)$ は X の**密度関数**（density function）と呼ばれる．密度関数 $f(x)$ は $F(x)$ が微分可能である場合 $f(x)=dF(x)/dx$ である．また Δx を微小な正数としたとき，

$$f(x)\Delta x=\Pr(x<X\le x+\Delta x)+o(\Delta x)$$

という確率的意味を持つ．さらに定義から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=F(\infty)=1 \tag{2}$$

であり，これは確率の和が 1 であることと等価である．密度関数 $f(x)$ をもつ連続確率変数 X の期待値 $E[X]$ は

$$E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

で与えられる．もし $\Pr(X<0)=0$ ならば，X の**補分布** (complementary distribution) $F^C(x)=\Pr(X>x)=1-F(x)$ を用いて

$$E[X]=\int_{0}^{\infty} F^C(x)dx$$

[1]FIFO (First-in, First-out) と呼ばれることもある.

と書くことが出来る．

定数 c_1，c_2 と確率変数 X，Y に対して，期待値は次の性質を持つ．

$$E[c_1X + c_2Y] = c_1E[X] + c_2E[Y], \tag{3}$$

また，もし，確率変数 X と Y が独立ならば

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

が成立する．さらに，連続確率変数 X と関数 $u(x)$ に対して

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)f(x)dx \tag{4}$$

である．離散確率変数 X の場合，式 (4) は，

$$E[u(X)] = \sum_{x\in\mathcal{S}} u(x)\Pr(X = x) \tag{5}$$

である．$\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ のとき，式 (4) と式 (5) をまとめて

$$E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x)dF(x)$$

という記法を用いる[2]．この記法を用いれば，X が連続か離散かという区別をせずに統一的に期待値を表すことができる．特に，$u(x) = x^n$ のとき $E[u(X)] = E[X^n]$ は $\boldsymbol{n}$ **次積率**（the nth moment）と呼ばれる．

最後に**分散** (variance) を定義する．確率変数 X の分散 $\mathrm{Var}(X)$ は

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

で与えられる．分散は確率変数の取る値が平均からどの程度離れやすいかを示す指標であり，最初の等号から非負の値を取ることが分かる．また，$\sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ は**標準偏差**（standard deviation）と呼ばれる．

3　リトルの公式 [11]

最初に述べたように，待ち行列モデルとは，システムの外部から客が到着し，システム内で一時的に滞在した後，システムを去る，という動作を表現したモデルである．よって，時刻 t におけるシステム内の客数，すなわち系内客数を $L(t)$ とし，$A(0,t]$ を区間 $(0,t]$ の間にシステムに到着した客数，$D(0,t]$ を区間 $(0,t]$ の間にシステムを離脱した客数とすると，

$$L(t) = L(0) + A(0,t] - D(0,t] \tag{6}$$

という関係を満たすモデルを対象としていることになる．ここで A_n を n 番目に到着した客の到着時刻とし，$N(t) = \max\{n; A_n \le t\} = A(0,t]$ を時刻 t までに到着した客の総数とすると，単位時間当たりに到着する平均客数，すなわち，平均到着率 λ は

$$\lambda = \lim_{t\to\infty} \frac{N(t)}{t}$$

で与えられる．

最も興味ある量は平均系内客数 L と平均系内滞在時間 W である．W_n $(n = 1, 2, \ldots)$ を時刻 0 以降，n 番目に到着した客の系内滞在時間とすると，L と W はそれぞれ

$$L = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt, \qquad W = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} W_n$$

で与えられる．ここで L は十分に長い間，システムを観測したときの累積客数の平均であり，時間平均と呼ばれる．一方，W は滞在時間の総和を客数で割った平均であり，客平均と呼ばれる．

一般に式 (6) を満たすモデルにおける平均系内客数 L と平均系内滞在時間 W の間には**リトルの公式**（Little's formula）と呼ばれる非常に単純な関係が成立する．

[2] Riemann-Stieltjes 積分と呼ばれる．

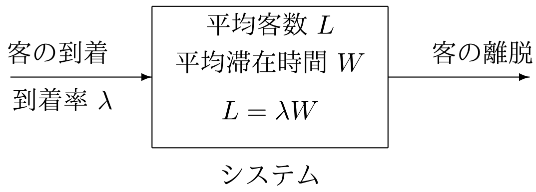

図 1: リトルの公式

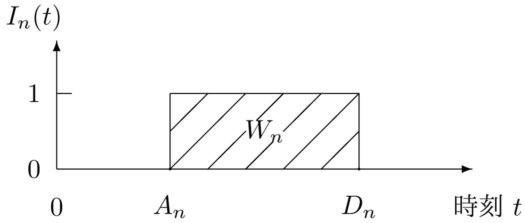

図 2: W_n と $I_n(t)$ の関係

定理 3.1 (リトルの公式) L，λ，W が全て有限である場合，これらの間にはサービス順序によらず次式が成立する．

$$L = \lambda W \tag{7}$$

リトルの公式がなぜ成立するかを見るために，若干の準備を行う．まず，A_n を n 番目の客の到着時刻，$D_n = A_n + W_n$ を n 番目の客の離脱時刻とする．ここで指示関数 $I_n(t)$ を次式で定義する．

$$I_n(t) = \begin{cases} 1, & n \text{ 番目の客が時刻 } t \text{ に系内にいる場合} \\ & \quad \text{（すなわち } A_n \leq t < D_n \text{ のとき）} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

定義より，W_n ならびに $L(t)$ はそれぞれ $I_n(t)$ を用いて

$$W_n = \int_0^\infty I_n(t)dt, \qquad L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(t)$$

で与えられる．図 2 に W_n と $I_n(t)$ の関係を示す．

以上の準備の下でリトルの公式がなぜ成立するかを見ていく．今，空のシステムからスタートし（$L(0) = 0$），$L(T) = 0$，すなわちシステムが空であるような時刻 T を考える．図 3 は時刻 T までに到着した 5 人の客が全て時刻 T までに離脱し，時刻 T における系内客数が 0 である場合を示している[3]．

時刻 T までに到着した全ての客はシステムを離脱しているので

$$\int_0^\infty I_n(t)dt = \int_0^T I_n(t)dt, \qquad n = 1, \ldots, N(T)$$

が成立する．さらに時刻 T 以降に到着する客，すなわち，$n > N(T)$ なる n に対しては，時間区間 $[0, T]$ において $I_n(t) = 0$ である．よって

$$\int_0^T L(t)dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} I_n(t)dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{N(T)} I_n(t)dt = \sum_{n=1}^{N(T)} \int_0^T I_n(t)dt = \sum_{n=1}^{N(T)} W_n$$

を得る．すなわち客数の時間累積和は系内滞在時間の総和に等しい（図 3 参照）．よって，時間区間 $[0, T]$ における平均系内客数と平均系内滞在時間の間には

$$\frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt = \frac{N(T)}{T} \cdot \frac{1}{N(T)} \sum_{n=1}^{N(T)} W_n$$

[3] この図ではサービス規律が後着順であると仮定している．

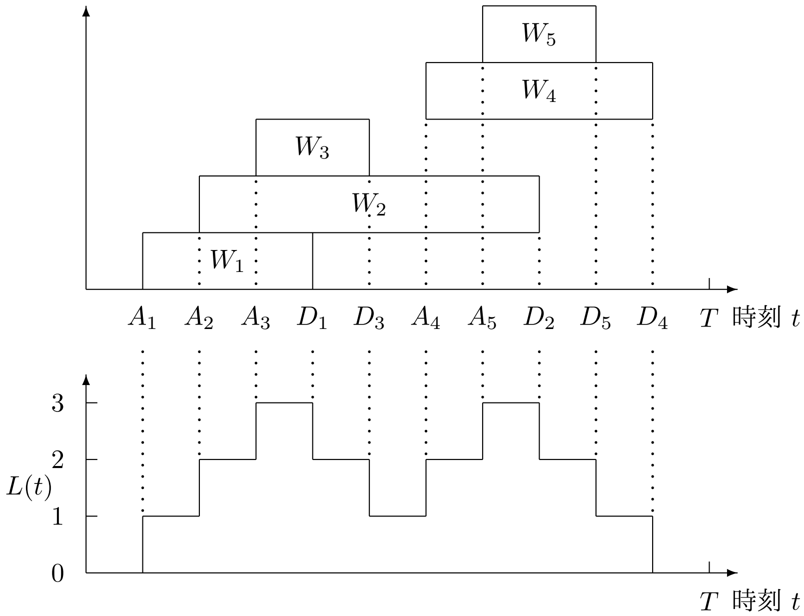

図 3: 客数の時間累積和と系内滞在時間の総和

が成立する．ここで $N(T)/T$ は時間区間 $[0,T]$ における平均到着率である．

一方，任意に選ばれた時刻 t においては

$$\int_0^t L(\tau)d\tau = \sum_{n=1}^{N(t)} W_n + X_E$$

である．ここで X_E は誤差の項を表現している．時刻 t における系内客数 $L(t)$ が正ならば，ある n（$\leq N(t)$）に対して $\int_0^t I_n(\tau)d\tau < W_n$ となるので誤差の項 X_E は負となる．t で両辺を割ると

$$\frac{1}{t}\int_0^t L(\tau)d\tau = \frac{N(t)}{t}\frac{1}{N(t)}\sum_{n=1}^{N(t)} W_n + \frac{X_E}{t}$$

を得る．もし

$$\lim_{t\to\infty}\frac{X_E}{t} = 0$$

ならば，$t \to \infty$ とすることにより式 (7) を得る．ここで仮定した $\lim_{t\to\infty} X_E/t = 0$ は 十分時間が経った後にも誤差の項 X_E が高々有限の値に押えられていることと等価である．すなわち，いかなる時刻においても系内に滞在している客が離脱するまでの時間の和が有限であれば，この条件が成立する．実際の安定なシステムへの応用では，無条件にリトルの公式が成立すると考えても支障はない．

ここで考えた「システム」は待ち行列モデル全体を意味する必要はない．例えば，待合室のみをシステムと見なせば，平均待ち客数 L_q と平均待ち時間 W_q の間には $L_q = \lambda W_q$ が成立する．また，サーバ部分のみをシステムと見なすこともできる．これを 平均到着率 λ，平均サービス時間 h をもつ安定な $G/G/c$ を対象に考えてみる．$G/G/c$ が安定ならば到着した客は全てサービスされるので，サーバへは単位時間当たり平均 λ 人の客が到着する．また，サーバでの平均滞在時間は平均サービス時間 h に等しい．よって，リトルの公式より，サーバにいる，すなわちサービス中の平均客数は λh で与えられる．通常，$\rho = \lambda h$ と記し，ρ は**トラヒック強度**（traffic intensity）と呼ばれる．

特に $c = 1$，すなわち $G/G/1$ の場合，サービス中の客は高々 1 人なので，この結果をサーバが稼働している確率を用いて表現すると，

$$\lambda h = 0\text{ 人} \times \Pr(\text{サーバが休止}) + 1\text{ 人} \times \Pr(\text{サーバが稼働})$$

となる．よって，単一サーバシステムの場合，$\rho = \lambda h$ は Pr(サーバが稼働) という確率を与える．このため，単一サーバシステムの場合，ρ は**利用率**（utilization factor）とも呼ばれる．一般に単一サーバをもつシステムが安定であるための条件は $\rho < 1$ である.[4]

4 ポワソン過程と指数分布 [11]

待ち行列理論で用いられる到着過程の内，最も基本的なものはランダムな到着である．ランダムな到着を数学的に表現するため次のような状況を考える (高橋 1995)．時間区間 $(0, T]$ に K 人の客がでたらめに到着すると仮定する．すなわち，それぞれの客は他の客とは独立に時間区間 $(0, T]$ 内で一様分布に従って到着時点を選ぶと仮定する．この結果，幅 x をもつ任意に選ばれた区間に到着がある確率は区間の幅だけに依存する．すなわち，ある客の到着時刻を τ としたとき，τ が時間区間 $(y, y+x]$ に含まれる確率は $\Pr(\tau \in (y, y+x] \subset (0, T]) = x/T$ で与えられ，区間の位置を表す y の値とは独立である．

$A(y, y+x]$ を時間区間 $(y, y+x] \subset (0, T]$ に到着する客数を表す確率変数とする．それぞれの客は互いに独立に到着時点を選ぶので，

$$\Pr(A(y, y+x] = k) = \frac{K!}{k!(K-k)!} \left(\frac{x}{T}\right)^k \left(1 - \frac{x}{T}\right)^{K-k} \tag{8}$$

で与えられる．$\lambda = K/T$ とし，期待値の公式に従って計算すると

$$E[A(y, y+x]] = \lambda x$$

を得る．定義より λ は単位時間当たりに到着する平均客数，すなわち，平均到着率を表しており，時間区間 $(y, y+x]$ に到着する平均客数は時間区間の長さ x と平均到着率の積で与えられ，区間の位置とは独立である．

4.1 ランダムな到着とポワソン過程

ここで平均到着率 $\lambda = K/T$ を一定の値に保ちながら $T \to \infty$，$K \to \infty$ の極限を考える．まず，式 (8) は

$$\Pr(A(y, y+x] = k) = \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{x}{T}\right)^K \frac{K}{T-x} \cdot \frac{K-1}{T-x} \cdot \cdots \cdot \frac{K-k+1}{T-x}$$

と変形できる．ここで $x/T = \lambda x/K$ に注意すると

$$\lim_{T\to\infty} \left(1 - \frac{x}{T}\right)^K = \lim_{K\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda x}{K}\right)^K = e^{-\lambda x}$$

となり，また

$$\lim_{T\to\infty} \frac{K-n}{T-x} = \lim_{T\to\infty} \frac{\lambda T - n}{T-x} = \lambda \qquad (n = 0, \ldots, k-1)$$

なので，平均到着率 $\lambda = K/T$ を一定に保ちながら $T \to \infty$，$K \to \infty$ の極限を取ると次式を得る．

$$\Pr(A(y, y+x] = k) = e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \qquad (k = 0, 1, \ldots) \tag{9}$$

定義 4.1 (ポワソン分布) 式 (9) の右辺で与えられる確率分布を，平均 λx をもつ**ポワソン分布**（Poisson distribution）という．

次に，互いに重なり合わない二つの時間区間に到着する客数の結合確率を考える．K 人の客が時間区間 $(0, T]$ の間に互いに独立に一様分布に従って到着するとき，時間区間 $(0, T]$ に含まれる重なり合わない二つの時間区間 $(y_1, y_1 + x_1]$, $(y_2, y_2 + x_2]$ にそれぞれ k_1 人，k_2 人の客が到着する結合確率は

$$\begin{aligned}
&\Pr(A(y_1, y_1+x_1] = k_1, A(y_2, y_2+x_2] = k_2) \\
&\qquad = \Pr(A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \\
&\qquad = \frac{K!}{k_1! k_2! (K-k_1-k_2)!} \left(\frac{x_1}{T}\right)^{k_1} \left(\frac{x_2}{T}\right)^{k_2} \left(1 - \frac{x_1 + x_2}{T}\right)^{K-k_1-k_2}
\end{aligned} \tag{10}$$

[4] 一定間隔到着，一定時間サービスをもつ $D/D/1$ の場合の安定条件は $\rho \le 1$ である．

で与えられる．さらに式 (10) は

$$\Pr(A(y_1, y_1+x_1] = k_1, A(y_2, y_2+x_2] = k_2) = \frac{x_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{x_2^{k_2}}{k_2!} \left(1 - \frac{x_1+x_2}{T}\right)^K \cdot \frac{K}{T-x_1-x_2} \cdot \frac{K-1}{T-x_1-x_2} \cdot \cdots \cdot \frac{K-k_1-k_2+1}{T-x_1-x_2}$$

と書き換えられるので，平均到着率 $\lambda = K/T$ を一定に保ちながら $T \to \infty$，$K \to \infty$ の極限を考えると

$$\begin{aligned}\Pr(A(y_1, y_1+x_1] = k_1, A(y_2, y_2+x_2] = k_2) &= e^{-\lambda(x_1+x_2)} \frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{(\lambda x_2)^{k_2}}{k_2!} \\ &= e^{-\lambda x_1} \frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!} \cdot e^{-\lambda x_2} \frac{(\lambda x_2)^{k_2}}{k_2!} \end{aligned} \tag{11}$$

を得る．式 (9) に注意すると式 (11) は

$$\Pr(A(y_1, y_1+x_1] = k_1, A(y_2, y_2+x_2] = k_2) = \Pr(A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2)$$

と書くことができる．すなわち上記の極限で与えられる客の到着過程において，互いに重なり合わない時間区間に到着する客数は独立な確率変数となる．

定義 4.2 (ポワソン過程) 区間 $(y, y+x]$ の間に到着する客数分布が平均 λx のポワソン分布に従い，かつ，重なり合わない区間に到着する客数は互いに独立であるような到着過程を率 λ をもつ**ポワソン過程**（Poisson process），あるいは率 λ をもつ**ポワソン到着**（Poisson arrivals）という．

4.2 ポワソン到着における到着間隔と指数分布

次に率 λ でポワソン到着する客の到着間隔 X について考察する．時刻 t_0 に客の到着があったという事象を $Z(t_0)$ で表し，事象 $Z(t_0)$ が起こったという条件の下で，その次の客の到着までの間隔 X が x より大きい確率を考える．ポワソン到着の独立性より $A(t_0, t_0+x]$ は t_0 以前の到着とは独立なので，

$$\Pr(X > x \mid Z(t_0)) = \Pr(A(t_0, t_0+x] = 0 \mid Z(t_0)) = \Pr(A(t_0, t_0+x] = 0) = e^{-\lambda x}$$

を得る．よって，到着間隔の分布関数 $\Pr(X \le x \mid Z(t_0))$ は次式で与えられる．

$$\Pr(X \le x \mid Z(t_0)) = 1 - e^{-\lambda x} \tag{12}$$

定義 4.3 (指数分布) 分布関数が式 (12) の右辺で与えられる確率分布をパラメタ λ をもつ**指数分布**（exponential distribution）という．

式 (12) より，パラメタ λ をもつ指数分布の密度関数は $\lambda \exp(-\lambda x)$ で与えられ，n 次積率（$n = 1, 2, \ldots$）は $n!/\lambda^n$ で与えられることが分かる．

次に，t_0 に客の到着があったという条件の下で，その後到着する 2 人の客の到着間隔 X_1, X_2 の結合分布を考える．$X_1 = y$ で条件付けを行うと，ポワソン到着の独立性より

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 \le x_1, X_2 > x_2 \mid Z(t_0)) &= \int_0^{x_1} \lambda e^{-\lambda y} \Pr(A(t_0+y, t_0+y+x_2] = 0 \mid Z(t_0), Z(t_0+y))dy \\ &= \int_0^{x_1} \lambda e^{-\lambda y} \Pr(A(t_0+y, t_0+y+x_2] = 0)dy \\ &= \int_0^{x_1} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda x_2} dy \\ &= (1 - e^{-\lambda x_1}) e^{-\lambda x_2}\end{aligned}$$

となる．ここで $\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) + \Pr(X_1 \le x_1, X_2 > x_2) = \Pr(X_1 \le x_1)$ に注意すると

$$\begin{aligned}\Pr(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2) &= \Pr(X_1 \le x_1) - \Pr(X_1 \le x_1, X_2 > x_2) \\ &= (1 - e^{-\lambda x_1})(1 - e^{-\lambda x_2}) \\ &= \Pr(X_1 \le x_1) \Pr(X_2 \le x_2)\end{aligned}$$

を得る．これは率λでポワソン到着する客の連続する到着間隔は互いに独立であり，それぞれ同じパラメタλをもつ指数分布に従うことを示している．

さて，時刻 0 に客が到着したと仮定し，次の客の到着までの間隔を X で表す．このとき，$(0, x_0]$ の間，次の客が到着しなかったという条件の下で時刻 $x_0 + x$ までに次の客が到着する条件付き確率 $\Pr(X \le x_0 + x \mid X > x_0)$ を考える．定義に従って計算を進めると

$$\begin{aligned}
\Pr(X \le x_0 + x \mid X > x_0) &= \frac{\Pr(x_0 < X \le x_0 + x)}{\Pr(X > x_0)} \\
&= \frac{\Pr(X \le x_0 + x) - \Pr(X \le x_0)}{\Pr(X > x_0)} \\
&= \frac{(1 - e^{-\lambda(x_0+x)}) - (1 - e^{-\lambda x_0})}{e^{-\lambda x_0}} \\
&= 1 - e^{-\lambda x} \qquad (13)
\end{aligned}$$

を得る．式 (13) は条件付き確率 $\Pr(X \le x_0 + x \mid X > x_0)$ が x_0 とは独立であり，時刻 x_0 から次の到着までの間隔は元の到着間隔 X と同じ確率分布に従うことを示している．この性質は指数分布の**無記憶性**（memoryless property）と呼ばれ，後で見るように待ち行列モデルの解析において極めて重要な役割を果たす．

4.3 一定到着率の仮定

客の到着間隔が独立同一なパラメタ λ をもつ指数分布に従うとき，その到着過程は以下で定義される一定到着率の仮定を満たす．

定義 4.4 (一定到着率の仮定) 次の 3 つの仮定を満たす客の到着過程は一定到着率の仮定を満たすと呼ばれる．

1. 独立増分：客の到着は互いに独立である．すなわち，交わらない二つの時間区間の間に到着する客の数は互いに独立な確率変数となる．
2. 定常増分：微小な時間区間 $(t, t + \Delta t]$ の間に 1 人の客が到着する確率は $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$ で与えられ，t とは独立である．
3. 順序性：客は 1 人ずつ到着する．すなわち，微小な時間区間 $(t, t + \Delta t]$ の間に 2 人以上の客が到着する確率は $o(\Delta t)$ である．

ここで $o(\Delta t)$ は $\lim_{\Delta t \to 0} o(\Delta t)/\Delta t = 0$ となる項，すなわち Δt の高次の項を表す．仮定の 2.，3. ならびに確率の和が 1 であることから，

4. 微小な時間区間 $(t, t + \Delta t]$ の間に客が到着しない確率は $1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ で与えられる．

が成立することに注意する．以下では客の到着間隔が独立同一な指数分布に従うとき客の到着過程は一定到着率の仮定を満たすことを示す．

まず初めに仮定 1. を考える．2 つの時間区間 $(y_1, y_1 + x_1]$ と $(y_2, y_2 + x_2]$ が重なり合わない（$y_1 + x_1 \le y_2$）ならば，$\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1)$ は指数分布の無記憶性より $\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2)$ と等しい．すなわち

$$\begin{aligned}
&\Pr(A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_2, y_2 + x_2] = k_2) \\
&\qquad = \Pr(A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \\
&\qquad = \Pr(A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2)
\end{aligned}$$

となり，仮定 1. を満たすことが分かる．

次に時刻 t までに客が到着していないという条件の下で区間 $(t, t + \Delta t]$ の間に 1 人の客が到着する確率を考える．時刻 t 以降，最初の到着までの時間間隔を X_1 とし，さらにその次の客の到着までの時間間隔を X_2 とすると，指数分布の無記憶性より，この確率は $\Pr(X_1 \le \Delta t, X_2 > \Delta t - X_1)$ で与えられる．よって，

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1 \le \Delta t, X_2 > \Delta t - X_1) &= \int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda(\Delta t - y)} dy \\
&= \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} \\
&= \lambda \Delta t (1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) \\
&= \lambda \Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}$$

となり，仮定 2. を満たす．

最後に時刻 t までに客が到着しないという条件の下で区間 $(t, t+\Delta t]$ の間に 2 人以上の客が到着する確率を考える．

$$\Pr(A(t, t+\Delta t] \geq 2 \mid X > t) = 1 - \Pr(A(t, t+\Delta t] = 0) - \Pr(A(t, t+\Delta t] = 1)$$

ここで

$$\Pr(A(t, t+\Delta t] = 0) = e^{-\lambda\Delta t} = 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

に注意すると

$$\Pr(A(t, t+\Delta t] \geq 2 \mid X > t) = 1 - (1 - \lambda\Delta t) - \lambda\Delta t + o(\Delta t) = o(\Delta t)$$

となり仮定 3. を満たす．よって，独立同一な指数分布間隔で到着する客は一定到着率の仮定を満たすことが示された．

4.4 一定到着率の仮定とポワソン過程

これまでに，ポワソン過程に従い到着する客の到着間隔が独立同一な指数分布に従う確率変数列となること，さらに客の到着間隔が独立同一な指数分布に従うとき，一定到着率の仮定を満たすことを見てきた．最後に，客の到着が一定到着率の仮定を満たすとき，客の到着がポワソン過程に従うことを示す．これにより，客の到着がポワソン過程に従うこと，到着間隔が独立同一な指数分布に従うこと，ならびに客の到着が一定到着率の仮定に従うことが等価であることが示される．

まず，仮定 1. より，ポワソン到着における独立増分性は明らかに満たされる．次に一定到着率の仮定の下で区間 $(y, y+x]$ に到着する客数 $A(y, y+x]$ を考える．確率 $\Pr(A(y, y+x] = k)$ は y とは独立であるので，$P_k(x) = \Pr(A(y, y+x] = k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ とおくと次式を得る．

$$\begin{aligned}
&P_0(x+\Delta x) = P_0(x)(1 - \lambda\Delta x + o(\Delta x)) \\
&P_k(x+\Delta x) = P_{k-1}(x)(\lambda\Delta x + o(\Delta x)) + P_k(x)(1 - \lambda\Delta x + o(\Delta x)) + o(\Delta x), \qquad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

これらの式において右辺の $P_k(x)$ を左辺へ移項し，両辺を Δx で割り，$\Delta x \to 0$ の極限を取ることにより，微分差分方程式

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}P_0(x) = -\lambda P_0(x) \\
&\frac{d}{dx}P_k(x) = \lambda P_{k-1}(x) - \lambda P_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

を得る．$P_0(0) = 1$ に留意すると $P_0(x) = \exp(-\lambda x)$ となり，帰納法によって

$$P_k(x) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

となることを示すことができる．すなわち，$\Pr(A(y, y+x] = k)$ は式 (9) を満たす．

定理 4.5 (ポワソン過程，指数分布到着間隔，一定到着率の仮定の等価性) 客の到着がポワソン過程に従うこと，到着間隔が独立同一な指数分布に従うこと，ならびに客の到着が一定到着率の仮定に従うことは等価である．

4.5 ポワソン過程の重畳と分岐

率 λ_i $(i = 1, \ldots, N)$ をもつ N 個の独立なポワソン過程を重ね合わせた到着過程を考える（図 4 参照）．

重ね合わせた到着流における到着間隔を X としたとき，$X > x$ となる確率は時間区間 $(0, x]$ の間に客が到着しない確率に等しく，後者はいずれの到着流からも客が到着しない確率に等しいため

$$\Pr(X > x) = \prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i x} = \exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right)x\right]$$

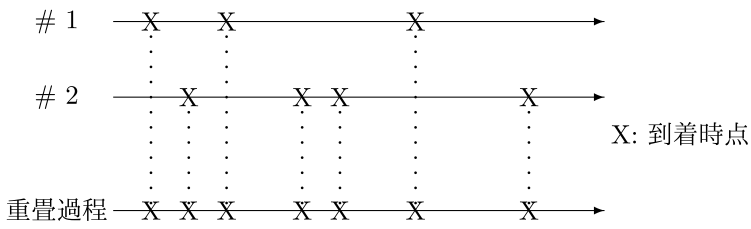

図 4: ポワソン過程の重畳（$N = 2$）

となり，到着間隔 X はパラメタ $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$ の指数分布に従うことが分かる．さらに到着間隔 X が x であったという条件の下で，その到着が j 番目の到着流から到着した客である確率 $d_j(x)$ は

$$\begin{aligned}
d_j(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \Pr(j \text{ 番目からの到着} \mid x < X \le x + \Delta x) \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Pr(\text{時間区間}\, (x, x+\Delta x] \text{ に } j \text{ 番目からの到着})}{\Pr(x < X \le x + \Delta x)} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\exp(-\lambda x)(\lambda_j \Delta x + o(\Delta x))}{\exp(-\lambda x)(\lambda \Delta x + o(\Delta x))} = \frac{\lambda_j}{\lambda}
\end{aligned}$$

となり，到着間隔 X とは独立に平均到着率の割合で与えられる．

定理 4.6 (独立なポワソン過程の重畳) N 個の独立な率 λ_i $(i = 1, \ldots, N)$ をもつポワソン過程を重ね合わせた到着過程は率 $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$ のポワソン過程となる．また，到着があったという条件の下で，その到着が j 番目の到着流からの客である確率は到着間隔とは独立に λ_j/λ で与えられる．

次に，率 λ でポワソン到着する客を，それぞれ独立に確率 p_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ で i 番目の支流へ割り当てることを考える．$A_i(0, t]$（$i = 1, 2, \ldots, N$）を時間区間 $(0, t]$ の間に支流 i に到着した客数とする．個々の客は独立に確率 p_i で支流 i に割り当てられるので $p_1 + p_2 + \cdots + p_N = 1$ に注意すると，

$$\begin{aligned}
\Pr(A_i(0,t] = n_i, i = 1, 2, \ldots, N) &= \Pr(A(0,t] = n_1 + n_2 + \cdots + n_N) \\
&\quad \cdot \Pr(A_i(0,t] = n_i, i = 1, 2, \ldots, N \mid A(0,t] = n_1 + n_2 + \cdots + n_N) \\
&= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n_1 + n_2 + \cdots + n_N}}{(n_1 + n_2 + \cdots + n_N)!} \cdot \frac{(n_1 + n_2 + \cdots + n_N)!}{n_1! n_2! \cdots n_N!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_N^{n_N} \\
&= e^{-\lambda t} \cdot \frac{(\lambda p_1 t)^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{(\lambda p_2 t)^{n_2}}{n_2!} \cdot \cdots \cdot \frac{(\lambda p_N t)^{n_N}}{n_N!} \\
&= e^{-\lambda p_1 t} \frac{(\lambda p_1 t)^{n_1}}{n_1!} \cdot e^{-\lambda p_2 t} \frac{(\lambda p_2 t)^{n_2}}{n_2!} \cdot \cdots \cdot e^{-\lambda p_N t} \frac{(\lambda p_N t)^{n_N}}{n_N!} \\
&= \Pr(A_1(0,t] = n_1) \Pr(A_2(0,t] = n_2) \cdots \Pr(A_N(0,t] = n_N)
\end{aligned}$$

を得る．

定理 4.7 (ポワソン過程の分岐) 率 λ でポワソン到着する客をそれぞれ独立に確率 p_i $(i = 1, \ldots, N)$ で i 番目の支流へ割り当てたとき，i 番目の支流は他の支流とは独立な率 $p_i \lambda$ のポワソン過程となる．

4.6 ポワソン到着する客が見るシステムの状態 (Cooper 1981)

最後に，率 λ でポワソン到着する客の見るシステムの状態を考える．$Q(t)$ を時刻 t における系内客数とする．また，$P(t)$ を時刻 t の直後に客が到着したという条件の下での，時刻 t における系内客数とする．すなわち $P(t)$ は到着した客が見るシステムの状態である．ここで $C(x, y]$ を時間区間 $(x, y]$ に客が到着する事象とすると

$$\Pr(P(t) = k) = \lim_{\Delta t \to 0} \Pr(Q(t) = k \mid C(t, t + \Delta t])$$

である．よって

$$\begin{aligned}
\Pr(P(t) = k) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(Q(t) = k, C(t, t+\Delta t])}{\Pr(C(t, t+\Delta t])} \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pr(C(t, t+\Delta t] \mid Q(t) = k) \Pr(Q(t) = k)}{\Pr(C(t, t+\Delta t])} \qquad (14)
\end{aligned}$$

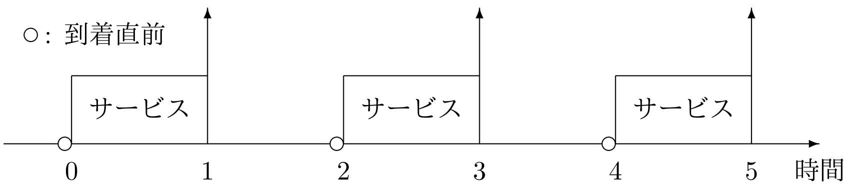

図 5: $D/D/1$ における客数の変化

を得る．ここまでは到着に関して特に何も仮定していないことに注意する．

時刻 t におけるシステムの状態 $Q(t)$ は時刻 t 以前の到着のみによって定まる．一方，客の到着はポワソン過程に従うため，時刻 t 以降の到着はそれ以前の到着とは独立である．よって，ポワソン到着の場合，システムの状態とは独立に到着がおこるため $\Pr(C(t,t+\Delta t] \mid Q(t)=k) = \Pr(C(t,t+\Delta t]) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$ である．これらを式 (14) に代入すると次式を得る．

$$\Pr(P(t)=k) = \Pr(Q(t)=k)$$

定理 4.8 (ポワソン到着する客が見るシステムの状態) ポワソン到着する客が見るシステムの状態 $P(t)$ は外部観察者が見るシステムの状態 $Q(t)$ に等しい．特に，システムが**定常状態**（steady state）にある，すなわち $\Pr(Q(t)=k)$ が時刻 t に依存しない場合，ポワソン到着する客は定常状態を見る．

この結果は，ポワソン到着以外の場合は必ずしも成り立たないことに注意する．例として図 5 に到着間隔 2 秒，サービス時間 1 秒の $D/D/1$ （一定の到着間隔と一定のサービス時間を持つ単一サーバ待ち行列）に系内客数の変化を示す．最初の客がシステムに到着する時刻を 0 とすると，$(2t, 2t+1]$ （$t=0,1,2,\ldots$）の間はサービス中であり，$(2t+1, 2t+2]$ （$t=0,1,2,\ldots$）の間はシステムは空である．よって，図に示されているように外部観察者は全時間の 1/2 の間，稼働中のシステムと見るが，到着する客は常に空のシステムを見る．このように，一般には，到着する客の見るシステムの状態は外部観察者が見るシステムの状態と異なる．

4.7 アーラン分布

この節では，後の章で必要となるアーラン分布を説明する．パラメタ μ の指数分布に従う独立な確率変数列 H_i （$i=1,2,\ldots$）に対して，これらの和 $F_k = H_1 + \cdots + H_k$ と定義し，F_k の従う確率分布を見い出す．F_k の分布関数を $F_k(x) = \Pr(F_k \le x)$ とすれば

$$F_2(x) = \int_0^x (1-e^{-\mu(x-y)})\mu e^{-\mu y} dy = 1 - e^{-\mu x} - e^{-\mu x}\mu x$$

となる．同様に，

$$F_3(x) = \int_0^x F_2(x-y)\mu e^{-\mu y} dy = 1 - e^{-\mu x} - e^{-\mu x}\mu x - e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^2}{2}$$

であり，帰納法によって

$$F_k(x) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^i}{i!}, \qquad k=1,2,\ldots \tag{15}$$

となることを示すことができる．さらに $F_k(x)$ を微分することにより，F_k の密度関数 $f_k(x)$ は

$$f_k(x) = \mu e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} \tag{16}$$

で与えられることが分かる．

定義 4.9 k 個の独立なパラメタ μ をもつ指数分布に従う確率変数の和が従う確率分布を k 次の**アーラン分布**（Erlang distribution）といい，その分布関数ならびに密度関数はそれぞれ式 (15) ならびに式 (16) で与えられる．特に平均は k/μ で与えられ，分散は $(k/\mu)^2/k$ で与えられる．

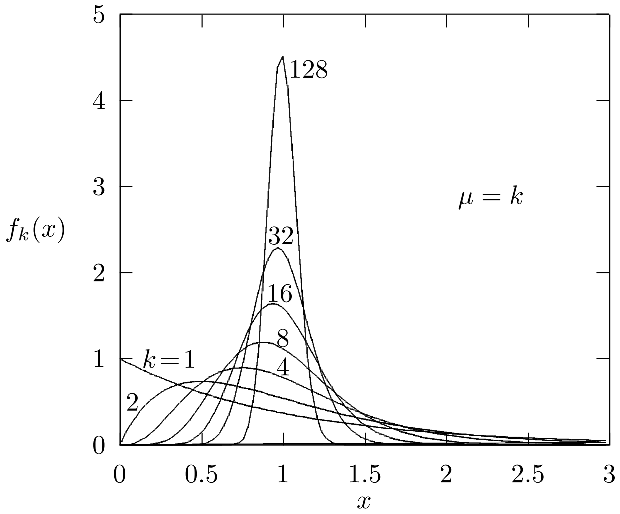

図 6: 平均 1 のアーラン分布の密度関数

k 個の独立なパラメタ μ をもつ指数分布に従う確率変数の和は，率 μ のポワソン過程において k 人の客が到着するまでの時間間隔に等しいことに注意する．すなわち，時間間隔 $(0,t]$ の間に到着する客数を $A(0,t]$ とすると，

$$F_k \le x \quad \Leftrightarrow \quad A(0,x] \ge k$$

が成立する．よって

$$\Pr(F_k \le x) = \Pr(A(0,x] \ge k) = 1 - \Pr(A(0,x] \le k-1)$$

となり，k 次アーラン分布の分布関数 $F_k(x)$ が式 (15) で与えられることが確認できる．

また，率 μ のポワソン過程において，時刻 0 以降，k 番目に到着した客の到着時刻を A_k とすると，定義より A_k $(k = 1,2,\ldots)$ は F_k と同じ分布に従う．さらに，密度関数 $f_k(x)$ は

$$f_k(x)\Delta x = \Pr(x < F_k \le x + \Delta x) + o(\Delta x)$$

という確率的意味をもつので， k 番目の到着がちょうど区間 $(x, x+\Delta x]$ 内に起こる確率 $\Pr(x < A_k \le x + \Delta x)$ と $f_k(x)$ を

$$\Pr(x < A_k \le x + \Delta x) = f_k(x)\Delta x + o(\Delta x)$$

のように関連づけることができる．$x < A_k \le x + \Delta x$ が起こるためには，$(0,x]$ までに $k-1$ 人の到着があり，かつ $(x, x+\Delta x]$ に k 番目の到着が起こればよいので，

$$\Pr(x < A_k \le x + \Delta x) = e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}(\mu\Delta x + o(\Delta x))$$

となり，密度関数が (16) で与えられることが分かる．

アーラン分布の変動係数は $1/\sqrt{k}$ となることに注意する．よってステージ数 k が大きくなると，変動係数は 0 に近づいていく．図 6 に平均が 1 であるアーラン分布の密度関数を示す．この図から次数が高くなるに従って分散が減少する様子がわかる．また，アーラン分布の分散は常に同じ平均をもつ指数分布よりも小さいことに注意する．

5　連続時間マルコフ連鎖の概要 [8]

この章では連続時間マルコフ連鎖の概要を解説する．後に定義するように連続時間マルコフ連鎖は特殊な性質をもつ確率過程の一種である．そこでまず，以下のような例を考えよう．

例 5.1 ある交差点を通過する客を乗せていない，すなわち空車のタクシーの到着を考える．簡単化のため，連続する空車のタクシーの通過時刻の間隔は独立で同一の分布に従うと仮定する．

ここで $X(t)$ を時刻 t に交差点へやってきた人が次の空車のタクシーを捕まえるまでに待たなければならない時間とする．$X(t)$ は時刻と共に変化するため，時刻 t の関数であるが，時刻 t を固定してもその値は一意には定まらず，確率変数となっている．すなわち $X(t)$ は標本 ω の関数であり，$X(t,\omega)$ と表すことが出来る．

定義 5.2 (確率過程) 時刻を表すパラメタ t をもつ確率変数列 $\{X(t);\ t \in \mathcal{T}\}$ を**確率過程**（stochastic process）という．ここで $\mathcal{T}$ は時刻 t の取り得る値の集合である．さらに標本 $\omega \in \Omega$ を固定したときの時刻 t の関数 $X(t,\omega)$ を**標本路**（sample path）あるいは**標本関数**（sample function）という．

例 5.1 において，$\mathcal{T} = [0,\infty)$ とし，$T_n = T_n(\omega)$（$n = 1,2,\ldots$）を n 番目に空車のタクシーが交差点を通過する時刻とする．時刻 T_n の標本が与えられる（すなわち，ある ω が固定される）と $X(t)$ の標本路 $X(t,\omega)$ が一意に定まる．$X(t)$ は正である間は傾き -1 で減少する．さらに，タクシーの通過時刻 T_n において，$X(T_n) = T_{n+1} - T_n$ へジャンプする.（$T_1 = 4, T_2 = 6, T_3 = 11, T_4 = 14$ の場合に標本路を書いてみよ）．

$X(t)$ を時間に沿って連続的に観察する代わりに，特定の事象が起こった時刻のみで観察する場合もある．例えば $X(t)$ が上にジャンプした時刻 T_n の直後のみで $X(t)$ を観察する．このとき，$Y_n = X(T_n+)$ とおけば，確率変数列 $\{Y_n;\ n \in \mathcal{T} = \{1,2,\ldots\}\}$ も確率過程と見なすことが出来る．$X(t)$ のように時刻を表すパラメタが連続的な場合，**連続時間確率過程**（continuous-time stochastic process）といい，Y_n のように時刻を表すパラメタが離散的な場合，**離散時間確率過程**（discrete-time stochastic process）という．

確率過程に対する考察では，長時間に渡る大まかな特性を把握するため，長い間，標本路を観察したときの平均的特性を考えることが多い．

定義 5.3 (時間平均と事象平均) 連続時間確率過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ の任意の標本路に対して

$$\overline{X} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t X(s)ds$$

が確率 1 で存在するならば，$\overline{X}$ を確率過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ の**時間平均**（time-average）という．

また，$N = \{T_1, T_2, \ldots\}$ を単調増加な時刻の列としたとき，任意の標本路に対して

$$\overline{X}_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X(T_k)$$

が確率 1 で存在すれば，$\overline{X}_N$ を確率過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ の N に関する**事象平均**（event-average）という．なお，一般に T_n は確定値ではなく,（単調増加な）確率変数列である．

同様に，離散時間確率過程 $\{Y_n;\ n = 1,2,\ldots\}$ の任意の標本路に対して

$$\overline{Y} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

が確率 1 で存在するならば，$\overline{Y}$ を確率過程 $\{Y_n;\ n = 1,2,\ldots\}$ の時間平均という．また，$N = \{T_1, T_2, \ldots\}$ を単調増加な時刻の列としたとき，任意の標本路に対して

$$\overline{Y}_N = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Y_{T_k}$$

が確率 1 で存在すれば，$\overline{Y}_N$ を確率過程 $\{Y_n;\ n = 1,2,\ldots\}$ の N に関する事象平均という．

確率過程を考えるとき，時間平均と事象平均をしっかりと区別することは重要である．時間平均は $X(t)$ の標本路を長時間観察したときの平均に対応している．一方，事象平均は，$X(t)$ の標本路をある特定の事象が起こった時点でのみ観察したときの平均である．このように一つの標本路に沿って観測した結果から得られる平均を一般に**標本平均**（sample mean）という．これに対して，時間を表すパラメタを固定したときの期待値 $E(X(t))$ や $E(Y_n)$ を**空間平均**（ensemble mean）という．

5.1　連続時間マルコフ連鎖の定義と性質

可算な状態空間 $\mathcal{S}$ 上で定義された連続時間確率過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ を考える．

定義 5.4 (連続時間マルコフ連鎖) 任意の $s, t \geq 0$ と任意の $j \in \mathcal{S}$ に対して，確率過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ の $[0, s]$ における挙動が与えられたという条件の下で，時刻 $s+t$ において $X(s+t) = j$ となる条件付き確率 $\Pr(X(s+t) = j \mid X(u), 0 \leq u \leq s)$ が

$$\Pr(X(s+t) = j \mid X(u), 0 \leq u \leq s) = \Pr(X(s+t) = j \mid X(s))$$

を満たすとき，確率過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ は状態空間 $\mathcal{S}$ 上の**連続時間マルコフ連鎖**（continuous-time Markov chain）と呼ばれる．

連続時間マルコフ連鎖において，将来の挙動（$X(s+t)$）は現在の状態（$X(s)$）のみに依存し，過去の履歴（$X(u)$ $(0 \leq u < s)$）には依存しない．このような性質は**マルコフ性**（Markovian property）と呼ばれる[5]．さらに，$\Pr(X(s+t) = j \mid X(s))$ が s に依存せず，

$$p_{i,j}(t) = \Pr(X(s+t) = j \mid X(s) = i), \qquad i, j \in \mathcal{S} \tag{17}$$

のように書けるならば，$X(t)$ は**斉時**（time-homogeneous）と呼ばれる．以下では斉時な連続時間マルコフ連鎖に絞って議論を行う．定義より，$p_{i,j}(t)$ は

$$p_{i,j}(t) \geq 0, \qquad \sum_{j \in \mathcal{S}} p_{i,j}(t) = 1$$

を満たすことに注意する．

まず初めに，連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ がある状態 $i \in \mathcal{S}$ に滞在する時間 τ_i を考える．マルコフ性ならびに斉時性の仮定より

$$\begin{aligned}
\Pr(\tau_i > x) &= \Pr(X(s+u) = i\ (0 \leq u \leq x) \mid X(s-) \neq i, X(s) = i) \\
&= \Pr(X(s+u) = i\ (0 \leq u \leq x) \mid X(s) = i) \\
&= \Pr(X(u) = i\ (0 \leq u \leq x) \mid X(0) = i)
\end{aligned}$$

が成立することに注意する．特に $\Pr(\tau_i > 0) = 1$ である．時刻 0 で状態 i への遷移が起きたと仮定すると，マルコフ性並びに斉時性より

$$\begin{aligned}
\Pr(\tau_i > s+t \mid \tau_i > s) &= \frac{\Pr(\tau_i > s+t)}{\Pr(\tau_i > s)} \\
&= \frac{\Pr(X(u) = i\ (0 \leq u \leq s+t) \mid X(0) = i)}{\Pr(X(u) = i\ (0 \leq u \leq s) \mid X(0) = i)} \\
&= \frac{\Pr(X(u) = i\ (0 \leq u \leq s+t))}{\Pr(X(u) = i\ (0 \leq u \leq s))} \\
&= \Pr(X(u) = i\ (0 \leq u \leq s+t) \mid X(u) = i\ (0 \leq u \leq s)) \\
&= \Pr(X(u) = i\ (s \leq u \leq s+t) \mid X(s) = i) \\
&= \Pr(X(u) = i\ (0 \leq u \leq t) \mid X(0) = i) \\
&= \Pr(\tau_i > t)
\end{aligned}$$

が成立する．この式は状態 i の滞在時間が無記憶性を持つことを示している．ここで $\overline{F}_i(t) = \Pr(\tau_i > t)$ とおくと

$$\frac{\overline{F}_i(s+t)}{\overline{F}_i(s)} = \Pr(\tau_i > s+t \mid \tau_i > s) = \Pr(\tau_i > t) = \overline{F}_i(t)$$

すなわち，

$$\overline{F}_i(s+t) = \overline{F}_i(s)\overline{F}_i(t) \tag{18}$$

が成立する[6]．

[5] 非可算な状態空間 $\mathcal{S}$ 上で定義された確率過程がマルコフ性をもつならば，(連続時間) マルコフ過程と呼ばれる．

[6] このような性質は**半群**（semi-group）と呼ばれる．

ここで $s=t=0$ とすると $\overline{F}_i(0)=\overline{F}_i^2(0)$ となり $\overline{F}_i(0)=0$ か $\overline{F}_i(0)=1$ のいずれかが成立することが分かる．もし $\overline{F}_i(0)=\Pr(\tau_i>0)=0$ ならば $\Pr(\tau_i=0)=1$ となり，不適である．よって $\overline{F}_i(0)=1$ であると仮定する．

式 (18) において $s=\Delta t$ とし，$\overline{F}_i(t+\Delta t)=\overline{F}_i(\Delta t)\overline{F}_i(t)$ に注意して $\overline{F}_i(t)$ が満たす微分方程式を考えると，

$$\frac{d}{dt}\overline{F}_i(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{F}_i(t+\Delta t)-\overline{F}_i(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{F}_i(\Delta t)-1}{\Delta t}\cdot\overline{F}_i(t)$$

を得る．よって

$$q(i)=-\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{F}_i(\Delta t)-1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1-\overline{F}_i(\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Pr(\tau_i\le\Delta t)}{\Delta t}\ge 0 \tag{19}$$

を用いて，$\overline{F}_i(t)=\overline{F}_i(0)\exp(-q(i)t)$ となり，さらに $\overline{F}_i(0)=1$ より，最終的に

$$\Pr(\tau_i>t)=\overline{F}_i(t)=\exp(-q(i)t)$$

を得る．すなわち，状態 $i\in\mathcal{S}$ に滞在する時間 τ_i は式 (19) で定義されるパラメタ $q(i)$ の指数分布に従うことが分かる．数学的には $q(i)$ が無限大となる場合も許されるが，以下では

$$q(i)<\infty,\qquad i\in\mathcal{S}$$

を仮定する．

次に，状態 i における滞在が終了した後，次に訪れる状態について考える．$j\ne i$ に対して

$$\Pr(X(t)=j\mid X(t-\Delta t)=i,X(t)\ne i)=\frac{\Pr(X(t)=j\ (\ne i)\mid X(t-\Delta t)=i)}{\Pr(X(t)\ne i\mid X(t-\Delta t)=i)}$$

が成立する．ここで，滞在時間が指数分布に従うことから，微少区間 $(t-\Delta t,t]$ の間に 1 回の遷移が起こる確率は $q(i)\Delta t+o(\Delta t)$ であり，2 回以上の遷移が起こる確率は $o(\Delta t)$ となる．よって，滞在時間の無記憶性より

$$\Pr(X(t)\ne i\mid X(t-\Delta t)=i)=\Pr(\tau_i\le\Delta t)-o(\Delta t)=q(i)\Delta t+o(\Delta t)$$

である．一方，

$$\Pr(X(t)=j\mid X(t-\Delta t)=i)=\Pr(X(\Delta t)=j\mid X(0)=i)=p_{i,j}(\Delta t)$$

であるので，$q(i,j)$ $(i,j\in\mathcal{S},\, i\ne j)$ を

$$q(i,j)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{p_{i,j}(\Delta t)}{\Delta t}\ge 0$$

と定義する．$q(i,j)$ は状態 i から状態 j への**遷移率**あるいは**推移率**（transition rate）と呼ばれる．このとき $p_{i,j}(\Delta t)=\Pr(X(t)=j\mid X(t-\Delta t)=i)$ は $q(i,j)$ を用いて

$$p_{i,j}(\Delta t)=\Pr(X(t)=j\mid X(t-\Delta t)=i)=q(i,j)\Delta t+o(\Delta t)$$

と書くことができる．すなわち

$$\Pr(X(t)=j\mid X(t-\Delta t)=i,X(t)\ne i)=\frac{q(i,j)\Delta t+o(\Delta t)}{q(i)\Delta t+o(\Delta t)}$$

となり，右辺の分子分母を Δt で割って，$\Delta t\to 0+$ とすれば

$$\Pr(X(t)=j\mid X(t-)=i,X(t)\ne i)=\frac{q(i,j)}{q(i)},\qquad j\ne i$$

を得る．すなわち，状態 i における滞在が終了した後，状態 j へ遷移する確率 $p(i,j)$ は

$$p(i,j)=q(i,j)/q(i),\qquad i,j\in\mathcal{S},j\ne i$$

で与えられる．

確率の和が 1 であることから $\sum_{j\in\mathcal{S},j\neq i} p(i,j)=1$ となるため，

$$q(i)=\sum_{\substack{j\in\mathcal{S}\\ j\neq i}} q(i,j)$$

が成立する．この結果ならびに指数分布の性質から，状態 i における滞在時間 τ_i はパラメタ $q(i,j)$ をもつ指数分布に従う独立な確率変数 $\tau_{i,j}$ $(i,j\in\mathcal{S},\, i\neq j)$ を用いて

$$\tau_i=\min(\tau_{i,j}; j\in\mathcal{S}, i\neq j)$$

と表現できることに注意する．すなわち，連続時間マルコフ連鎖が状態 i にあるとき，パラメタ $q(i,j)$ をもつ独立な指数分布に従う間隔が同時に走っており，間隔の終了時点がもっとも早く起こった状態へと遷移するとみなすことができる．言い換えると，連続時間マルコフ連鎖が状態 i にあるとき，他の状態 j へ遷移しようとする率 $q(i,j)$ が作用しており，これらの中で最も早く遷移を起こしたものによって，次の状態が決定される．

例 5.5 到着率 λ，サービス率 μ をもつ M/M/1 を考える．系内に客が k 人いるとき，状態変化は到着が起こるか（系内客数は $k+1$ に変化），現在サービス中の客のサービスが終了するか（系内客数は $k-1$ に変化）のいずれかである．すなわち $q(k,k+1)=\lambda$，$q(k,k-1)=\mu$ のパラメタをもつ指数分布に従う間隔が同時に走っており，先に間隔が終了した事象へと遷移する．

定理 5.6 (連続時間マルコフ連鎖の動作原理) 連続時間マルコフ連鎖は状態 i から状態 j への遷移率 $q(i,j)$ $(i,j\in\mathcal{S},\, i\neq j)$ によって完全に特徴づけることができる．

1. 各状態 $i\in\mathcal{S}$ での滞在時間はパラメタ $q(i)=\sum_{j\in\mathcal{S},j\neq i} q(i,j)$ の指数分布に従う．
2. 状態 i の滞在終了後，確率 $p(i,j)=q(i,j)/q(i)$ で状態 j $(j\in\mathcal{S},\, i\neq j)$ に遷移する．

例 5.7 到着率 λ，サービス率 μ をもつ M/M/1 を考える．系が空である期間の長さはパラメタ λ の指数分布に従い，この期間が終了すると系内客数は必ず 1 に変化する．また，系内客数が k $(k=1,2,\ldots)$ である期間の長さはパラメタ $\lambda+\mu$ の指数分布に従う．$k\geq 1$ のとき，期間が終了すると確率 $\lambda/(\lambda+\mu)$ で系内客数は $k+1$ に変化し，確率 $\mu/(\lambda+\mu)$ で系内客数は $k-1$ に変化する．

5.2 時刻 t での状態分布

式 (17) で与えられる $p_{i,j}(t)$ $(i,j\in\mathcal{S},\, t\geq 0)$ を (i,j) 要素にもつ行列 $\boldsymbol{P}(t)$ を定義する．

$$[\boldsymbol{P}(t)]_{i,j}=p_{i,j}(t)=\Pr(X(t)=j\mid X(0)=i)$$

$\Pr(X(0)=i\mid X(0)=i)=1$ より $\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{I}$（$\boldsymbol{I}$ は単位行列）であることに注意する．また，確率の和が 1 であることから，行列 $\boldsymbol{P}(t)$ の行和はすべて 1 である．$p_{i,j}(s+t)$ を時刻 s での状態で場合分けして，マルコフ性ならびに斉時性を利用すると，

$$\begin{aligned}
p_{i,j}(s+t)&=\sum_{k\in\mathcal{S}}\Pr(X(s)=k\mid X(0)=i)\Pr(X(t+s)=j\mid X(s)=k, X(0)=i)\\
&=\sum_{k\in\mathcal{S}}\Pr(X(s)=k\mid X(0)=i)\Pr(X(t+s)=j\mid X(s)=k)\\
&=\sum_{k\in\mathcal{S}}\Pr(X(s)=k\mid X(0)=i)\Pr(X(t)=j\mid X(0)=k)
\end{aligned}$$

となり，**チャップマン・コルモゴロフの方程式**（Chapman-Kolmogorov's equation）

$$p_{i,j}(s+t)=\sum_{k\in\mathcal{S}} p_{i,k}(s)p_{k,j}(t)$$

を得る．すなわち，

$$\boldsymbol{P}(s+t)=\boldsymbol{P}(s)\boldsymbol{P}(t) \tag{20}$$

が成立する．よって $s=\Delta t$ とおき，両辺から $\boldsymbol{P}(t)$ を引いた後，両辺を Δt で割ることにより

$$\frac{\boldsymbol{P}(t+\Delta t)-\boldsymbol{P}(t)}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{P}(\Delta t)\boldsymbol{P}(t)-\boldsymbol{P}(t)}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{P}(\Delta t)-\boldsymbol{I}}{\Delta t}\cdot\boldsymbol{P}(t) \tag{21}$$

を得る．同様に

$$\frac{\boldsymbol{P}(t+\Delta t)-\boldsymbol{P}(t)}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{P}(\Delta t)-\boldsymbol{P}(t)}{\Delta t}=\boldsymbol{P}(t)\cdot\frac{\boldsymbol{P}(\Delta t)-\boldsymbol{I}}{\Delta t} \tag{22}$$

も成立する．

次に式 (21)，式 (22) における $\Delta t \to 0+$ の極限を考えたい．そこで，行列 $\boldsymbol{Q}$ を次式で定義する．

$$\boldsymbol{Q}=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{\boldsymbol{P}(\Delta t)-\boldsymbol{I}}{\Delta t} \tag{23}$$

定義より，行列 $\boldsymbol{Q}$ の要素は

$$[\boldsymbol{Q}]_{i,i}=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{p_{i,i}(\Delta t)-1}{\Delta t},\qquad [\boldsymbol{Q}]_{i,j}=\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{p_{i,j}(\Delta t)}{\Delta t}=q(i,j)\quad (i\neq j)$$

である．よって，行列 $\boldsymbol{Q}$ の (i,j) 番目（$i\neq j$）の非対角要素は状態 i から状態 j への遷移率 $q(i,j)$ で与えられることが分かる．また，行列 $\boldsymbol{P}$ の行和が 1 であるので，

$$p_{i,i}(\Delta t)-1=p_{i,i}(\Delta t)-\sum_{j\in\mathcal{S}}p_{i,j}(\Delta t)=-\sum_{\substack{j\in\mathcal{S}\\ j\neq i}}p_{i,j}(\Delta t)$$

に注意すると，行列 $\boldsymbol{Q}$ の対角要素は $-q(i)=-\sum_{j\in\mathcal{S},j\neq i}q(i,j)$（$\leq 0$）で与えられることが分かる．

$$[\boldsymbol{Q}]_{i,i}=-q(i),\qquad [\boldsymbol{Q}]_{i,j}=q(i,j)\quad (i\neq j)$$

行列 $\boldsymbol{Q}$ は連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t\geq t\}$ の**無限小生成作用素**（infinitesimal generator）あるいは，**遷移率行列**，または，**推移率行列**（transition rate matrix）と呼ばれる．

式 (21) において $\Delta t \to 0+$ の極限を考えると，**コルモゴロフの後進微分方程式**（Kolmogorov's backward differential equation）

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}(t)$$

を得る[7]．同様に，式 (22) より**コルモゴロフの前進微分方程式**（Kolmogorov's forward differential equation）

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{P}(t)=\boldsymbol{P}(t)\boldsymbol{Q}$$

を得る[8]．$\boldsymbol{P}(0)=\boldsymbol{I}$ に注意して，後進あるいは前進方程式を形式的に解くことにより

$$\boldsymbol{P}(t)=\exp(\boldsymbol{Q}t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{Q}t)^n}{n!}$$

を得る（ただし $\boldsymbol{Q}^0=\boldsymbol{I}$）．これより，時刻 t におけるマルコフ連鎖の状態確率は無限小生成作用素 $\boldsymbol{Q}$ によって定められることが分かる．

次に，j 番目の要素が $\Pr(X(t)=j)$ で与えられる行ベクトル $\boldsymbol{\pi}(t)$ を定義する．ここで

$$[\boldsymbol{\pi}(t)]_j=\Pr(X(t)=j)=\sum_{i\in\mathcal{S}}\Pr(X(0)=i)\Pr(X(t)=j\mid X(0)=i)$$

が成立するので，$\boldsymbol{\pi}(t)$ は

$$\boldsymbol{\pi}(t)=\boldsymbol{\pi}(0)\boldsymbol{P}(t)$$

と書くことができる．すなわち次の定理を得る．

定理 5.8 (時刻 t での状態分布) 初期状態分布 $\boldsymbol{\pi}(0)$ と無限小生成作用素 $\boldsymbol{Q}$ をもつ連続時間マルコフ連鎖の時刻 t における状態分布 $\boldsymbol{\pi}(t)$ は

$$\boldsymbol{\pi}(t)=\boldsymbol{\pi}(0)\exp(\boldsymbol{Q}t)$$

によって与えられる．

---

[7]もし，状態空間 $\mathcal{S}$ が可算無限個の状態からなっている場合，$(\boldsymbol{P}(\Delta t)-\boldsymbol{I})\boldsymbol{P}(t)$ の各要素は無限和で与えられており，その外側から極限を取ることになる．この結果は，極限と無限和が入れ替えられることを主張しているが，詳細は省略する．

[8]前進方程式が成立する条件は，後進方程式よりも厳しい．

5.3 定常分布と大域平衡方程式

定理 5.8 より時刻 t における状態分布 $\boldsymbol{\pi}(t)$ は以下の微分方程式を満たす.

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)\exp(\boldsymbol{Q}t)\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\pi}(t)\boldsymbol{Q} \tag{24}$$

そこで $d\boldsymbol{\pi}(t)/dt = 0$ であるような状況を考える. $d\boldsymbol{\pi}(t)/dt = 0$ は状態分布が時間変化をしない, すなわち, いずれの時刻 t でも同じ状態分布に従う場合に対応している. 一般に, 本来, 時間に依存する量が時間に依存しない状況は定常と呼ばれる. 正確には以下のように定義される.

定義 5.9 (定常性) 確率過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ において, 任意の自然数 n, 任意の $t_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ と任意の $\tau > 0$ に対して $(X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n))$ の**結合分布** (joint distribution) が $(X(\tau+t_1), X(\tau+t_2), \ldots, X(\tau+t_n))$ の結合分布と等しいとき, **定常** (stationary) という.

$$\text{定常} \quad \Leftrightarrow \quad (X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_n)) \overset{\mathrm{D}}{\sim} (X(\tau+t_1), X(\tau+t_2), \ldots, X(\tau+t_n)), \quad \forall n, \forall t_i\ (i = 1, 2, \ldots, n), \forall \tau > 0$$

確率過程における定常性の意味するところは, 時刻の起点 0 をどこに取っても, 時刻 0 以降の時間進展は確率的に同じである (すなわち, 確率的に区別が付かない), ということである.

特に定常性の定義において $n = 1$ とすると, 定常な確率過程 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ では全ての時刻における状態分布が等しくなる. すなわち, 定常であるならば, 状態分布は時間に関して不変であり, $d\boldsymbol{\pi}(t)/dt = 0$ となる. このような状態分布 $\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}$ を**定常分布** (stationary distribution) という. 式 (24) より, 定常分布は

$$\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}, \qquad \pi_i \geq 0, \qquad \sum_{i \in \mathcal{S}} \pi_i = 1$$

を満たす. ただし π_i は $\boldsymbol{\pi}$ の i 番目の要素を表す. 実際, $\boldsymbol{\pi}(0) = \boldsymbol{\pi}$ ならば, 定理 5.8 ならびに $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$ より

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}\exp(\boldsymbol{Q}t) = \boldsymbol{\pi}\left[\boldsymbol{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\boldsymbol{Q}t)^n}{n!}\right] = \boldsymbol{\pi}$$

となり, 全ての時刻 t で $\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}$ となる. このような状況の場合, 連続時間マルコフ連鎖は**定常状態** (steady-state) にあるという.

状態空間が有限の場合, 無限小生成作用素 $\boldsymbol{Q}$ が非正の対角要素並びに非負の非対角要素をもち, 行和が全て 0 であることから, $\boldsymbol{Q}$ の最大固有値が 0 であることを示すことができる. さらにペロン・フロベニウスの定理より, 最大固有値 0 に対する固有ベクトル $\boldsymbol{\pi}$ は非負であることが示される (詳細は省略). よって次の結果を得る.

系 5.10 (有限状態連続時間マルコフ連鎖における定常分布の存在) 連続時間マルコフ連鎖の状態空間が有限であるならば, 定常分布は必ず存在する.

さて, $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{0}$ を要素毎に書き下すと

$$\pi_j(-q(j)) + \sum_{\substack{i \in \mathcal{S} \\ i \neq j}} \pi_i q(i, j) = 0$$

であり,

$$q(j) = \sum_{\substack{k \in \mathcal{S} \\ k \neq j}} q(j, k)$$

に注意すると, **大域平衡方程式** (global balance equation)

$$\pi_j \sum_{\substack{k \in \mathcal{S} \\ k \neq j}} q(j, k) = \sum_{\substack{k \in \mathcal{S} \\ k \neq j}} \pi_k q(k, j) \tag{25}$$

を得る. 定常状態において, 時間間隔 $(t, t + \Delta t)$ の間に状態 j から状態 k への遷移が発生する確率は, 時刻 t で状態 j にあり, かつ, 時間間隔 $(t, t + \Delta t)$ の間に状態 k への遷移が起こる確率に等しいため, $\pi_j q(j, k)\Delta t + o(\Delta t)$ で与えられる. このような解釈から, $\pi_j q(j, k)$ は状態 j から状態 k への**確率フロー** (probability flux) と呼ばれる. 大域平衡方程式 (25) の左辺は定常状態において状態 j から他の状態への確率フローの総和を表しており, 右辺は他の状態から状態 j への確率フローの総和を表している. すなわち, 定常状態では, 各状態から出る確率フローとその状態へ入る確率フローが等しくなる.

定理 5.11 定常分布が存在するならば, それは大域平衡方程式 (25) を満たす.

5.4　極限分布と時間平均

次に，定常分布がマルコフ連鎖の時間軸に沿った挙動とどのような関係にあるかを論じる．そのために，幾つかの準備を行う．状態空間 $\mathcal{S}$ 上の連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ において，$p_{i,j}(t) > 0$ $(i, j \in \mathcal{S})$ となるような $t \geq 0$ が存在するならば，状態 j は状態 i から**到達可能**（accessible, reachable）であるという．$p_{i,i}(0) = 1$ であるので，状態 i はそれ自身に到達可能である．また，連続時間マルコフ連鎖では，ある $t > 0$ で $p_{i,j}(t) > 0$ ならば全ての $t > 0$ で $p_{i,j}(t) > 0$ となることが知られている．状態 j が状態 i から到達可能であり，かつ，状態 i が状態 j から到達可能であるとき，状態 i と状態 j は**連結**（communicate）しているという．さらに，状態空間 $\mathcal{S}$ 内の任意の状態の組が連結しているとき，連続時間マルコフ連鎖は**既約**（irreducible）であると呼ばれる．

ある時刻において状態 i にある連続時間マルコフ連鎖がその後初めて状態 j を訪れるまでの時間 $F_{i,j}$ を状態 i から状態 j への**初到達時間**（first passage time）という．また，状態 i から（他の状態へ遷移した後）初めて状態 i へ戻ってくるまでの時間 $F_{i,i}$ を状態 i の**再帰時間**（recurrence time）という．状態 i は $\Pr(F_{i,i} < \infty) = 1$（有限時間内で必ず戻ってくる）であるとき**再帰的**（recurrent）であるといい，$\Pr(F_{i,i} < \infty) < 1$（戻って来ない場合がある）であるとき**過渡的**あるいは**一時的**（transient）であるという．さらに，再帰的な状態 i は，$E[F_{i,i}] < \infty$ ならば**正再帰的**（positive recurrent）であるといい，$E[F_{i,i}] = \infty$ ならば**零再帰的**（null recurrent）であるという．

以上より，状態空間内の各状態は，正再帰的，零再帰的，過渡的のいづれかに分類される．連続時間マルコフ連鎖では，ある状態 i が正再帰的（零再帰的・過渡的）であるならば，それと連結している他の全ての状態もまた正再帰的（零再帰的・過渡的）となる．よって，既約な連続時間マルコフ連鎖では，全ての状態は同じ性質（正再帰的，零再帰的，過渡的のいずれか）をもつ．さらに，既約な連続時間マルコフ連鎖の状態が正再帰的（零再帰的・過渡的）ならば既約な連続時間マルコフ連鎖は正再帰的（零再帰的・過渡的）であると言われる．

定理 5.12 有限状態空間上で定義された既約なマルコフ連鎖は正再帰的である．

以下に極限分布ならびに時間平均に関する結果をまとめておく．これらの結果に関する証明は例えば [1] を参照．

定理 5.13 (既約な連続時間マルコフ連鎖の極限分布) 既約な連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ が

(1) 正再帰的ならば，大域平衡方程式 (25) は全ての $j \in \mathcal{S}$ に対して $\pi_j > 0$ となる唯一の解 $\boldsymbol{\pi}$ をもつ．さらに，初期状態 $i \in \mathcal{S}$ とは無関係に

$$\lim_{t \to \infty} p_{i,j}(t) = \pi_j$$

が全ての状態 $j \in \mathcal{S}$ に対して成立する．よって，**極限分布**（limiting distribution）$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{\pi}(t)$ が存在し，

$$\lim_{t \to \infty} \boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}$$

となる．

(2) 零再帰的あるいは過渡的ならば，大域平衡方程式 (25) は全ての状態 $j \in \mathcal{S}$ に対して $\pi_j \geq 0$ となり，かつ，$\sum_{j \in \mathcal{S}} \pi_j = 1$ を満たすような解を持たない．さらに全ての状態 $i, j \in \mathcal{S}$ に対して

$$\lim_{t \to \infty} p_{i,j}(t) = 0$$

となり，極限分布は存在しない．

定理 5.13 より，既約な連続時間マルコフ連鎖が正再帰的であるならば，時間が十分に経過すると定常状態に近づき，そこでの状態分布は大域方程式の唯一解で与えられる定常分布に等しいことが分かる．

系 5.14 (大域方程式の解の唯一性と連続時間マルコフ連鎖の正再帰性) 大域平衡方程式 (25) が全ての $j \in \mathcal{S}$ に対して $\pi_j > 0$ となる唯一の解を持つならば，連続時間マルコフ連鎖は既約で，かつ，正再帰的である．

系 5.14 は連続時間マルコフ連鎖における定常分布の一意性と既約かつ正再帰性が等価であると主張している．

最後に時間平均に関する結果を示す．$1_{\{\chi\}}$ を事象 χ の**指示関数**（indicator function）とする．

$$1_{\{\chi\}} = \begin{cases} 1, & \text{事象 } \chi \text{ が起こった場合} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

定理 5.15 (時間平均と定常分布) 既約で正再帰的な連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ において，任意の状態 $i \in \mathcal{S}$ に対して

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X(s)=i\}} ds = \frac{1/q(i)}{E[F_{i,i}]} \qquad \text{w.p.1} \tag{26}$$

ならびに

$$\frac{1/q(i)}{E[F_{i,i}]} = \pi_i$$

が成立する．

まず，$\{1_{\{X(t)=i\}};\ t \geq 0\}$ が $\{X(t);\ t \geq 0\}$ から派生した新たな確率過程となっていることに注意する．式 (26) の左辺に現れる積分は時間間隔 $[0,t]$ の間，連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ を観察した際，状態 i に留まっていた時間の総和を表す．よって t で割られた項は時間間隔 $[0,t]$ の間に状態 i に留まっている時間割合を表しており，この量は確定値ではなく，標本路毎に異なる値を取る確率変数である，さらに観察する時間間隔を無限大とした時間平均

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X(s)=i\}} ds$$

も，確率変数である（時間平均は 1 本の標本路上で定義されていることに注意）．これに対して，$\pi_i(t) = \Pr(X(t) = i)$ は時刻 t を固定したとき，全ての標本路に渡って平均をとった空間平均である．

式 (26) は，連続時間マルコフ連鎖 $\{X(t);\ t \geq 0\}$ が既約で正再帰的であるならば，時間平均は確率 1（w.p.1 = with probability 1）で確定値を取り，それが状態 i の平均再帰時間に占める状態 i に留まっている平均時間の割合で与えられることを主張している．さらに，定理 5.15 の 2 番目の式は，この比が定常分布に等しいこと，すなわち，時間平均が定常分布に等しいことを示している．これらの結果の証明には**再生理論**（renewal theory）の知識が必要であるが，本稿の範囲を超えるので省略する．

一般の確率過程において

1. 時間平均の極限 $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t 1_{\{X(s)=i\}} ds$ が存在し，確率 1 で定数となり，かつ
2. 空間平均の極限 $\lim_{t\to\infty} \Pr(X(t) = i)$ が存在し，
3. 両者が一致する

とき，**エルゴード的**（ergodic）であるという．すなわち，既約で正再帰的な連続時間マルコフ連鎖はエルゴード的である．

エルゴード的な定常過程は応用上，非常に重要である．例えば，確率的な挙動をするシステムを観察あるいは測定する場合，そこからは有限の時間区間で観察された（その極限は時間平均となる）標本平均しか手に入れることが出来ない．よって，観測結果から空間平均に関する性質を議論するためには，観察している確率過程がエルゴード的な定常過程である必要がある．一方，時間平均に比べて，空間平均は格段に解析的な扱いが容易である．エルゴード的であるならば，空間平均を解析的に求めることで，時間平均を得ることが可能である．

6 可逆な連続時間マルコフ連鎖と対称な待ち行列 [6]

この章では，可算状態空間 $\mathcal{S}$ 上で定義された，斉時かつ既約で正再帰的な連続時間マルコフ連鎖に関する可逆性及び準可逆性と，対称な待ち行列について述べる．前節では連続時間マルコフ連鎖は時刻 0 が起点となっていたが，この節では時刻 $-\infty$ を起点とする．すなわち $\{X(t);\ -\infty < t < \infty\}$ であり，必要に応じて負の時間も許す．

前節と同様に，状態 j から状態 k への遷移率を

$$q(j,k) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Pr(X(t+\Delta t) = k \mid X(t) = j)}{\Delta t}, \qquad j \neq k$$

で定義する．$j \neq k$ のとき $q(j,k) < \infty$ と仮定し，便宜上，

$$q(j,j) = 0$$

とする．よって

$$q(j) = \sum_{k\in\mathcal{S}} q(j,k)$$

とすると，定理 5.6 より状態 j に滞在する時間はパラメタ $q(j)$ の指数分布に従うことに注意する．$X(t)$ の定常分布 π_j $(j \in \mathcal{S})$ は大域平衡方程式 (25) を満たす総和が 1 の正の実数の組である．

6.1 定常分布と可逆性

定義 6.1 (逆過程) 連続時間マルコフ連鎖を含む一般の連続時間確率過程 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ に対して，ある定数 τ を用いて $Y(t) = X(\tau - t)$ で与えられる確率過程 $\{Y(t); -\infty < t < \infty\}$ は確率過程 $X(t)$ の逆過程（time-reversed process）と呼ばれる．

注意 6.2 $Y(t) = X(\tau - t) \Leftrightarrow X(t) = Y(\tau - t)$ に注意する．一般に，逆過程 $\{Y(t); -\infty < t < \infty\}$ の逆過程 $\{X'(t); -\infty < t < \infty\}$ は

$$X'(t) = Y(\tau' - t) = X\bigl(\tau - (\tau' - t)\bigr) = X\bigl(t - (\tau' - \tau)\bigr)$$

となり，元の過程 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ の時間起点を $(\tau' - \tau)$ だけ，移動させたもの（$t = \tau' - \tau$ を改めて $t = 0$ とおいたもの）と一致する．特に $\tau' = \tau$ の場合には両者は同一である．

補題 6.3 (逆過程の定常性) 連続時間マルコフ連鎖を含む一般の連続時間確率過程 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ が定常ならば，その逆過程 $\{Y(t); -\infty < t < \infty\}$ も定常である．

証明. 定常の定義（定義 5.9）より

$$\begin{aligned}
&\Pr(Y(t_1) = i_1, Y(t_2) = i_2, \ldots, Y(t_n) = i_n) \\
&\quad = \Pr(X(\tau - t_1) = i_1, X(\tau - t_2) = i_2, \ldots, X(\tau - t_n) = i_n) \\
&\quad = \Pr(X((-\tau') + \tau - t_1) = i_1, X((-\tau') + \tau - t_2) = i_2, \ldots, X((-\tau') + \tau - t_n) = i_n) \\
&\quad = \Pr(Y(\tau' + t_1) = i_1, Y(\tau' + t_2) = i_2, \ldots, Y(\tau' + t_n) = i_n)
\end{aligned}$$

□

確率過程 $X(t)$ が定常な連続時間マルコフ連鎖である場合，次の定理が成立する．

定理 6.4 (マルコフ連鎖の逆過程 1) $X(t)$ が遷移率 $q(j,k)$ $(j, k \in \mathcal{S})$，定常分布 π_j $(j \in \mathcal{S})$ をもつ定常な連続時間マルコフ連鎖であるならば，その逆過程 $Y(t) = X(\tau - t)$ は遷移率

$$q'(j,k) = \pi_k q(k,j)/\pi_j \tag{27}$$

をもつ定常な連続時間マルコフ連鎖であり，同じ定常分布をもつ．

証明. $\Pr(X(t+h) = j) \Pr(X(t) = k \mid X(t+h) = j) = \Pr(X(t) = k) \Pr(X(t+h) = j \mid X(t) = k)$ なので，

$$\Pr(X(t) = k \mid X(t+h) = j) = \frac{\pi_k}{\pi_j} \Pr(X(t+h) = j \mid X(t) = k) \tag{28}$$

を得る．ここで $s = \tau - t - h$ とすると $X(t) = Y(\tau - t)$ より

$$\Pr(X(t) = k \mid X(t+h) = j) = \Pr(Y(\tau - t) = k \mid Y(\tau - t - h) = j) = \Pr(Y(s+h) = k \mid Y(s) = j)$$

なので，(28) の両辺を h で割り，$h \to 0$ とすることにより $q'(j,k) = \pi_k q(k,j)/\pi_j$ を得る．加えて，補題 6.3 より定常な過程 $X(t)$ の逆過程 $Y(t)$ は定常である．また

$$\pi_j \sum_{k \in \mathcal{S}} q'(j,k) = \pi_j \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_k q(k,j)/\pi_j = \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_k q(k,j) = \pi_j \sum_{k \in \mathcal{S}} q(j,k) = \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_k q'(k,j),$$

より（3 番目の等号は元のマルコフ連鎖の大域方程式から得られる），逆過程の大域平衡方程式

$$\pi_j \sum_{k \in \mathcal{S}} q'(j,k) = \sum_{k \in \mathcal{S}} \pi_k q'(k,j), \qquad j \in \mathcal{S}$$

が成立することは容易に確かめられる． □

一般に，定常な連続時間確率過程 $X(t)$ の逆過程 $Y(t)$ は定常であり，$Y(t)$ の逆過程は元の過程 $X(t)$ となることに注意する．特に，連続時間マルコフ連鎖の場合には，定理 6.4 から，式 (27) で与えられる遷移率 $q'(j,k)$ $(j, k \in \mathcal{S})$，ならびに定常分布 π_j $(j \in \mathcal{S})$ をもつ定常な連続時間マルコフ連鎖 $Y(t)$ の逆過程は，遷移率 $q(j,k)$ $(j, k \in \mathcal{S})$ ならびに同じ定常分布 π_j $(j \in \mathcal{S})$ をもつ定常な連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ である．

$$q''(j,k) = \pi_k q'(k,j)/\pi_j = \pi_k \left(\pi_j q(j,k)/\pi_k\right)/\pi_j = q(j,k)$$

次に可逆性を定義する．

定義 6.5 (可逆性) 確率過程 $X(t)$ において，任意の n と任意の t_i $(i=1,\ldots,n)$ ならびに任意の τ に対して，$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n))$ が逆過程 $(Y(t_1),Y(t_2),\ldots,Y(t_n))=(X(\tau-t_1),X(\tau-t_2),\ldots,X(\tau-t_n))$ と同じ分布を持つとき，確率過程 $X(t)$ は**可逆**（reversible）であるという．

$$\text{可逆} \quad \Leftrightarrow \quad (X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)) \overset{\mathrm{D}}{\sim} (X(\tau-t_1),X(\tau-t_2),\ldots,X(\tau-t_n)), \quad \forall n, \forall t_i\ (i=1,2,\ldots,n), \forall \tau$$

補題 6.6 (可逆性と定常性) 可逆な確率過程は定常である．
証明. 可逆な確率過程 $\{X(t); -\infty < t < \infty\}$ を考える．定常性，すなわち，任意の n と τ に対して

$$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)) \overset{\mathrm{D}}{\sim} (X(\tau+t_1),X(\tau+t_2),\ldots,X(\tau+t_n))$$

となることを示したい．そこで $\tau=\tau_B-\tau_A$ なる τ_A，τ_B を考える（定常性の定義は定義 5.9 を参照）．可逆性の定義から

$$(X(t_1),X(t_2),\ldots,X(t_n)) \overset{\mathrm{D}}{\sim} (X(\tau_A-t_1),X(\tau_A-t_2),\ldots,X(\tau_A-t_n))$$

である．さらに

$$\begin{aligned}(X(\tau_A-t_1),X(\tau_A-t_2),\ldots,X(\tau_A-t_n)) &\overset{\mathrm{D}}{\sim} \big(X\big(\tau_B-(\tau_A-t_1)\big),X\big(\tau_B-(\tau_A-t_2)\big),\ldots,X\big(\tau_B-(\tau_A-t_n)\big)\big)\\ &= \big(X\big((\tau_B-\tau_A)+t_1\big),X\big((\tau_B-\tau_A)+t_2\big),\ldots,X\big((\tau_B-\tau_A)+t_n\big)\big)\\ &= (X(\tau+t_1),X(\tau+t_2),\ldots,X(\tau+t_n))\end{aligned}$$

より，題意は示された．

□

遷移率 $q(j,k)$ $(j,k\in\mathcal{S})$，定常分布 π_j $(j\in\mathcal{S})$ をもつ定常な連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ が可逆であるということは，その逆過程 $Y(t)$ も同じ遷移率と定常分布をもつということと等価である．
定理 6.7 (局所平衡方程式と可逆性) 定常な連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ が可逆であるための必要十分条件は**局所平衡方程式**（detailed balance equations）

$$\pi_j q(j,k)=\pi_k q(k,j), \qquad j,k\in\mathcal{S} \tag{29}$$

を満たす定常分布 $\pi_j>0$ $(j\in\mathcal{S})$ が存在することである．
証明. 可逆ならば，定理 6.4 より，逆過程の遷移率 $q'(j,k)=\pi_k q(k,j)/\pi_j$ は元の過程の遷移率 $q(j,k)$ に等しいため，直ちに局所平衡方程式 (29) が得られる．逆に，局所平衡方程式が成立するならば，逆過程の遷移率は $q'(j,k)=\pi_k q(k,j)/\pi_j=q(j,k)$ となり，同じ遷移率をもつ． □

局所平衡方程式 (29) の両辺を全ての $k\in\mathcal{S}$ について和をとると大域平衡方程式 (25) となる．よって，局所平衡方程式を満たす分布は大域平行方程式も満たすため，それは定常分布である．局所平衡方程式 (29) は，任意に選ばれた二つの状態間の確率フローが等しいことを示している．

一方，大域平衡方程式 (25) は状態 j から出る確率フローの総和が状態 j に入る確率フローの総和に等しいことを示していた．この一般化として，状態集合 $\mathcal{S}$ の空でない真部分集合 $\mathcal{A}$ とその補集合 $\mathcal{S}-\mathcal{A}$ に対して，以下の補題が成立する．
補題 6.8 (カットバランス) 定常な連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ において，状態集合 $\mathcal{S}$ の空でない真部分集合 $\mathcal{A}$ から補集合 $\mathcal{S}-\mathcal{A}$ へ出る確率フローの総和は補集合 $\mathcal{S}-\mathcal{A}$ から部分集合 $\mathcal{A}$ へ入る確率フローの総和に等しい．すなわち，

$$\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{k\in\mathcal{S}-\mathcal{A}}\pi_j q(j,k)=\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{k\in\mathcal{S}-\mathcal{A}}\pi_k q(k,j) \tag{30}$$

が成立する．この等式は**カット平衡方程式** (cut-balance equations) と呼ばれる．
証明. 大域平衡方程式 (25) を $j\in\mathcal{A}$ について足し合わせると

$$\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{k\in\mathcal{S}}\pi_j q(j,k)=\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{k\in\mathcal{S}}\pi_k q(k,j)$$

を得る．これから自明の等式

$$\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{k\in\mathcal{A}}\pi_j q(j,k)=\sum_{j\in\mathcal{A}}\sum_{k\in\mathcal{A}}\pi_k q(k,j)$$

を引けば式 (30) を得る． □

注意 6.9 $\mathcal{A}=\{j\}$ のとき，式 (30) は大域平衡方程式 (25) に等しい．すなわち，大域平衡方程式とカット平衡方程式は等価である．

状態をノード，$q(j,k)>0$ なるノード j,k 間に j から k への有向枝をもつグラフ G を考えると，式 (30) はグラフ上の任意のカット[9]を横切る確率フローが等しいことを示している．これより，以下の結果を得る．

系 6.10 (木型のグラフをもつマルコフ連鎖) 定常で規約な連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ に対するグラフ G が**木型**（tree）ならば，$X(t)$ は可逆である．

証明. 既約かつグラフが木型であるときには，$q(j,k)>0$ ならば $q(k,j)>0$ となることに注意する．もし，状態 j と状態 k の間に枝がなければ局所平衡方程式は満たされる（$0=0$）．そこで，状態 j と状態 k の間に枝があるとする．グラフ G は木型なので，この枝を取り除くことによって状態集合 $\mathcal{S}$ を 2 つの排反な部分集合 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{S}-\mathcal{A}$ に分割できる．そこで，これらの排反な部分集合 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{S}-\mathcal{A}$ に対してカットバランス（式 (30) ）を適用すると，状態 j と状態 k に関する局所平衡方程式 (29) を得る．よって定理 6.7 より $X(t)$ は可逆である． □

例 6.11 (出生死滅過程) $\mathcal{S}=\{0,1,2\ldots\}$ であり，任意の $i,j\in\mathcal{S}$ に対して

$$q(i,j)=\begin{cases}\lambda_i, & j=i+1\\ \mu_i, & j=i-1\geq 0\\ 0, & \text{その他}\end{cases}$$

であるような連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ を出生死滅過程（birth-and-death process）と呼ぶ．系 6.10 より，定常な出生死滅過程は可逆である．

定理 6.12 (Kolmogorov の規準) 定常な連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ が可逆であるための必要十分条件は，任意の有限列 $j_1,j_2,\ldots,j_m\in\mathcal{S}$ に対して

$$\begin{aligned}&q(j_1,j_2)q(j_2,j_3)\cdots q(j_{m-1},j_m)q(j_m,j_1)\\&\qquad=q(j_1,j_m)q(j_m,j_{m-1})\cdots q(j_3,j_2)q(j_2,j_1)\end{aligned}\tag{31}$$

が成立することである．

注意 6.13 上記には自明の等式 $q(j_1,k)q(k,j_1)=q(j_1,k)q(k,j_1)$ も含まれている．

証明. （必要性）$X(t)$ が可逆ならば，$(j,k)=(j_n,j_{n+1})$ $(n=1,\ldots,m-1)$ ならびに $(j,k)=(j_m,j_1)$ に対する局所平衡方程式 (29) の両辺をそれぞれ掛け合わせると式 (31) を得る．

（十分性）ある状態 j_0 を選ぶ．このとき $X(t)$ は既約なので，任意の状態 j に対して，

$$q(j,j_m)q(j_m,j_{m-1})\cdots q(j_1,j_0)>0$$

なる状態の列 $j_1,\ldots,j_m$ が存在する．ここで $\eta(j\mid j_0)$ を

$$\eta(j\mid j_0)=\frac{q(j_0,j_1)q(j_1,j_2)\cdots q(j_{m-1},j_m)q(j_m,j)}{q(j,j_m)q(j_m,j_{m-1})\cdots q(j_2,j_1)q(j_1,j_0)}\tag{32}$$

とする．式 (31) が成立するならば，$\eta(j\mid j_0)$ の値は列 $j_1,\ldots,j_m$ の選び方に依らない．なぜならば，もし $q(j,j'_l)q(j'_l,j'_{l-1})\cdots q(j'_1,j_0)>0$ なる他の系列 $j'_1,\ldots,j'_l$ が存在するならば，式 (31) より

$$\begin{aligned}&q(j,j'_l)q(j'_l,j'_{l-1})\cdots q(j'_2,j'_1)q(j'_1,j_0)\times q(j_0,j_1)q(j_1,j_2)\cdots q(j_{m-1},j_m)q(j_m,j)\\&\quad=q(j,j_m)q(j_m,j_{m-1})\cdots q(j_2,j_1)q(j_1,j_0)\times q(j_0,j'_1)q(j'_1,j'_2)\cdots q(j'_{l-1},j'_l)q(j'_l,j)\end{aligned}\tag{33}$$

であるため，式 (33) において左辺を $\eta(j\mid j_0)$ となるように移項すると

$$\eta(j\mid j_0)=\frac{q(j_0,j_1)q(j_1,j_2)\cdots q(j_{m-1},j_m)q(j_m,j)}{q(j,j_m)q(j_m,j_{m-1})\cdots q(j_2,j_1)q(j_1,j_0)}=\frac{q(j_0,j'_1)q(j'_1,j'_2)\cdots q(j'_{l-1},j'_l)q(j'_l,j)}{q(j,j'_l)q(j'_l,j'_{l-1})\cdots q(j'_2,j'_1)q(j'_1,j_0)}\tag{34}$$

が成立するからである．さらに既約性から $j,j_m,\cdots,j_1,j_0,j''_1,\cdots j''_l,j$ なるパスが存在し，そのとき式 (31) よりその逆のパスも存在するため，式 (34) の j'_k を j''_k に置き換えることにより $\eta(j\mid j_0)>0$ がわかる．

[9]連結グラフ $G=(\mathcal{S},\mathcal{E})$ において，空でないノードの真部分集合 $\mathcal{A}$（$\mathcal{A}\subset\mathcal{S}$, $\mathcal{A}\neq\phi,\mathcal{S}$）に対して，枝の集合 $E(\mathcal{A})$ が $E(\mathcal{A})=\{(u,v)\in\mathcal{E}\mid u\in\mathcal{A},v\in\mathcal{S}-\mathcal{A}\}$ と定義できるとき，枝の集合 $E(\mathcal{A})$ はカットと呼ばれる．

上記の議論を踏まえて，式 (31) が成立するならば，任意の j, k に対して局所平衡方程式 (29) が成立することを示す．$q(j,k) = q(k,j) = 0$ ならば式 (29) は成立するので，$q(k,j) > 0$ と仮定する．このとき

$$\begin{aligned}\eta(k \mid j_0) &= \frac{q(j_0,j_1)q(j_1,j_2)\cdots q(j_{m-1},j_m)q(j_m,j)\cdot q(j,k)}{q(k,j)\cdot q(j,j_m)q(j_m,j_{m-1})\cdots q(j_2,j_1)q(j_1,j_0)}\\ &= \frac{q(j,k)}{q(k,j)}\cdot\frac{q(j_0,j_1)q(j_1,j_2)\cdots q(j_{m-1},j_m)q(j_m,j)}{q(j,j_m)q(j_m,j_{m-1})\cdots q(j_2,j_1)q(j_1,j_0)}\end{aligned}$$

と書ける．すなわち，式 (32) に注意すると

$$\eta(k \mid j_0)q(k,j) = \eta(j \mid j_0)q(j,k)$$

である．加えて $q(k,j_0) > 0$ なる状態 k に対しては

$$\eta(k \mid j_0) = \frac{q(j_0,k)}{q(k,j_0)}$$

と書くことができるため，$\eta(j_0 \mid j_0) = 1$ と置けば

$$\eta(k \mid j_0)q(k,j_0) = \eta(j_0 \mid j_0)q(j_0,k)$$

も成立する．よって $\eta(j \mid j_0) > 0$ $(j \in \mathcal{S})$ は局所平衡方程式 (29) を満たす正数である．さらに，局所平衡方程式を満たす正数は大域平衡方程式も満たす．ここで，$X(t)$ は定常なので定常分布 π_j は必ず存在し，定数 $B(j_0)$ を用いて，

$$\pi_j = B(j_0)\eta(j \mid j_0)$$

で与えられる．ただし

$$B(j_0) = \Big[\sum_{j\in\mathcal{S}}\eta(j \mid j_0)\Big]^{-1}$$

よって，式 (31) が成立するならば，局所平衡方程式 (29) が成立する． □

注意 6.14 $\eta(j \mid j_0) > 0$ より，可逆な連続時間マルコフ連鎖において状態 j から状態 k に至るパス $j, j_1, j_2, \ldots, j_m, k$ が存在すれば，状態 k から状態 j へ至る逆向きのパス $k, j_m, j_{m-1}, \ldots, j_1, j$ も必ず存在する．

次に，状態集合 $\mathcal{S}$ と定常分布 π_j $(j \in \mathcal{S})$ をもつ可逆な連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ に対して，遷移率 $q(j,k)$ がある実数 $c > 0$ を用いて $cq(j,k)$, $j \in \mathcal{A}$, $k \in \mathcal{S}-\mathcal{A}$ となっている新しい連続時間マルコフ連鎖 $X'(t)$ を考える．

補題 6.15 (可逆マルコフ連鎖における遷移率の変更) 可逆な連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ の遷移率を $q(j,k)$ $(j,k \in \mathcal{S})$ とする．このとき，遷移率 $q'(j,k)$ $(j,k \in \mathcal{S})$ がある実数 $c > 0$ を用いて

$$q'(j,k) = \begin{cases} cq(j,k), & j \in \mathcal{A}, k \in \mathcal{S}-\mathcal{A}\\ q(j,k), & \text{その他}\end{cases}$$

で与えられる連続時間マルコフ連鎖 $X'(t)$ は可逆であり，定常分布 π'_j は

$$\pi'_j = \begin{cases} B\pi_j, & j \in \mathcal{A}\\ Bc\pi_j, & j \in \mathcal{S}-\mathcal{A}\end{cases}$$

で与えられる．ただし B は正規化定数であり，

$$B^{-1} = \sum_{j\in\mathcal{A}}\pi_j + c\sum_{j\in\mathcal{S}-\mathcal{A}}\pi_j$$

で与えられる．

証明. 元のマルコフ連鎖 $X(t)$ は可逆なので局所平衡方程式 $\pi_j q(j,k) = \pi_k q(k,j)$ が成立する．

$j,k \in \mathcal{A}$ あるいは $j,k \in \mathcal{S}-\mathcal{A}$ の場合，局所平衡方程式 $\pi_j q(j,k) = \pi_k q(k,j)$ の両辺に B あるいは Bc を掛けることにより，

$$B\pi_j q(j,k) = B\pi_k q(k,j), \qquad Bc\pi_j q(j,k) = Bc\pi_k q(k,j) \tag{35}$$

が成立する．よって $j,k \in \mathcal{A}$ あるいは $j,k \in \mathcal{S}-\mathcal{A}$ の場合，式 (35) より，局所平衡方程式 $\pi'_j q'(j,k) = \pi'_k q'(k,j)$ が成立することが分かる．

一方，$j \in \mathcal{A}$, $k \in \mathcal{S}-\mathcal{A}$ の場合，式 (35) の 2 番目の式を変更後の遷移率を用いて書き換えると

$$B\pi_j q'(j,k) = Bc\pi_k q'(k,j)$$

となり，局所平衡方程式 $\pi'_j q'(j,k) = \pi'_k q'(k,j)$ が成立することが確かめられる．$j \in \mathcal{S}-\mathcal{A}$, $k \in \mathcal{A}$ の場合も同様である（j と k の役割を入れ替えれば良い）．

また，定義より $\pi'_j > 0$ $(j \in \mathcal{S})$ であり，

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} \pi'_j = \sum_{j\in\mathcal{A}} \pi'_j + \sum_{j\in\mathcal{S}-\mathcal{A}} \pi'_j = B\left(\sum_{j\in\mathcal{A}} \pi_j + c\sum_{j\in\mathcal{S}-\mathcal{A}} \pi_j\right) = 1$$

となるため， π'_j $(j \in \mathcal{S})$ は和が 1 となる正数である（すなわち，π'_j $(j \in \mathcal{S})$ は $\mathcal{S}$ 上の確率分布をなす）．

以上より，π'_j $(j \in \mathcal{S})$ は和が 1 となる正数であり，局所方程式を満たす．局所方程式を満たす正数の組は大域平衡方程式を満たすため，定常分布である．よって，題意は示された． □

もし $c = 0$ ならば，連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ の状態集合 $\mathcal{S}$ は 2 つに分割される．$q(j,k) = 0$ $(j \in \mathcal{A}$, $k \in \mathcal{S}-\mathcal{A})$ であり，かつ $\mathcal{A}$ 内において $X'(t)$ が既約である場合，$X'(t)$ を状態集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ へ向けて切断された連続時間マルコフ連鎖という．

系 6.16 (切断された可逆マルコフ連鎖) 状態集合 $\mathcal{A} \subset \mathcal{S}$ へ向けて切断されたマルコフ連鎖 $X'(t)$ は可逆であり，かつ，定常分布 π'_j は

$$\pi'_j = \frac{\pi_j}{\displaystyle\sum_{k\in\mathcal{A}} \pi_k}, \qquad j \in \mathcal{A}$$

で与えられる．

証明. 定義より π'_j $(j \in \mathcal{A})$ は和が 1 となる正数である．さらに，元のマルコフ連鎖 $X(t)$ は可逆なので局所平衡方程式 $\pi_j q(j,k) = \pi_k q(k,j)$ が成立する．よって $j,k \in \mathcal{A}$ として $\pi_j q(j,k) = \pi_k q(k,j)$ の両辺を $\sum_{k\in\mathcal{A}} \pi_k$ で割れば，π'_j $(j \in \mathcal{A})$ は局所平衡方程式 (29) を満たすことが分かる． □

切断の議論は可逆なマルコフ連鎖に対して成立する性質であり，一般の連続時間マルコフ連鎖では成立しないことに注意する．この節の議論を終えるに当たって，逆過程を用いて定常分布を発見的に見いだす方法を与える．

定理 6.17 (マルコフ連鎖の逆過程２) $X(t)$ を遷移率 $q(j,k)$ $(j,k \in \mathcal{S})$ をもつ定常な連続時間マルコフ連鎖であるとする．もし，

$$\sum_{k\in\mathcal{S}} q'(j,k) = \sum_{k\in\mathcal{S}} q(j,k) \tag{36}$$

を満たす非負の数 $q'(j,k)$ と，

$$\pi_j q(j,k) = \pi_k q'(k,j), \qquad j,k \in \mathcal{S} \tag{37}$$

を満たす和が 1 となる正数 π_j $(j \in \mathcal{S})$ が存在するならば，$q'(j,k)$ は逆過程 $X(\tau - t)$ の遷移率であり，π_j $(j \in \mathcal{S})$ は両方の過程の定常分布 である．

証明. 式 (37) の両辺を j について和をとり，式 (36) を用いると

$$\sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j q(j,k) = \pi_k \sum_{j\in\mathcal{S}} q'(k,j) = \pi_k \sum_{j\in\mathcal{S}} q(k,j)$$

を得る．よって π_j $(j \in \mathcal{S})$ は $X(t)$ の定常分布 である．さらに，定理 6.4 より，式 (37) の $q'(j,k)$ は逆過程の遷移率である． □

注意 6.18 定理 6.17 の条件 (36) は，逆過程 $X'(t)$ における状態 j の滞在時間が元の過程 $X(t)$ における状態 j の滞在時間分布と同じ分布に従うことを要請している．

6.2　待ち行列モデルの準可逆性

定常な連続時間マルコフ連鎖 $X(t)$ の可逆性は，定理 6.7 にあるように，局所平衡方程式を満たすことと等価であった．ここでは，もう少しマクロな目でシステムの挙動を眺めることにする．以下では，複数のクラスの客が到着する待ち行列を考える．客のクラスを表すインデックスの集合を $\mathcal{C}$ とし，$\boldsymbol{X}(t)$ でシステムの状態を表す．$\boldsymbol{X}(t)$ は各クラスのシステム内客数をはじめ，システムの挙動を表すのに十分な情報を含んでいるものとする．

定義 6.19 (準可逆性) ある待ち行列の挙動を表す定常な連続時間マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}(t)$ に対して，

(i) 任意の時刻 t_0 における状態 $\boldsymbol{X}(t_0)$ と時刻 t_0 以降のクラス $i \in \mathcal{C}$ の客の到着が独立であり，かつ，

(ii) 任意の時刻 t_0 における状態 $\boldsymbol{X}(t_0)$ と時刻 t_0 以前のクラス $i \in \mathcal{C}$ の客の離脱が独立である

とき，この待ち行列は**準可逆**（quasi-reversible）であると呼ばれる．

定理 6.20 (準可逆性の必要条件) もし，ある待ち行列が準可逆であるならば

(i) クラス $i \in \mathcal{C}$ の客の到着は（他の事象とは独立な）ポワソン過程に従い，かつ

(ii) クラス $i \in \mathcal{C}$ の客の離脱は（他の事象とは独立な）ポワソン過程に従う．

証明. $\mathcal{T}(i, \boldsymbol{X})$ をクラス i の客が状態 $\boldsymbol{X}$ に比べて 1 人だけ多く，他のクラスの客は同じ数である状態の集合を表すとする．このとき，$\boldsymbol{X}$ から $\boldsymbol{X}' \in \mathcal{T}(i, \boldsymbol{X})$ への遷移は，クラス i の客の到着を示すことに注意する．待ち行列は準可逆なので，クラス i の客の時間区間 $(t_0, t_0 + \delta t]$ における到着と $\boldsymbol{X}(t_0)$ は独立である．それゆえ，状態が $\boldsymbol{X}$ であるときのクラス i の客の到着は i のみに依存し，状態 $\boldsymbol{X}$ とは独立である．よって

$$\lambda_i = \sum_{\boldsymbol{X}' \in \mathcal{T}(i, \boldsymbol{X})} q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') \tag{38}$$

なる定数 λ_i が存在する．$\boldsymbol{X}(t)$ は連続時間マルコフ連鎖なので，標本 $\{\boldsymbol{X}(t);\ -\infty < t \le t_0\}$ は t_0 までのクラス i の客の到着に関する情報を含むが，クラス i の客の時間区間 $(t_0, t_0 + \delta t)$ における到着に関しては，$\boldsymbol{X}(t_0)$ 以上の情報を持ち得ない．よって，時刻 t_0 までの履歴如何に依らず，クラス i の客の到着は（他の事象と独立な）率 λ_i のポワソン過程に従う．

一方，離脱に関しては逆過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ を考えれば良い．逆過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ もまた，ある種の待ち行列と見なすことができ，元の待ち行列 $\boldsymbol{X}(t)$ でのクラス i の到着（離脱）が，逆過程で表される待ち行列 $\boldsymbol{X}(-t)$ ではクラス i の離脱（到着）に対応することに注意する．待ち行列 $\boldsymbol{X}(t)$ が準可逆であるならば，逆過程の待ち行列 $\boldsymbol{X}(-t)$ も準可逆であり，逆過程の待ち行列 $\boldsymbol{X}(-t)$ でのクラス i の到着は（他の事象とは独立な）ポワソン過程に従う．よって，元の待ち行列 $\boldsymbol{X}(t)$ のクラス i の離脱も（他の事象とは独立な）率 λ_i のポワソン過程に従う．□

注意 6.21 定理 6.20 はあくまで必要条件である．準可逆の定義は待ち行列の挙動を表す連続時間マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}(t)$ に関する性質であり，定理 6.20 のような待ち行列そのものの挙動には直接言及していない．それゆえ，ある状態の取り方を採用すると準可逆になる待ち行列であっても，状態の取り方によっては準可逆にならない例を構築できる．例えば，待ち行列内客数 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_{|\mathcal{C}|})$ と最後に待ち行列を離脱した客のクラス i からなるマルコフ連鎖 $(\boldsymbol{n}, i)$ は準可逆ではない．

注意 6.22 与えられた待ち行列が準可逆かどうかを判定することを考える．マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}(t)$ の定義より，時刻 t_0 以降のクラス i の客の到着が $\boldsymbol{X}(t_0)$ と独立である場合が多い．また，逆過程を考えることにより，時刻 t_0 以前の離脱（逆過程における到着に対応）が $\boldsymbol{X}(t_0)$ と独立であることを示せる場合がしばしばある．特に，単一のクラスのみからなり，客の到着がポアソン過程に従う可逆な連続時間マルコフ連鎖で表現される待ち行列は準可逆である．

$\pi_{\boldsymbol{X}}$ を待ち行列 $\boldsymbol{X}(t)$ の定常分布とする．

定理 6.23 (部分平衡方程式) 準可逆で定常な連続時間マルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}(t)$ の定常分布 $\pi_{\boldsymbol{X}}$ は**部分平衡方程式**（partial balance equations）

$$\pi_{\boldsymbol{X}} \sum_{\boldsymbol{X}' \in \mathcal{T}(i, \boldsymbol{X})} q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = \sum_{\boldsymbol{X}' \in \mathcal{T}(i, \boldsymbol{X})} \pi_{\boldsymbol{X}'} q(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}) \tag{39}$$

を満たす．

証明. 定常状態にある待ち行列 $\boldsymbol{X}(t)$ が準可逆ならば，クラス i の客の離脱は（到着率と同じ）率 λ_i のポワソン過程に従う．それゆえ，逆過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ の待ち行列におけるクラス i の到着率も λ_i で与えられる．すなわち，逆

過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ の遷移率を $q'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}')$ としたとき

$$\lambda_i = \sum_{\boldsymbol{X}'\in\mathcal{T}(i,\boldsymbol{X})} q'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}') \tag{40}$$

が成立する．一方，逆過程 $\boldsymbol{X}(-t)$ の遷移率 $q'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}')$ は

$$\pi_{\boldsymbol{X}'} q(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{X}) = \pi_{\boldsymbol{X}} q'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}') \tag{41}$$

を満たすことに注意する（定理 6.4 参照）．そこで，式 (41) の両辺を $\boldsymbol{X}'$ について和を取り，式 (38) ならびに式 (40) に注意すると

$$\sum_{\boldsymbol{X}'\in\mathcal{T}(i,\boldsymbol{X})} \pi_{\boldsymbol{X}'} q(\boldsymbol{X}',\boldsymbol{X}) = \pi_{\boldsymbol{X}} \sum_{\boldsymbol{X}'\in\mathcal{T}(i,\boldsymbol{X})} q'(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}') = \pi_{\boldsymbol{X}}\lambda_i = \pi_{\boldsymbol{X}} \sum_{\boldsymbol{X}'\in\mathcal{T}(i,\boldsymbol{X})} q(\boldsymbol{X},\boldsymbol{X}')$$

となり，式 (39) を得る． □

注意 6.24 部分平衡方程式は，クラス i の客がある状態 $\boldsymbol{X}$ で到着する確率フローとクラス i の客の離脱によってある状態 $\boldsymbol{X}$ にいたる確率フローが等しいことを示している．また，到着がポワソン過程に従うことから，到着直前の状態分布は時間平均分布に等しい．一方，離脱（＝逆過程における到着）もポワソン過程に従うことから，離脱直後（＝逆過程における到着直前）の状態分布も時間平均分布に等しい．よって，準可逆な待ち行列における（特定のクラスに属する客の）到着直前と離脱直後の状態分布は同一である．

注意 6.25 局所平衡方程式 (29) が満たされているならば，部分平衡方程式 (39) は直ちに満たされるが，逆は必ずしも成り立たない．よって，可逆性は局所平衡方程式という，より厳しい条件を満足しなければならないが，システムの状態に依存した到着を許している．一方，準可逆性は確率フローに関しては（相対的に弱い）部分平衡方程式しか課さないが，到着に関しては，システムの状態とは独立なポワソン過程を要求する点で，本質的に異なることに注意する．

6.3 対称な待ち行列

待ち行列への客の到着と離脱に対応するマルコフ連鎖の遷移がある特殊な条件を満たすとき，待ち行列は準可逆であることが知られている．以下にその概要を示す．

定義 6.26 (Kelly の対称な待ち行列) 複数のクラスをもつ待ち行列を考える．クラス $i \in \mathcal{C}$ の客の到着は率 λ_i の独立なポワソン過程に従う．以下では，待ち行列内にいる総客数を n で表す．待ち行列内における客が配置される場所には番号がつけられており，ポジション l $(l = 1.2.\ldots,n)$ にいる客を l 番目の客という．この待ち行列が以下の性質を満たすとき，Kelly の**対称な待ち行列**（symmetric queue）という．

(i) 一般に，客のサービス要求量（処理能力 1 で処理した場合のサービス時間）の分布は客が属するクラスに依存する．

(ii) サービスに費やされる総能力（通信速度 bps に対応）は率 $\phi(n)$ で与えられる．ただし，$n > 0$ のとき $\phi(n) > 0$.

(iii) l 番目の客に対して，$\phi(n)$ のうち，割合 $\gamma(l,n)$ だけの能力が割かれる．この客がシステムを離脱したとき，i 番目の客（$i = l+1,\ldots,n$）は $i-1$ 番目のポジションへ移動する．ただし，全ての $n \geq 1$ に対して $\sum_{l=1}^{n}\gamma(l,n) = 1$ である．

(iv) 新しく客が到着したとき，確率 $\gamma(l,n+1)$ $(l = 1,\ldots,n+1)$ で l 番目のポジションに入る．このとき，i 番目の客（$i = l+1,\ldots,n$）は $i+1$ 番目のポジションへ移動する．

ここで Kelly の対称な待ち行列の例を幾つかあげておく．

スタック

$$\gamma(l,n) = 1, \qquad l = n;\ n = 1,2,\ldots$$

もし，$\phi(n) = 1$ $(n = 1,2,\ldots)$ ならば**割り込み再開型後着順サービス** (last-come first-served preemptive-resume, LCFS-PR) の単一サーバ待ち行列となる．

無限サーバ待ち行列（$M/G/\infty$）

$$\phi(n) = n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$
$$\gamma(l, n) = \frac{1}{n}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots$$

プロセッサシェアリング（processor-sharing）

$$\gamma(l, n) = \frac{1}{n}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots$$

$\phi(n) = 1$ ならば単一サーバプロセッサシェアリング待ち行列となる．

待ち部屋のない K サーバ待ち行列（$M/G/K/K$）

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= n, \qquad n = 1, 2, \ldots, K \\
\phi(n) &= \xi, \qquad n = K+1, K+2, \ldots \\
\gamma(l, n) &= \frac{1}{n}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots, K \\
\gamma(l, n) &= 1, \qquad l = n;\ n = K+1, K+2, \ldots
\end{aligned}$$

ここで ξ は十分に大きな数とする．

同時処理数に制約のあるプロセッサシェアリング（即時系）

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= 1, \qquad n = 1, 2, \ldots, K \\
\phi(n) &= \xi, \qquad n = K+1, K+2, \ldots \\
\gamma(l, n) &= \frac{1}{n}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots, K \\
\gamma(l, n) &= 1, \qquad l = n;\ n = K+1, K+2, \ldots
\end{aligned}$$

ここで ξ は十分に大きな数とする．

各ジョブに対する処理能力に制限のあるプロセッサシェアリング

$$\begin{aligned}
\phi(n) &= n, \qquad n = 1, 2, \ldots, K \\
\phi(n) &= K, \qquad n = K+1, K+2, \ldots \\
\gamma(l, n) &= \frac{1}{n}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2, \ldots
\end{aligned}$$

定義 6.27 (対称な待ち行列 [13]) 定義 6.26 の条件 (iii)，(iv) を以下のように緩めたものを対称な待ち行列という．

(iii’) l 番目の客に対して，$\phi(n)$ のうち，割合 $\gamma(l,n)$ だけの能力が割かれる．ただし，全ての $n \geq 1$ に対して $\sum_{l=1}^{n} \gamma(l,n) = 1$ である．l 番目の客がシステムを離脱したとき，システム内にいる残りの $n-1$ 人の客のポジションは，以下のように決定される．まず，$\sigma_n(l)$ で l のみを固定した n 文字の置換を表す．すなわち $\sigma_n(l) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$ かつ $j_l = l$ である．l 番目の客がシステムを離脱したとき，確率 $a(\sigma_n(l))$ でシステム内に残っている i（$i = 1, \ldots, n, i \neq l$）番目のポジションの客は，もし $j_i < l$ なら j_i 番目のポジションへ，$j_i > l$ ならば $j_i - 1$ 番目のポジションへ移動する．

(iv’) 新しく客が到着したとき，確率 $\gamma(l, n{+}1)$ ($l = 1, \ldots, n{+}1$) で l 番目のポジションに入る．このとき，確率 $b(\sigma_{n+1}(l))$ でシステム内にいた i（$i = 1, \ldots, l-1$）番目のポジションの客は j_i 番目のポジションへ，i（$i = l, \ldots, n$）番目のポジションの客は j_{i+1} 番目のポジションへ移動する．

注意 6.28 定義 6.27 (iii’) で述べられたポジション移動は，客の離脱時に，離脱直前の客数 n と離脱客のポジション l の情報のみを用いた（確率的）ルールに従い移動することを許している．同様に，(iv’) は，客の到着時に，到着直前の客数 n と到着客のポジション l の情報のみを用いた（確率的）ルールに従い移動することを許している．Kelly の移動ルールはこれらの特別な場合（特定の置換のみ確率 1 で許す）とみなすことができる．

以下では，クラス i の客のサービス時間は各指数ステージが平均 $1/\mu_i$ をもつ k_i 次のアーラン分布に従うと仮定する．サービス時間の平均は k_i/μ_i で与えられることに注意する．なお，ここでいうサービス時間とは，そのサービスに費やされる能力が 1 であると仮定した場合のサービスを完了するのに必要な時間に相当する．それ故，仮に，あるクラス i の客が一定の能力 α でサービスを受け続けるとすると，各ステージで費やす時間はパラメタ $\alpha\mu_i$ の指数分布となる．よって，この客のサービスを完了するのに必要な時間は各指数ステージが平均 $1/(\alpha\mu_i)$ をもつ k_i 次のアーラン分布に従うことになる．

例 6.29 (指数分布の場合) サービス時間 X をもつジョブを一定の能力 α で処理した場合の処理時間を Y とする．このとき $Y = X/\alpha$ が成立する（例えば X はパケット長 (bit)，Y を送信時間 (sec)，α は回線速度 (bit/sec) に相当）．よって X がパラメタ μ の指数分布に従う（$\Pr(X \le x) = 1 - \exp(-\mu x),\ x \ge 0$）ならば

$$\Pr(Y \le x) = \Pr(X/\alpha \le x) = \Pr(X \le \alpha x) = 1 - e^{-\mu\alpha x}$$

となり，処理時間 Y はパラメタ $\alpha\mu$ の指数分布に従う．

$c(l)$ で l 番目のポジションにいる客のクラスを表し，$u(l)$ $(1 \le u(l) \le k_{c(l)})$ で l 番目の客の現在サービス中のステージ番号とする．このとき，$\boldsymbol{X}(l) = (c(l), u(l))$ とすると

$$\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}(1), \boldsymbol{X}(2), \ldots, \boldsymbol{X}(n))$$

は待ち行列の状態を表すマルコフ連鎖となる．

定理 6.30 (対称な待ち行列の定常分布) クラス $i \in \mathcal{C}$ の客が独立な率 λ_i のポワソン過程に従い到着し，サービス時間が（クラスに依存する）アーラン分布に従う対称な待ち行列において

$$\rho = \sum_{i \in \mathcal{C}} \lambda_i \cdot \frac{k_i}{\mu_i}$$

としたとき

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\rho^n}{\displaystyle\prod_{l=1}^{n} \phi(l)}$$

が収束するならば，定常分布 $\pi_{\boldsymbol{X}}$ が存在し，

$$\pi_{\boldsymbol{X}} = B \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda_{c(l)}}{\mu_{c(l)}\phi(l)} \tag{42}$$

で与えられる．

証明. 定常分布が式 (42) で与えられることは，大域平衡方程式を満たすことを示せば良いが，ここでは定理 6.17 を用いて証明する．

まず，逆過程の候補として，同じ到着率を持ち，状態 $u(l)$ を l 番目のポジションにおけるサービス完了までの残余ステージ数を表す待ち行列を考える．元の待ち行列のある状態 $\boldsymbol{X}$ において，クラス i の客が到着し，l 番目のポジションに入ることによって状態が $\boldsymbol{X}'$ へ変化すると仮定すると，その率は $q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = \lambda_i \gamma(l, n+1)$ である．一方，逆過程候補の待ち行列での状態 $\boldsymbol{X}'$ から $\boldsymbol{X}$ への遷移（ポジション l にいるクラス i の客の離脱）は，率 $q'(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}) = \phi(n+1)\gamma(l, n+1)\mu_i$ で起こる．よって逆過程候補が真の逆過程であるならば，これらの遷移は同一の現象を表現しているので

$$\pi_{\boldsymbol{X}} \lambda_i \gamma(l, n+1) = \pi_{\boldsymbol{X}'} \phi(n+1)\gamma(l, n+1)\mu_i$$

が成立するはずである．これを仮定すると，クラス i の客がポジション l に追加されたときの定常分布 $\pi_{\boldsymbol{X}'}$ は追加される前の定常分布 $\pi_{\boldsymbol{X}}$ を用いて

$$\pi_{\boldsymbol{X}'} = \pi_{\boldsymbol{X}} \frac{\lambda_i}{\mu_i \phi(n+1)} \qquad \text{（システム内客数に変化のある場合）} \tag{43}$$

と書ける．同様に，クラス i の客の離脱に関しても，同じ式が得られる．

残る遷移は待ち行列内にいる客がステージを移動する内部移動に依るものであるが，元の待ち行列における l 番目のポジションにいるクラス i の客のステージ移動によって状態 $\boldsymbol{X}$ から $\boldsymbol{X}'$ へ変化すると仮定すると，明らかに $q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = q'(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}) = \phi(n)\gamma(l, n)\mu_i$ である．よって，逆過程候補の待ち行列が真の逆過程ならば

$$\pi_{\boldsymbol{X}} = \pi_{\boldsymbol{X}'} \qquad \text{（システム内客数に変化のない場合）} \tag{44}$$

を得る．

式 (43) ならびに式 (44) から，逆過程の候補が真の逆過程であるならば，$\pi_{\boldsymbol{X}}$ は系が空である確率 $\pi_{\boldsymbol{0}}$ を用いて

$$\pi_{\boldsymbol{X}} = \pi_{\boldsymbol{0}} \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda_{c(l)}}{\mu_{c(l)}\phi(l)}$$

と書くことができる．ここで $\pi_{\boldsymbol{0}}$ は確率の総和が 1 であることから決定される．すなわち

$$\sum_{\boldsymbol{X}} \pi_{\boldsymbol{0}} \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda_{c(l)}}{\mu_{c(l)}\phi(l)} = \pi_{\boldsymbol{0}} \left[1 + \sum_{\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}} \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda_{c(l)}}{\mu_{c(l)}\phi(l)} \right] = 1$$

であればよい．ここで

$$\begin{aligned}
\sum_{\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}} \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda_{c(l)}}{\mu_{c(l)}\phi(l)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{c(1)\in\mathcal{C}} \cdots \sum_{c(n)\in\mathcal{C}} \sum_{u(1)=1}^{k_{c(1)}} \cdots \sum_{u(n)=1}^{k_{c(n)}} \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda_{c(l)}}{\mu_{c(l)}\phi(l)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{c(1)\in\mathcal{C}} \cdots \sum_{c(n)\in\mathcal{C}} \prod_{l=1}^{n} \frac{\lambda_{c(l)} k_{c(l)}}{\mu_{c(l)}\phi(l)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n} \sum_{c(l)\in\mathcal{C}} \frac{\lambda_{c(l)} k_{c(l)}}{\mu_{c(l)}\phi(l)} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n} \frac{\rho}{\phi(l)}
\end{aligned}$$

となることから，$\pi_{\boldsymbol{0}} = B$ となり，式 (42) が導かれる．さらに逆過程候補の待ち行列の定義より，明らかに

$$\sum_{\boldsymbol{X}'} q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = \sum_{\boldsymbol{X}'} q'(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = \sum_{i\in\mathcal{C}} \lambda_i + \phi(n) \sum_{l=1}^{n} \gamma(l,n)\mu_{c(l)}$$

である．よって，定理 6.17 の条件 (36)，(37) を満たす $q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}')$ ならびに（式 (42) で与えられる）$\pi_{\boldsymbol{X}}$ が存在する．すなわち，逆過程候補の待ち行列は真の逆過程であり，式 (42) で与えられる $\pi_{\boldsymbol{X}}$ は両方の待ち行列における定常分布であることがわかる． □

ここまでの議論では，サービス時間が（クラスに依存する）アーラン分布に従うと仮定してきた．一見，この仮定は厳しいように思えるかも知れないが，以下のような議論によって，サービス時間の分布形に依存しない結果を得ることができる．まず，クラス i の客のサービス時間が確率 $p_{i,z}$ で次数 $k_{i,z}$，平均 $k_{i,z}/\mu_{i,z}$ のアーラン分布に従う場合に結果を拡張する．仮に，このような客をクラス (i,z) と呼ぶ．クラス (i,z) の客は率 $\lambda_i p_{i,z}$ のポワソン過程に従い到着することから，改めて，クラス (i,z) をクラス i' とみれば，上記の結果がそのまま適用できる．

さらに，クラス i の客は率 λ_i のポワソン過程に従い到着し，一般分布 $H_i(x)$ に従うサービス時間をもつとする．ここで，サービス時間が $(x, x+dx]$ 内にあるような客をクラス (i,x) とする．この時，クラス (i,x) の客は率 $\lambda_i dH_i(x)$[10]のポワソン過程に従って到着するとみなすことができる．一方，アーラン分布の平均を一定に保ち，ステージ数を十分に大きくすることにより，一定分布に限りなく近付けることができる．すなわち，クラス (i,x) に対して，サービス時間の平均が x であるような十分大きなステージ数をもつアーラン分布で与えられるとすると，適当な極限の形で，ポワソン到着する各クラスの客のサービス時間が一般分布に従う場合を記述できる．

実際，上記のアーラン分布の仮定を取り除き，サービス時間は（クラスに依存する）密度関数 $h_i(x)$ をもつ一般分布に従うと仮定すると，以下のような結果を得ることができる．この変更に伴い，$z(l)$ を l 番目のポジションにいる客の総サービス時間，$u(l)$ を経過サービス時間とする．このとき l 番目のポジションの状態 $\boldsymbol{X}(l)$ は三つ組 $\boldsymbol{X}(l) = (c(l), z(l), u(l))$ で記述される．到着あるいは離脱が起これば（連続な状態をもつ）マルコフ過程 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}(1), \ldots, \boldsymbol{X}(n))$ はジャンプし，連続するジャンプの間において，$u(l)$ が率 $\phi(n)\gamma(l,n)$ で線形に増加してゆく．$u(l)$ が $z(l)$ に達した時，l 番目の客が離脱することに注意する．

このようなモデルにおいて，定理 6.30 と同様の議論を行うと，状態 $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}(1), \ldots, \boldsymbol{X}(n))$ に対応する密度関数が

$$B \prod_{l=1}^{n} \lambda_{c(l)} \frac{du(l) h_{c(l)}(z(l))}{\phi(l)} \tag{45}$$

[10]もし，密度関数 $h_i(x)$ が存在するならば $\lambda_i dH_i(x) = \lambda_i h_i(x) dx$ である．

で与えられ，逆過程は $u(l)$ を残余サービス時間とした以外には全く同じ待ち行列であることが示される．これより，次の結果を得る．

系 6.31 (対称な待ち行列の準可逆性) 客の到着がポワソン過程に従い，サービス時間が一般分布に従う対称な待ち行列 $\boldsymbol{X}(t)$ は準可逆である．

証明. 定義より，元の待ち行列における各クラスの到着はポワソン過程に従う．よって，時刻 t_0 における状態 $\boldsymbol{X}(t_0)$ は t_0 以降の到着と独立である．また，同じ理由により，逆過程の待ち行列における時刻 t_0 における状態 $\boldsymbol{X}(t_0)$ も t_0 以降の（逆過程の）到着とは独立である．後者は，元の待ち行列における，状態 $\boldsymbol{X}(t_0)$ が t_0 以前の離脱と独立であることを示している．よって準可逆性の定義を満たす． □

対称な待ち行列における客数は，他の情報がなければ，必ずしもマルコフ連鎖とならないかも知れないが，逆過程の形から以下のことが分かる．

定理 6.32 (対称な待ち行列における客数) 客の到着がポワソン過程に従う対称な待ち行列における客数は可逆な確率過程である．

また，式 (45) より次の結果を得る．

定理 6.33 (対称な待ち行列の諸性質) クラス i の客のサービス時間分布が $H_i(x)$，密度関数 $h_i(x)$，その平均が $\overline{h}_i$ であるような定常で対称な待ち行列 $\boldsymbol{X}$ は次の性質をもつ．

(i) 待ち行列内に n 人の客がいる確率は次式で与えられる．

$$B\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho}{\phi(l)} \tag{46}$$

(ii) n 人の客が待ち行列内にいるいう条件の下で，個々の客が属するクラスは互いに独立であり，特定のポジションにいる客がクラス i である確率は次式で与えられる．

$$\frac{\lambda_i\overline{h}_i}{\rho} \tag{47}$$

(iii) 待ち行列内にいる客数と，それぞれのポジションにいる客のクラスが与えられたという条件の下で，各客の経過サービス時間は互いに独立であり，クラス i のある客の経過サービス時間の分布関数 $\widetilde{H}_i(x)$ は次式で与えられる．

$$\widetilde{H}_i(x)=\frac{1}{\overline{h}_i}\int_0^x(1-H_i(z))dz$$

証明. 式 (45) より，待ち行列内客数 n と 各ポジションのクラス $c(l)$ の結合確率は

$$B\prod_{l=1}^{n}\frac{\lambda(c(l))}{\phi(l)}\int_0^\infty h_{c(l)}(z(l))dz(l)\int_0^{z(l)}du(l)=B\prod_{l=1}^{n}\frac{\lambda(c(l))\overline{h}_{c(l)}}{\phi(l)} \tag{48}$$

で与えられる．よって，待ち行列内客数が n 人である確率は

$$\sum_{c(1)\in\mathcal{C}}\cdots\sum_{c(n)\in\mathcal{C}}B\prod_{l=1}^{n}\frac{\lambda(c(l))\overline{h}_{c(l)}}{\phi(l)}=B\prod_{l=1}^{n}\frac{\sum_{c(l)\in\mathcal{C}}\lambda(c(l))\overline{h}_{c(l)}}{\phi(l)}$$

となり，$\rho=\sum_{i\in\mathcal{C}}\lambda(i)\overline{h}_i$ に注意すると式 (46) を得る．

さらに，待ち行列内客数が n 人であるという条件の下での，各ポジションの客のクラスの結合分布は式 (48) と式 (46) の比で与えられ

$$B\prod_{l=1}^{n}\frac{\lambda(c(l))\overline{h}_{c(l)}}{\phi(l)}\Bigg/B\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho}{\phi(l)}=\prod_{l=1}^{n}\frac{\lambda(c(l))\overline{h}_{c(l)}}{\rho}$$

となる．よって各ポジションにいる客のクラスは互いに独立であり，特定のポジションにいる客がクラス i である確率は式 (47) で与えられる．

最後に (iii) を考える．n と $c(l)$ を固定した時，$z(l)$ と $u(l)$ の結合密度関数は式 (45) と式 (48) の比を取って

$$B\prod_{l=1}^{n}\lambda(c(l))\frac{du(l)h_{c(l)}(z(l))}{\phi(l)}\Bigg/B\prod_{l=1}^{n}\frac{\lambda(c(l))\overline{h}_{c(l)}}{\phi(l)}=\prod_{l=1}^{n}\frac{du(l)h_{c(l)}(z(l))}{\overline{h}_{c(l)}}$$

で与えられる．すなわち，各ポジションにいる客の総サービス時間と経過サービス時間の組 $(z(l), u(l))$ はポジション間で互いに独立であり，l 番目のポジションにいるクラス $c(l)$ の客に対する $z(l)$ と $u(l)$ の結合密度関数は，

$$\frac{du(l)h_{c(l)}(z(l))}{\overline{h}_{c(l)}}$$

で与えられる．さらに，あるクラス $i = c(l)$ の客のサービス経過時間が x より大きい確率は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{h}_i}\int_x^\infty h_i(z)dz\int_x^z du &= \frac{1}{\overline{h}_i}\int_x^\infty du\int_u^\infty h_i(z)dz \\
&= \frac{1}{\overline{h}_i}\int_x^\infty (1-H_i(u))du \\
&= \frac{1}{\overline{h}_i}\left[\int_0^\infty (1-H_i(u))du - \int_0^x (1-H_i(u))du\right] \\
&= 1-\widetilde{H}_i(x)
\end{aligned}$$

となる．ただし，最後の等号では非負の確率分布の平均に対して成立する等式

$$\overline{h}_i = \int_0^\infty (1-H_i(u))du$$

を用いた． □

注意 6.34 定理 6.33 の (i)，(ii) がサービス時間の分布形に依存せず，その平均 $\overline{h}_i$ のみで定まることに注意する．このような性質をサービス時間分布に関する**不感性**（insensitivity）という．

最後に，対称な待ち行列におけるサービス時間 x をもつ客の平均応答時間（システム内滞在時間）を考える．準備として，まず，クラス i の平均応答時間 $E[W(i)]$ を導出する．定理 6.33 の (i) より，平均システム内客数を $E[L]$ とすると

$$E[L] = B\sum_{n=1}^\infty n\prod_{l=1}^n \frac{\rho}{\phi(l)}$$

で与えられる．さらに，定理 6.33 の (ii) より，クラス i の客の平均システム内客数 $E[L(i)]$ は

$$E[L(i)] = \frac{\lambda_i\overline{h}_i}{\rho}E[L]$$

となる．

上式は以下のように示される．L を総客数，$C_i(\ell)$ $(i \in \mathcal{C}, \ell = 1, 2, \ldots)$ を

$$C_i(\ell) = \begin{cases} 1, & \ell \text{ 番目の客がクラス } i \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

としたとき，$E[L(i)]$ は

$$\begin{aligned}
E[L(i)] = E[C_i(1)+C_i(2)+\cdots+C_i(L)] &= \sum_{n=1}^\infty \Pr(L=n)E[C_i(1)+C_i(2)+\cdots+C_i(L) \mid L=n] \\
= \sum_{n=1}^\infty \Pr(L=n)E[C_i(1)+C_i(2)+\cdots+C_i(n)] &= \sum_{n=1}^\infty \Pr(L=n)\bigl(E[C_i(1)]+E[C_i(2)]+\cdots+E[C_i(n)]\bigr)
\end{aligned}$$

であり，

$$E[C_i(\ell)] = 1\times\Pr(c(\ell)=i) + 0\times\Pr(c(\ell)\neq i) = \Pr(c(\ell)=i) = \frac{\lambda_i\overline{h}_i}{\rho}, \quad \ell = 1, 2, \ldots$$

なので

$$E[L(i)] = \sum_{n=1}^\infty n\Pr(L=n)\cdot\frac{\lambda_i\overline{h}_i}{\rho}$$

を得る．

よってリトルの公式より，クラス i の客の平均応答時間 $E[W(i)]$ は

$$E[W(i)] = E[L(i)]/\lambda_i = \frac{E[L]}{\rho}\overline{h}_i$$

で与えられる．すなわち，クラス i の客の平均応答時間は，平均サービス時間 $\overline{h}_i$ に対して線形である．

さて，サービス時間をアーラン分布から一般分布へ拡張したときと同様の議論を用いると，サービス時間 x をもつ客をクラス x と見ることができる．これより次の定理を得る．

系 6.35 (平均応答時間のサービス時間に対する線形性 1) 対称な待ち行列におけるサービス時間 x をもつ客の平均応答時間 $E[W(x)]$ は

$$E[W(x)] = ax$$

の形に書ける．ただし，係数 a は総トラヒック強度 ρ と $\phi(n)$ のみで定まる関数であり，

$$a = E[L]/\rho$$

で与えられる．

最初に例で示したように，適当にサービスに費やされる総能力を与えることにより，システム内滞在時間が 0 である客（呼損に対応）を許すことが出来る．上記の結果は到着した（呼損となった客も含め）全ての客に対する平均応答時間を考えていることに注意する．呼損が許されているシステムにおける，システム内に収容された客の平均応答時間は次の定理で与えられる．

系 6.36 (平均応答時間のサービス時間に対する線形性 2) システム内客数の上限がある値 K で押えられている場合，サービス時間 x をもつシステム内に収容された客の平均応答時間 $E[W(x)]$ は

$$E[W(x)] = \frac{E[L]x}{\rho(1-\pi_K)}$$

で与えられる．ただし π_K はシステム内客数が K である確率である．

7 即時系に対する通信トラヒック理論 [9, 10]

以下では，前節までの議論を基礎として，即時系に対する通信トラヒック理論について概観する．

7.1 アーラン呼損式

多数の利用者を収容している回線交換網内の帯域 c をもつ，特定のリンク（回線群）に注目する．ここでは，まず，各呼が要求する帯域はすべて等しいものとする．すなわち，各呼はこのリンクに対して一定の帯域 r を要求するとし，呼発生時に，空き帯域が少なくとも r あれば，帯域 r を予約したうえ伝送を開始し，伝送終了後，帯域 r を解放する．一方，呼発生時に空き帯域が r 未満ならば，この呼は呼損となる．以下では，帯域 c のリンクで同時に送信が可能な最大呼数を s とする．

$$s = \lfloor c/r \rfloor$$

このような状況下で，注目するリンクにおける呼損率を求めるため，まず，呼の発生過程を考える．一般に，通信ネットワークにおける呼の発生は，互いに独立な利用者（呼源）からの呼の重ね合わせと見なせる．多数の利用者を収容している通信ネットワークでは，送信要求発生量全体に占める個々の利用者からの送信要求の割合は極めて小さい．一方,（各利用者からの送信要求の発生過程を表す）非常に強度の弱い独立な確率過程の重ね合わせの極限はポワソン過程に従うことが知られている．それゆえ，多数の利用者を収容する通信ネットワークにおける呼の発生過程はポワソン過程でモデル化可能である．そこで，注目するリンクの使用状況を以下のようにモデル化する．呼の発生は 1 秒当たり平均 λ 個のポワソン過程に従うとする．また，各呼が回線を占有する時間，すなわち**保留時間**（holding time）は平均 h（秒）とする．

このモデルは対称な待ち行列の特別な場合（$M/G/s/s$）であるので，定理 6.33 (i) において $\phi(n) = n$ $(n = 1, 2, \ldots, s)$ とすることにより，

$$\Pr(L = n) = \frac{\rho^n}{n!} \Bigg/ \sum_{l=0}^{s} \frac{\rho^l}{l!}, \qquad n = 0, 1, \ldots, s$$

を得る．ただし $\rho = \lambda h$ であり，ρ は**トラヒック強度**（traffic intensity）と呼ばれる．さらにポワソン到着の性質の一つである定理 4.8 より，定常状態において到着した呼がリンクに収容されない確率，すなわち**呼損率**（loss probability） $B(s, \rho)$ は，定常状態において s 個の呼が収容されている確率（時間平均）$\Pr(L = s)$ に等しい．

定理 7.1 (アーラン呼損式) トラヒック強度が ρ の場合，$M/G/s/s$ における呼損率 $B(s, \rho)$ は**アーラン呼損式**（Erlang Loss Formula）[11]

$$B(s, \rho) = \frac{\rho^s}{s!} \Bigg/ \sum_{l=0}^{s} \frac{\rho^l}{l!} \tag{49}$$

で与えられる．

式 (49) は，保留時間が指数分布に従う場合について，1917 年にデンマークの電話技師 A. K. Erlang (1878–1929) によって最初に導かれた[12]．当時から，任意の保留時間分布に対して式 (49) が成立することが推測されており，50 年代後半にはそれが証明されている．すなわち，呼がポワソン過程に従って発生するリンクにおける呼損率は，保留時間の分布形とは無関係に，その平均値のみで定まるという保留時間分布に対する不感性をもつ．この性質は，保留時間に関しては，その平均値のみを推定すれば良いということである．

特に，十分な回線容量が用意されている場合には，呼損は滅多に起こらない．その結果，システムはあたかも $M/G/\infty$ のように振る舞い，その定常分布は平均 ρ のポワソン分布に従う．よって，十分な回線数が用意されている回線交換網では保留中の回線数を監視していれば十分であり，平均保留回線数の増加に伴い，適宜，資源の増強を図ればよいことになる．このように，電話網の回線数を設計する際の実用的な公式として現在でも広く用いられている重要な結果である（電話網の場合，$r = 1$ とすると $s = c$ は回線数に対応する）．

アーラン呼損式 (49) はシステムを表現するパラメタ s ならびに ρ を用いて明示的に与えられているため，これ以上，議論することがないと思うかもしれないが，実はそうではない．実際の電話網における基幹回線では数万回線という状況も珍しくない．そのような場合，アーラン呼損式 (49) をそのまま計算することは明らかに無理がある[13]．そこで，大きな s および ρ に対しても呼損率 $B(s, \rho)$ を安定して計算する手法が必要となる．

系 7.2 (アーラン呼損式の漸化式) 呼損率 $B(s, \rho)$ は

$$B(0, \rho) = 1, \qquad B(s, \rho) = \frac{\rho B(s-1, \rho)}{s + \rho B(s-1, \rho)} \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

によって順次計算することができる．

証明．1 番目の式は自明である．2 番目の式が成立することはアーラン呼損式を代入すれば直ちに確かめられる．

□

図 7 にそれぞれの呼の要求帯域 r が 64kbps の場合の呼損率を示す．回線の帯域 c が 45Mbps の場合は $s = 703$（$M/G/703/703$）に対応し，155Mbps の場合は $s = 2421$（$M/G/2421/2421$） に対応している．

図 7 より次のことが分かる．呼損率はトラヒック強度の増大に伴い，ある時点から極めて急激に増加する．よって,（新サービス開始時の携帯電話のように）徐々に負荷が増加しているシステムを運用している場合，ある時期まで呼損率が極めて小さな値に収まっていたとしても，適当な時点で回線を補強しなければ，呼損率がある日を境に急激に増加するという現象を引き起こす．また，703 回線（45Mbps）の場合，$\rho \geq 582$ ならば呼損率が 10^{-7} を上回り，2421 回線（155Mbps）の場合，$\rho \geq 2196$ ならば呼損率が 10^{-7} を上回る．すなわち，呼損率 10^{-7} を基準に収容可能なトラヒック強度を見た場合，45Mbps ならば回線容量の $581/703 \approx 82.6\%$, 155Mbps ならば $2195/2421 \approx 90.7\%$ である．このように，より大きな回線群へトラヒックを収容することで，回線群の利用効率を上げることができる．このような現象を**大群化効果**（large-scale effect）という．この性質は，一般のトラヒックモデルにおいて成立するもので，経済的な通信ネットワークを設計するために留意しなければならない重要な性質である．

[11] **アーラン B 式**（Erlang B Formula）とも呼ばれる．
[12] これが待ち行列理論の始まりであると言われている．
[13] 例えば，1000 回線の場合 1000! がどの程度の大きさになりそうか想像せよ．

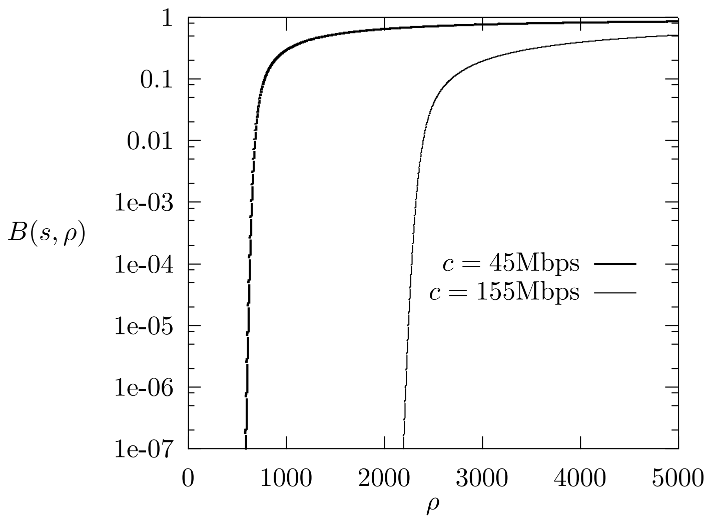

図 7: アーラン呼損式

7.2 資源共有モデル

統合サービスデジタル網（Integrated Services Digital Networks, ISDN）では，音声のみならず，データなど様々な情報の伝送を 1 つの通信ネットワークで行うことができる．それゆえ，個々の呼が要求する帯域（あるいは回線数）は同一ではない．このような通信ネットワークは以下のようにモデル化できる（図 8 参照）．帯域 c をもつリンクを利用する P 種類のクラスの呼があるとする．クラス i（$i = 1, \ldots, P$）の呼の発生は率 λ_i（1 秒当たり平均 λ_i 個）のポワソン過程に従うと仮定する．また，クラス i の各呼は帯域 r_i を要求するものとし，その保留時間は平均 h_i（秒）とする．よってクラス i のトラヒック強度は $\rho_i = \lambda_i h_i$ で与えられる．クラス i の呼は，発生時に空き帯域が少なくとも r_i あれば，その内 r_i だけ予約したうえ送信を開始し，送信終了後，帯域 r_i を解放する．一方，空き帯域が r_i 未満ならば呼損となる．このようなモデルは**資源共有モデル**（resource-sharing model）と呼ばれている．

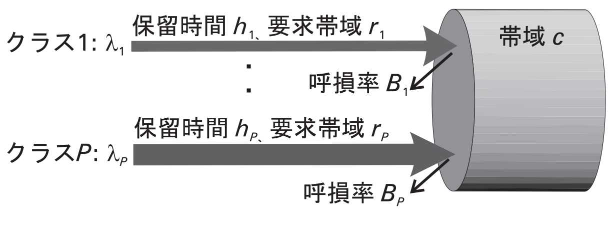

図 8: 資源共有モデル

システム内にあるクラス i の呼の数を n_i で表し，$\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_P)$（$n_i \geq 0$）とする．さらに要求帯域からなるベクトルを $\boldsymbol{r} = (r_1, \ldots, r_P)^T$ とし，集合 $\Omega(x)$ を次式で定義する．

$$\Omega(x) = \{\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{n}\boldsymbol{r} \leq x\}$$

定義より $\Omega(c)$ はシステム内呼数が取り得る全ての状態 $\boldsymbol{n}$ からなる集合である．また，クラス i の呼は，発生時のシステム内呼数の状態 $\boldsymbol{n}$ が $\Omega(c - r_i)$ の要素となっていれば収容されるが，$\Omega(c - r_i)$ の要素でなければ呼損となる．以下では $\pi(\boldsymbol{n})$ を定常状態において，システム内呼数の状態が $\boldsymbol{n}$ である定常確率とする．

定理 7.3 (資源共有モデルの定常解) 帯域 c，要求帯域ベクトル $\boldsymbol{r}$，クラス i ($i = 1, 2, \ldots, P$) のトラヒック強度が ρ_i である定常な資源共有モデルにおいて，システム内呼数の分布 $\pi(\boldsymbol{n})$ は以下の**積形式解**（product-form solution）

$$\pi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{G(c)} \prod_{i=1}^{P} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}, \qquad \boldsymbol{n} \in \Omega(c) \tag{50}$$

で与えられる．ただし，関数 $G(x)$ は

$$G(x) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega(x)} \prod_{i=1}^{P} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}, \qquad 0 \le x \le c$$

で定義される．特に，クラス i の呼損率 B_i は

$$B_i = 1 - \frac{G(c-r_i)}{G(c)} \tag{51}$$

で与えられる．

証明. もし，式 (50) で $\pi(\boldsymbol{n})$ が与えられるならば，式 (51) は次のようにして導かれる．呼損率は発生した呼がシステムに収容されない確率であるが，クラス i の呼の発生過程がポワソン過程であるので，定理 4.8 より，定常状態において発生したクラス i の呼が見る状態の分布は定常分布に等しい．一方，クラス i の呼が発生した時点におけるシステムの状態 $\boldsymbol{n}$ が $\Omega(c-r_i)$ に含まれているならば，この呼はシステムに収容される．よってクラス i の呼損率 B_i は

$$B_i = 1 - \sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega(c-r_i)} \pi(\boldsymbol{n}) = 1 - \sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega(c-r_i)} \frac{1}{G(c)} \prod_{i=1}^{P} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} = 1 - \frac{G(c-r_i)}{G(c)}$$

で与えられ，これは式 (51) と一致する．よって以下では式 (50) を考える．

まず，初めに保留時間が指数分布に従う場合を考える．もし，帯域 c が無限大ならば，クラス間の干渉がなくなり，それぞれのクラスのシステム内呼数は $M/M/\infty$ でモデル化できる．よって，帯域 c が無限大の場合の定常分布 $\pi^{(\infty)}(\boldsymbol{n})$ は

$$\pi^{(\infty)}(\boldsymbol{n}) = \prod_{i=1}^{P} e^{-\rho_i} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}, \qquad \boldsymbol{n} \ge \boldsymbol{0}$$

で与えられる．クラス i の呼数を表す確率過程 $X_i(t)$ は可逆な連続時間マルコフ連鎖であり，さらに，これらは互いに独立であるので，呼数過程 $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_P(t))$ も可逆な連続時間マルコフ連鎖となる．

帯域が c である場合は，帯域が無限大の場合に対応する状態空間 $\Omega(\infty) = \{\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n} \ge \boldsymbol{0}\}$ 上の可逆な連続時間マルコフ連鎖を状態空間 $\Omega(c)$ へ向けて切断された連続時間マルコフ連鎖と見ることができる．よって，系 6.16 より，帯域が c である場合の呼数過程は可逆な連続時間マルコフ連鎖であり，その定常分布は $\pi(\boldsymbol{n})$ は

$$\pi(\boldsymbol{n}) = \frac{\pi^{(\infty)}(\boldsymbol{n})}{\displaystyle\sum_{\boldsymbol{m}\in\Omega(c)} \pi^{(\infty)}(\boldsymbol{m})}, \qquad \boldsymbol{n} \in \Omega(c)$$

で与えられ，式 (50) と一致する．

保留時間が一般分布に従う場合についても式 (50) が成立することを示すためには，定理 6.30 から定理 6.33 へ至る議論と同じ議論を行えば良い．すなわち，各クラスの保留時間がアーラン分布に従う場合について式 (50) が成立することを示せれば，定理 6.30 から定理 6.33 へ至る議論を援用することにより，保留時間が一般分布に従う場合も成立することが言える．

よって以下では，クラス i の客の保留時間は各指数ステージが平均 $1/\mu_i$ をもつ k_i 次のアーラン分布に従うと仮定する．さらに，各クラス毎に呼が配置される仮想的なポジションが用意されており，n_i 個の呼があるとき，新たに発生した呼は $1/(n_i+1)$ の確率で l 番目のポジションに入り，l' 番目（$l' = l, l+1, \ldots, n_i$）のポジションの呼はそれぞれ $l'+1$ 番目へ移動するものとする．また，n_i 個の呼がある時に，l 番目のポジションの呼が離脱した場合，l' 番目（$l' = l+1, l+2, \ldots, n_i$）のポジションの呼はそれぞれ $l'-1$ 番目へ移動するものとする．

このような仮想的なポジションを導入すると，各クラスの保留時間がアーラン分布に従う場合の証明は定理 6.30 の証明と同じように行うことができる．システムの状態は各クラスの系内呼数 n_i と l 番目 $(l = 1, 2, \ldots, n_i)$ のポジションにいる呼が現在サービス中のステージ番号 $u_i(l)$ によって記述することができる．よって，$\boldsymbol{X}(i) = (n_i; u_i(1), u_i(2), \ldots, u_i(n_i))$ として，システムの状態 $\boldsymbol{X}$ を $\boldsymbol{X} = (\boldsymbol{X}(1), \boldsymbol{X}(2), \ldots, \boldsymbol{X}(P))$ で記述することにする．また，逆過程の候補として，各クラスが同じ到着率を持ち，状態 $u_i(j)$ $(j = 1, 2, \ldots, n_i)$ がサービス完了までの残余ステージ数を表すものを考える．

元のシステムのある状態 $\boldsymbol{X}$（ただし，クラス i の呼数は n_i）において，クラス i の客が到着し，l 番目のポジションに収容されることによって状態が $\boldsymbol{X}'$ へ変化すると仮定すると，その率は $q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = \lambda_i/(n_i+1)$ である．一方，逆過程候補の待ち行列での状態 $\boldsymbol{X}'$ から $\boldsymbol{X}$ への遷移（l 番目のポジションにいるクラス i の客の離脱）は，率 $q'(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}) = \mu_i$ で起こる．よって逆過程候補が真の逆過程であるならば，これらの遷移は同一の現象を表現しているので

$$\pi_{\boldsymbol{X}}\lambda_i/(n_i+1) = \pi_{\boldsymbol{X}'}\mu_i$$

が成立するはずである．これを仮定すると，クラス i の呼が l 番目のポジションに収容されたときの定常分布 $\pi_{\boldsymbol{X}'}$ は収容される前の定常分布 $\pi_{\boldsymbol{X}}$ を用いて

$$\pi_{\boldsymbol{X}'} = \pi_{\boldsymbol{X}}\frac{\lambda_i/\mu_i}{n_i+1} \qquad \text{（クラス } i \text{ のシステム内呼数に変化のある場合）} \tag{52}$$

と書ける．客の離脱の場合も式 (52) と同じ式が得られる．残る遷移は待ち行列内にいる客のステージを移動する内部移動によるものであるが，元の待ち行列におけるクラス i の l 番目のポジションにいる呼のステージ移動によって状態 $\boldsymbol{X}$ から $\boldsymbol{X}'$ へ変化すると仮定すると，明らかに $q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = q'(\boldsymbol{X}', \boldsymbol{X}) = \mu_i$ である．よって，逆過程候補の待ち行列が真の逆過程ならば

$$\pi_{\boldsymbol{X}} = \pi_{\boldsymbol{X}'} \qquad \text{（システム内呼数に変化のない場合）} \tag{53}$$

を得る．式 (52)，(53) よりシステムが状態 $\boldsymbol{X}$ にある定常分布 $\pi_{\boldsymbol{X}}$ は $\rho_i = \lambda_i \cdot k_i/\mu_i$ $(i = 1, 2, \ldots, P)$ に注意すると

$$(B^*)^{-1} = \sum_{\boldsymbol{n}\in\Omega(c)} \prod_{i=1}^{P} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}$$

で定義される正規化定数 B^* を用いて

$$\pi_{\boldsymbol{X}} = B^* \prod_{i=1}^{P} \frac{(\rho_i/k_i)^{n_i}}{n_i!} \tag{54}$$

で与えられる（n_i が与えられたとき，クラス i のポジションに関する状態数は $(k_i)^{n_i}$ 通りあることに注意）．さらに逆過程候補の待ち行列の定義より，明らかに

$$\sum_{\boldsymbol{X}'} q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = \sum_{\boldsymbol{X}'} q'(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}') = \sum_{i=1}^{P} \left(\lambda_i + n_i\mu_i\right)$$

である．よって，定理 6.17 の条件 (36)，(37) を満たす $q(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{X}')$ ならびに式 (54) で与えられる $\pi_{\boldsymbol{X}}$ が存在する．すなわち，逆過程候補の待ち行列は真の逆過程であり，式 (54) で与えられる $\pi_{\boldsymbol{X}}$ は両方の待ち行列における定常分布である．式 (54) で与えられる定常分布を各ポジションに関する全ての状態について足し併せると，式 (50) が成立することが分かる． □

注意 7.4 $P = 1$ のとき（1 種類の呼しかない場合），式 (51) はアーラン呼損式 (49) と等価である．

アーラン呼損式でも述べたとおり，この種の解析結果に基づく数値計算は容易でない．注意 7.4 で述べたように資源共有モデルにおける呼損率はアーラン呼損式の拡張になっており，計算量は格段に多くなる．この原因の一つに，状態として各クラスの呼数が取られているため，定常解が多次元の関数になっている点がある．従来から資源共有モデルにおける呼損率に対する様々な計算手法が提案されてきた．以下では，理解が容易で，かつ，大規模な問題に対して適用可能な Kaufman のアルゴリズム [4] を紹介する．

仮定 7.5 (Kaufman のアルゴリズムの仮定) 帯域 c ならびに各クラスの要求帯域 r_i $(i = 1, 2, \ldots, P)$ は自然数で与えられる

上記の仮定の下で，占有帯域が x $(x = 0, 1, \ldots, c)$ となるようなシステム内呼数の組み合わせ $\boldsymbol{n}$ からなる集合 $\mathcal{S}(x)$ を定義する．

$$\mathcal{S}(x) = \{\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n}\boldsymbol{r} = x\}, \qquad x = 0, 1, \ldots, c$$

すなわち，$\mathcal{S}(0) = \Omega(0) = \{\boldsymbol{0}\}$ であり，$x = 1, 2, \ldots, c$ に対しては，$\mathcal{S}(x) = \Omega(x) - \Omega(x-1)$ である．さらに，占有帯域が x $(x = 0, 1, \ldots, c)$ である定常分布を $q(x)$ とする．

$$q(x) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{S}(x)} \pi(\boldsymbol{n}), \qquad x = 0, 1, \ldots, c$$

ただし $\pi(\boldsymbol{n})$ は式 (50) で与えられる．定義より，クラス i の呼損率 B_i は $q(x)$ を用いて

$$B_i = \sum_{x=c-r_i+1}^{c} q(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, P$$

で与えられる．Kaufman のアルゴリズムは 1 次元の確率関数 $q(x)$ を順次生み出すものである．

定理 7.6 (Kaufman のアルゴリズム) 資源共有モデルが仮定 7.5 を満たすとき，$q(x)$ $(x = 0, 1, \ldots, c)$ は以下の手続きによって計算できる．

1. 初期化：$q'(x) = 0$ $(x < 0)$ かつ $q'(0) = 1$ とする．
2. 比の決定：$q'(x)$ $(x = 1, 2, \ldots, c)$ を次式で求める．

$$q'(x) = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{P} r_i \rho_i q'(x - r_i), \qquad x = 1, 2, \ldots, c$$

3. 正規化：$q(x)$ $(x = 0, 1, \ldots, c)$ を

$$q(x) = \frac{q'(x)}{\displaystyle\sum_{k=0}^{c} q'(k)}, \qquad x = 0, 1, \ldots, c$$

により計算する．

証明. $q(x) = 0$ $(x < 0)$ としたとき，もし

$$q(x) = \frac{1}{x} \sum_{i=1}^{P} r_i \rho_i q(x - r_i), \qquad x = 1, 2, \ldots, c \tag{55}$$

が成立するならばアルゴリズムは正しいことは明らかである．よって以下では式 (55) が成立することを示す．定義より

$$xq(x) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{S}(x)} x\pi(\boldsymbol{n}) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{S}(x)} \left(\sum_{i=1}^{P} n_i r_i \right) \pi(\boldsymbol{n}) = \sum_{i=1}^{P} r_i \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{S}(x)} n_i \pi(\boldsymbol{n})$$

が成立する．一方，式 (50) より，$n_i \geq 1$ ならば

$$n_i \pi(\boldsymbol{n}) = \frac{n_i}{G(c)} \prod_{j=1}^{P} \frac{\rho_j^{n_j}}{n_j!} = \frac{n_i}{G(c)} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{P} \frac{\rho_j^{n_j}}{n_j!} = \frac{\rho_i}{G(c)} \frac{\rho_i^{n_i - 1}}{(n_i - 1)!} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{P} \frac{\rho_j^{n_j}}{n_j!} = \rho_i \pi(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i)$$

を得る．ただし $\boldsymbol{e}_i$ は i 番目の要素が 1，それ以外が 0 である P 次元行単位ベクトルを表す．よって

$$\begin{aligned}
xq(x) &= \sum_{i=1}^{P} r_i \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{S}(x)} n_i \pi(\boldsymbol{n}) \\
&= \sum_{i=1}^{P} r_i \sum_{\substack{\boldsymbol{n} \in \mathcal{S}(x) \\ n_i \geq 1}} n_i \pi(\boldsymbol{n}) \\
&= \sum_{i=1}^{P} r_i \sum_{\substack{\boldsymbol{n} \in \mathcal{S}(x) \\ n_i \geq 1}} \rho_i \pi(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i) \\
&= \sum_{i=1}^{P} r_i \rho_i \sum_{\boldsymbol{m} \in \mathcal{S}(x - r_i)} \pi(\boldsymbol{m}) \\
&= \sum_{i=1}^{P} r_i \rho_i q(x - r_i)
\end{aligned}$$

より，式 (55) が成立する．なお，最後からふたつ目の等号では，$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{e}_i$ としたとき

$$
\begin{aligned}
\{\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i;\ \boldsymbol{n} \in \mathcal{S}(x), n_i \geq 1\} &= \{\boldsymbol{n} - \boldsymbol{e}_i;\ \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}, n_i \geq 1, \boldsymbol{n}\boldsymbol{r} = x\} \\
&= \{\boldsymbol{m};\ \boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{0}, (\boldsymbol{m} + \boldsymbol{e}_i)\boldsymbol{r} = x\} \\
&= \{\boldsymbol{m};\ \boldsymbol{m} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{m}\boldsymbol{r} = x - r_i\} \\
&= S(x - r_i)
\end{aligned}
$$

となることを用いた． □

7.3 呼損ネットワーク

ここまで，通信ネットワーク内の特定のリンクに注目したモデルを紹介した．実際の回線交換網では，送り手から受け手に至るパス（連続するリンクの列）に沿って帯域あるいは回線を予約できたときのみ，送信を開始することが出来る．上で紹介した特定のリンクに注目したモデルを用いればパス上の負荷が最も集中するリンクにおける性能を評価できるが，回線交換網全体を見渡した，ネットワーク全体を評価できるモデルも必要である．そこで，共有資源問題を拡張した，**呼損ネットワーク**（loss network）と呼ばれる待ち行列網モデルがある．以下にその概略を示す．

通信ネットワークは J 本のリンクから成るとする．リンク j の容量は c_j とする．この通信ネットワークで発生する呼を，送り手と受け手の組，利用する経路，経路上の各リンクで要求する帯域によって P 種類のクラスに分類する．クラス i の呼の発生は率 λ_i（個/秒）のポワソン過程に従うと仮定する．また，クラス i の各呼は経路に含まれているリンク j に対して帯域 $r_{i,j}$ を要求するものとし，その保留時間は平均 h_i（秒）とする．よってクラス i のトラヒック強度 ρ_i は $\rho_i = \lambda_i h_i$ で与えられる．i 番目のクラスの呼の発生時に，予め定められた経路上の各リンク j に少なくとも $r_{i,j}$ だけ空き帯域があれば，リンク j に対して $r_{i,j}$ だけ予約を行い送信を開始し，送信終了後，経路上の各リンクで予約していた帯域 $r_{i,j}$ を解放する．一方，経路上のリンクの内，一つでも空き帯域が要求帯域 $r_{i,j}$ 未満のリンク j があるならば呼損となる（図 9 : $r_{i,j} = r_i$ の場合）．

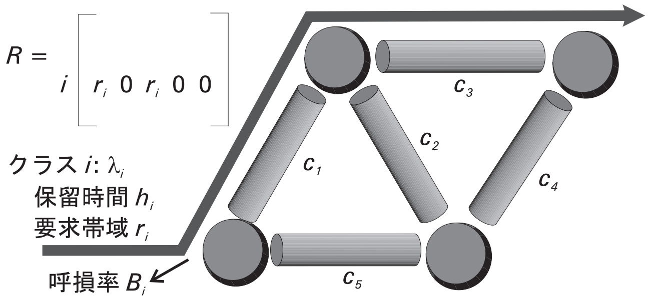

図 9: 呼損網（$r_{i,j} = r_i$ の場合）

呼損ネットワークに対する解析結果を与えるための準備を行う．まず，$\boldsymbol{r}_i$ をクラス i の呼がリンク j で要求する帯域（経路に含まれていなければ 0）を j 番目の要素にもつ $1 \times J$ ベクトルとする．さらに，(i,j) 要素が，クラス i の経路にリンク j が含まれているならば $r_{i,j}$，それ以外のときは 0 であるような P 行 J 列の要求帯域行列 $\boldsymbol{R}$ を導入する．

$$
[\boldsymbol{R}]_{i,j} = \begin{cases} r_{i,j}, & \text{クラス } i \text{ の経路にリンク } j \text{ が含まれている} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}
$$

すなわち，

$$
\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{r}_1 \\ \boldsymbol{r}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{r}_P \end{pmatrix}
$$

である．

また，以下のベクトルを定義する．

$$\boldsymbol{c} = (c_1, \ldots, c_J)$$
$$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_J), \qquad x_j \geq 0$$
$$\boldsymbol{n} = (n_1, \ldots, n_P), \qquad n_i \geq 0$$

これらを用いて集合 $\Omega(\boldsymbol{x})$ を次式で定義する．

$$\Omega(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{n};\ \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{n}\boldsymbol{R} \leq \boldsymbol{x}\}$$

定義より $\Omega(\boldsymbol{c})$ はネットワーク内呼数が取り得る全ての状態 $\boldsymbol{n}$ からなる集合である．

このとき，クラス i の呼は発生時のネットワーク内呼数の状態 $\boldsymbol{n}$ が $\Omega(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{r}_i)$ の要素となっていれば収容されるが，$\Omega(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{r}_i)$ の要素でなければ呼損となる．以下では $\pi(\boldsymbol{n})$ を定常状態において，ネットワーク内呼数の状態が $\boldsymbol{n}$ である確率とする．

定理 7.7 (呼損ネットワークの呼損率) 帯域ベクトル $\boldsymbol{c}$，要求帯域行列 $\boldsymbol{R}$，クラス i $(i = 1, 2, \ldots, P)$ のトラヒック強度が ρ_i である定常な呼損ネットワークにおいて，ネットワーク内呼数の分布 $\pi(\boldsymbol{n})$ は以下の積形式解

$$\pi(\boldsymbol{n}) = \frac{1}{G(\boldsymbol{c})} \prod_{i=1}^{P} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}, \qquad \boldsymbol{n} \in \Omega(\boldsymbol{c})$$

で与えられる．ただし，関数 $G(\boldsymbol{x})$ は

$$G(\boldsymbol{x}) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \Omega(\boldsymbol{x})} \prod_{i=1}^{P} \frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}, \qquad \boldsymbol{0} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{c}$$

で定義される．特に，クラス i の呼損率 B_i は

$$B_i = 1 - \frac{G(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{r}_i)}{G(\boldsymbol{c})} \tag{56}$$

で与えられる．

定理 7.7 は資源共有モデルに対する定理 7.3 と全く同様に証明できる．実際，呼損ネットワークと資源共有モデルの違いはシステム内呼数 $\boldsymbol{n}$ が取り得る集合 $\Omega(.)$ のみである．よって証明は省略する．

注意 7.8 $J = 1$ のとき（網が 1 つのリンクからなる場合），呼損ネットワークの結果は資源共有モデルの結果と等価である．アーラン呼損式，資源共有モデルと同様に，呼損ネットワークにおける呼損率も保留時間分布に関して不感性を持っている．また，経路が予め定められていれば，マルチキャストにも適用できる．

例題：回線群 1 と回線群 2 が直列に接続されたネットワークを考える．呼には三つの資源要求クラスがあり，クラス 1 は回線群 1 のみを 2 単位要求し，クラス 2 は回線群 2 のみを 2 単位要求する．さらに，クラス 3 は回線群 1 と回線群 2 を同時に 1 単位ずつ要求する．クラス i $(i = 1, 2, 3)$ の資源要求の発生は率 λ_i のポワソン過程に従う．各クラスの資源要求が発生時に満たされない場合は呼損となる．クラス i $(i = 1, 2, 3)$ の保留時間はパラメタ μ_i の指数分布に従う．以下の問に答えよ．

(1) 回線群 1，2 の容量が共に無限大である場合，定常状態における各クラスの系内客数 $X_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ を表すマルコフ連鎖 $\boldsymbol{X}(t) = (X_1(t), X_2(t), X_3(t))$ は可逆であることを示せ．

(2) 回線群 1 の容量は 4 単位，回線群 2 の容量は 3 単位であるとする．系内にあるクラス i $(i = 1, 2, 3)$ の呼の数を n_i とし，(n_1, n_2, n_3) で系の状態を表す．状態 (n_1, n_2, n_3) の定常状態確率 $\pi(n_1, n_2, n_3)$ を求めよ．必要ならば $\rho_i = \lambda_i/\mu_i$（$i = 1, 2$）を用いよ．

(3) (2) のモデルにおける各クラスの呼損率を求めよ．

略解：(1) 回線群 1，2 の容量が共に無限大ならば，各クラスの系内客数過程は $M/M/\infty$ の系内客数過程と同一である．また，$M/M/\infty$ の系内客数過程は木型の遷移速度図を持つため可逆である．よって，任意の自然数 n，任意の実数 τ, t_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ に対して

$$\Pr(X_i(t_1) = m_1, X_i(t_2) = m_2, \ldots, X_i(t_n) = m_n) = \Pr(X_i(\tau - t_1) = m_1, X_i(\tau - t_2) = m_2, \ldots, X_i(\tau - t_n) = m_n)$$

が $i=1,2,3$ それぞれに対して成立する．さらに各クラスの系内客数過程は独立であるので

$$\begin{aligned}\Pr(X_i(t_k)=m_{i,k}\ (i=1,2,3,k=1,2,\ldots,n)) &= \prod_{i=1}^{3}\Pr(X_i(t_k)=m_{i,k}\ (k=1,2,\ldots,n))\\ &= \prod_{i=1}^{3}\Pr(X_i(\tau-t_k)=m_{i,k}\ (k=1,2,\ldots,n))\\ &= \Pr(X_i(\tau-t_k)=m_{i,k}\ (i=1,2,3,k=1,2,\ldots,n))\end{aligned}$$

となり，$\boldsymbol{X}(t)=(X_1(t),X_2(t),X_3(t))$ は可逆である．

(2)　出現可能な状態 (n_1,n_2,n_3) の集合 Ω は

$$2n_1+n_3\le 4,\qquad 2n_2+n_3\le 3$$

を満たす非負の整数の組 (n_1,n_2,n_3) からなる集合である．よって

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(0,0,0),(1,0,0),(2,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(2,1,0),\\ &(0,0,1),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(0,0,2),(1,0,2),(0,0,3)\}\end{aligned}$$

であり，(1) で考察した可逆なマルコフ連鎖を Ω へ向けて切断したものになる．また，(1) で考察した可逆なマルコフ連鎖の定常状態分布 $\pi^{(\infty)}(n_1,n_2,n_3)$ は

$$\pi^{(\infty)}(n_1,n_2,n_3)=\prod_{i=1}^{3}e^{-\rho_i}\frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}$$

で与えられる．よって，

$$G=\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in\Omega}\pi^{(\infty)}(n_1,n_2,n_3)$$

としたとき，

$$\pi(n_1,n_2,n_3)=\pi^{(\infty)}(n_1,n_2,n_3)/G,\qquad (n_1,n_2,n_3)\in\Omega$$

となる．すなわち

$$\pi(n_1,n_2,n_3)=\frac{\prod_{i=1}^{3}\frac{\rho_i^{n_i}}{n_i!}}{\sum_{(m_1,m_2,m_3)\in\Omega}\prod_{i=1}^{3}\frac{\rho_i^{m_i}}{m_i!}}$$

(3)　各状態における回線群の空き帯域は下記のようになる．

状態	空き帯域		状態	空き帯域	
	回線群 1	回線群 2		回線群 1	回線群 2
(0,0,0)	4	3	(0,0,1)	3	2
(1,0,0)	2	3	(1,0,1)	1	2
(2,0,0)	0	3	(0,1,1)	3	0
(0,1,0)	4	1	(1,1,1)	1	0
(1,1,0)	2	1	(0,0,2)	2	1
(2,1,0)	0	1	(1,0,2)	0	1
			(0,0,3)	1	0

よって，クラス i $(i=1,2,3)$ が呼損となる状態の集合 Γ_i は

$$\begin{aligned}\Gamma_1&=\{(2,0,0),(2,1,0),(1,0,1),(1,1,1),(1,0,2),(0,0,3)\}\\ \Gamma_2&=\{(0,1,0),(1,1,0),(2,1,0),(0,1,1),(1,1,1),(0,0,2),(1,0,2),(0,0,3)\}\\ \Gamma_3&=\{(2,0,0),(2,1,0),(0,1,1),(1,1,1),(1,0,2),(0,0,3)\}\end{aligned}$$

となり，各クラスの到着はポワソン過程に従うので，クラス i $(i=1,2,3)$ 呼損率 B_i は

$$B_i=\sum_{(n_1,n_2,n_3)\in\Gamma_i}\pi(n_1,n_2,n_3)$$

で与えられる．

要求帯域行列 $\boldsymbol{R}$ の (i,j) 要素を $R_{i,j}$ とし，リンク j $(j=1,2,\ldots,J)$ の使用帯域が x_j である定常分布を $q(\boldsymbol{x})$ としたとき，呼損ネットワークに対しても資源共有モデルに対する Kaufman のアルゴリズムの基礎となる式 (55) と同様の式

$$q(\boldsymbol{x})=\frac{1}{x_j}\sum_{i=1}^{P}\rho_i R_{i,j}q(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{r}_i),\quad j=1,2,\ldots,J$$

が成立し，これに基づいたアルゴリズムが知られている [3]．しかしながら，資源共有モデル（$J=1$ の場合）とは異なり，一般の呼損ネットワークの呼損率を求めることは，計算量の観点から大きな困難がある．そのため，大規模な呼損ネットワークに対しても適用可能な厳密な呼損率の計算手法は未だ未解決の問題として残されている．また，回線数がトラヒック強度と共に無限大へと向かった場合の呼損率の漸近解析や，大規模呼損ネットワークに適用可能な近似手法の提案も積極的に行われている（例えば [7] を参照）．

ここまで示してきたように，通信トラヒック理論を用いれば，回線交換型あるいは帯域予約型の通信ネットワークの性能評価はかなり正確に行うことが出来る．

注意 7.9 実際の通信ネットワークでは，予め定められた経路上に帯域が確保できない場合は代替経路で再び帯域予約を試みる方式など，より高度の制御を行っている．また，呼の発生頻度は時間帯や曜日によって変動する．前者に対しては呼損網を拡張した近似解析法が用意されており，後者に関しては，呼損率をある値以下に抑えようとすれば，最繁忙時間に着目した呼損率の評価を行えばよい．

謝辞

この講義録の草稿に対して貴重なご意見を頂きました大阪大学工学研究科通信工学専攻の松田崇弘博士に深謝いたします．

参考文献

[1] P. Brémaud, *Markov Chains, Gibbs Fields, Monte Carlo Simulation, and Queues*, Springer, New York, 1998.

[2] R. B. Cooper, *Introduction to Queueing Theory*, the 3rd edition, CEEPress Books, Washington, D.C., 1990.

[3] Z. Dziong and J. W. Roberts, “Congestion probabilities in a circuit-switched integrated services networks,” *Performance Evaluation.* vol.7, no.4, pp.267–284, 1987.

[4] J. S. Kaufman, “Blocking in a shared resource environment,” *IEEE Transactions on Communications*, vol.COM-29, o.10, pp.1474–1481, 1981.

[5] 川島，町原，高橋，斎藤，通信トラヒック理論の基礎とマルチメディア通信ネットワーク，電子情報通信学会，1995.

[6] F. P. Kelly, *Reversibility and Stochastic Networks*, John Willy & Sons, Chichester, 1979.

[7] F. P. Kelly: “Loss networks,” *Annals of Applied Probability*, vol.1, no.3, pp.319–378, 1991.

[8] 牧本，待ち行列アルゴリズム — 行列解析アプローチ —，朝倉書店，2001.

[9] K. W. Ross, *Multiservice Loss Models for Broadband Telecommunication Networks*, Springer, Berlin, 1995.

[10] 滝根，村田，“通信網における待ち行列 –理論の応用と課題–” オペレーションズ・リサーチ，vol.43, no.5, pp.264–271, 1998.

[11] 滝根，伊藤，西尾，ネットワーク設計理論，岩波書店，2001.

[12] 高橋幸雄: やさしい待ち行列 (2)，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 40, No. 12，pp. 716–721, 1995.

[13] S. F. Yashkov, “Properties of invariance of probabilistic models of adaptive scheduling in shared-use systems,” *Automatic Control and Computer Sciences*, vol.14, no.6, pp.46–51, 1980.