# 初等通信トラヒック理論

滝根 哲哉*

# 目 次



*連絡先：大阪大学大学院工学研究科電気電子情報通信工学専攻（〒 565-0871 吹田市山田丘 2-1）
電話：(06)6879-7740　FAX：(06)6875-5901　電子メール：takine@comm.eng.osaka-u.ac.jp

# はじめに

インターネット上を流れる情報フローは電子メールやファイルのみならず，音声や動画といった実時間制約があるものにまで広がりつつある．一般に，これらの情報フローを**トラヒック**（traffic）という．現在のインターネットはこれらのトラヒックに対してベストエフォートサービスを提供するに留まっているが，今後，多様なアプリケーションに対して，それぞれが快適に動作できるような**通信サービス品質**（quality of services: QoS）を確保することが強く望まれている．通信サービス品質を決定する要素には，回線（伝送媒体），ルータ，サーバといったネットワーク資源とそれらの接続形態，サービスを提供するためのソフトウェアやプロトコルに加えて，トラヒックの量や性質があり，これらが複雑に絡みあって通信サービス品質が決まることになる．

ネットワーク設計とは，想定されるアプリケーションが快適に動作するように通信サービス品質を保ちつつ，できるだけ低コストで，かつ，管理の容易な通信ネットワークを構築する，すなわち，ルータや回線といったネットワーク資源を適切に配置することに他ならない．それゆえ，ネットワーク設計を行う技術者あるいはネットワーク管理者は，想定されるアプリケーションが通信ネットワークの各層でどのように振舞うかを理解していなければならない．それぞれのアプリケーションから送出されるパケット長やプロトコルに内在するオーバヘッドに加え，それらが伝送される際のフロー制御やパケット分割に対する知識が必要である．これらについては情報通信基礎 II でその基礎を学んだ．

実際に通信ネットワーク設計を行う際には，どのような利用者あるいはアプリケーションに対して，どのようなサービスを行うのかということを明確に表現した設計目標を定める必要がある．そのためには，まず，通信ネットワークを流れるであろうトラヒックに対する大まかな把握が不可欠である．実在する通信ネットワークにおけるトラヒック測定とその分析はワークロード解析と呼ばれている．さらに，ワークロード解析から得られた知見に基づき，想定される利用状況を反映したシナリオを構築する一方，設計目標を客観的な設計指標，すなわち，コストに関する制約や物理的あるいは政策的な制約ならびに通信サービス品質を表す各種の**性能指標**（performance measure）によって定量的に示されなければならない．

通信サービス品質を表す性能指標の代表的なものには**スループット**（throughput），**伝送遅延**（transmission delay），**パケット損率**（packet loss probability）がある．スループットとは単位時間当たりに回線あるいはルータを通過する情報の量である．伝送遅延とはパケットが発生してから実際に伝送が終了するまでの時間であり，ルータ内で宛先処理などに要する時間，ルータ内のバッファで送信を待つ時間，情報を回線上に送出する時間，回線上を信号が伝搬する時間の和で与えられる．また，パケット損率とは伝送の途中でパケットが失われてしまう確率である．信頼性の高い回線では，雑音等によって伝送途中で情報が失われる確率は極めて小さいため，パケット損確率は，ルータに到着したときバッファが送信待ちパケットで一杯であるためパケット損が生じる確率に等しい．

ネットワーク設計に現れる設計指標には常にトレードオフが内在していることに注意する．これは主に通信ネットワークを管理する側と利用する側の利益が相反するものになっていることに起因する．最も端的な例は以下のようなものである．一般に利用者は同じ料金であれば，より高速な回線を望むが，一方で高速な回線の敷設にはより多くのコストがかかる．また，ルータ内で一時的にパケットを蓄積するバッファの容量を大きくすれば，パケット損率を小さくできるが，一方でルータ内でのパケットの待ち時間は増大する傾向をもつと考えられる．

また，情報伝送時の経路選択に関しても同様のトレードオフがある．通信ネットワークを管理する側の視点に立てば，できるだけ少ない回線を経由して情報を伝送することが好ましい．なぜなら一つのパケットが $H$ 本の回線を経由して受信者へ到達するときに通信ネットワークにかかる負荷は，1 本の回線で直接受信者へ到達するときの $H$ 倍になるからである．一方，利用者の視点に立てば，幾つの回線を経由したかということにはほとんど関心がなく，情報を伝達するのに必要な時間が短ければそれで良い．一見，経由する回線の数が少なければ情報伝送に必要な時間も短くなると思われるかも知れないが，情報伝達に必要な時間は経由する回線の容量や輻輳具合によって定まり，結果として，迂回経路を用いた方がより早く伝達できることも多々ある．また，各経路上でのパケット損率なども併せて考慮しなければならない．

このようにネットワーク設計における設計目標とは相反する複数の設計指標に対してその妥協点を見い出すことと考えられる．よって，現状よりも良いネットワークの構築といった曖昧な設計目標は意味をなさない．上の例で示したように，ある特定の評価指標を基準にした場合に一方が優れていたとしても，必ずそこにはトレードオフがあり，他の評価指標を基準に比較すれば他方より劣ると考えられるからである．それゆえ適切なネットワーク設計を行うためには，設計目標をコスト，制約，性能指標などの設計指標によって客観的かつ定量的に明示する

必要がある．

通信ネットワークに限らず，あらゆるシステムの設計には評価が伴う．設計されたシステムが設計目標を満たしているか，すなわち，予め定められた制約や性能指標の基準を満たしているか，さらには，予め定められた制約内で最も効率的に目標を達成しているかということを知るためには，定量的な**性能評価**（performance evaluation）を行うことが不可欠である．特にネットワーク設計では，最初に通信ネットワークの形状を定めた上で，さらにそのネットワークの各経路を流れるトラヒックが予め定められた性能指標の基準を満たしながら伝送可能なように，回線容量やルータにおけるバッファの容量を決定するという 2 段階の設計を行う必要がある．一般に，前者は形状設計と呼ばれ，後者は回線設計と呼ばれる．さらに，形状設計，回線設計を経て得られたネットワーク構成案が当初の目標を達成しているかどうかを検証するため性能評価を行い，必要ならばその結果を再び形状設計に反映させ，そのもとで再び回線設計を行うといった作業が要求される．このように設計と性能評価は表裏一体の関係にある．

通信ネットワークを含むシステムの性能評価は想定されるシナリオの下でその性能を定量的に求めることであるが，残念ながら，系統的にそれを行う方法はない．性能評価に関する英文の成書が数多く出版されているが，いずれの書物においてもこの点に関して何らかの記述がある．特に多くの書物において，性能評価は一種の「芸術（art）」であると言っていることは興味深い．このように評される背景には，評価を行う人がどの程度，評価対象に対して知識をもっているか，また，評価するための理論や手法，あるいはツールにどれだけ精通しているかに依存して，それらをどのように組合わせて評価するかが決定されることになり，結果として，同じシステムを対象としていても，評価者によって評価手法が異なるばかりでなく，場合によっては評価結果さえも異なり得るからである．言い換えれば，性能評価にはある種の職人芸的な側面があり，知識と経験に裏打ちされた勘のようなものが重要となる．

回線設計を行う際に留意しなければならない通信ネットワークの特徴は，不特定多数の利用者が回線やルータといった通信ネットワークを構成する様々な資源を競合的に利用しようとする点である．多くの利用者が有限の資源を競合的に利用している状況では，利用したい資源がある利用者によって占有されているとき，他の利用者は資源が解放されるまで待つか，あるいは，その資源の利用をあきらめなければならない．例えば，ある特定の回線を通過しようとするパケットは，他のパケットが伝送中ならばルータ内のバッファに一時的に蓄えられ，予め定められた規則に従い送信されるのを待つことになる．また，パケットがルータに到着したとき，バッファが送信待ちパケットで一杯であるならば，このパケットは失われてしまう．よって，回線設計を行う際には，資源利用要求が確率的に発生するという前提の下で，例えば，平均待ち時間が 5 ms 以下，パケット損確率が 5% 以下といった所望の性能を達成するために必要な回線容量やバッファ容量を見積もることが要求される．

回線設計の問題を直接解くことはしばしば困難であるため，その逆問題である解析問題を考えることが多い．解析問題とは，例えば，注目する回線を通過するトラヒックの性質と回線容量ならびにルータのバッファ容量が与えられたとき，パケットの平均待ち時間やパケット損確率を求めるというものである．解析問題を解くことができれば，その結果をグラフあるいは表を用いて表示することで，所望の性能を達成するために必要な回線容量やバッファ容量を知ることができる．

上記のような解析問題を解くための数学的道具は**待ち行列理論**（queueing theory）と呼ばれる．待ち行列理論は共有資源に対する利用要求が確率的に発生するという仮定の下で，資源競合問題を抽象化した数学モデルの構築とその解析に関する理論であり，応用確率論の一分野でもある．通信ネットワークへの応用を意識したとき，待ち行列理論は**通信トラヒック理論**（teletraffic theory）とも呼ばれており，電話網の設計問題を解決するための枠組として 20 世紀初頭に研究が開始されている．それ以降，パケット交換網，衛星通信，LAN，狭帯域 ISDN，広帯域 ISDN（ATM），インターネット，携帯電話網などの新しい通信網の出現に伴い次々と新しいモデルが導入され，理論の発展が加速されてきた．

待ち行列理論を用いれば，トラヒックの確率的性質が通信ネットワークの輻輳とどのような関係があるかを定量的に評価することができる．しかし，待ち行列理論で扱うことができるモデルには自ずと制限がある．待ち行列理論で扱うことが困難であると思われる，より複雑なモデルの評価が必要となる場合には，計算機を用いた模擬実験，すなわち，**シミュレーション**（simulation）を行って解析問題を解くことになる．近年，ネットワーク設計を対象とした様々なシミュレーションソフトウェアパッケージが市販されており，また，フリーウェアのパッケージも利用可能になってきた．これらを用いれば，比較的簡単にシミュレーションを行うことができる．

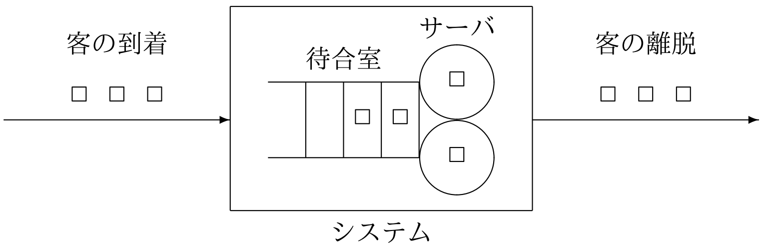



図 1: 待ち行列モデル

しかし，シミュレーションから得られた出力データは無数にある可能性の中から確率的に選ばれた標本値あり，確定値ではないことに注意しなければならない．特に複雑なモデルのシミュレーションは，無限個の面をもつ未知のサイコロを振る実験に例えることができる．それゆえ，シミュレーションを 1 回だけ行い，そこから平均待ち時間を一つ得たとしても，それはそのようなことが起こり得る，すなわち，未知のサイコロの無限個ある面の内の一つに，そのような面が存在するという事実が示されただけである．それゆえ，シミュレーションによって得られた出力データを適切に処理しなければ誤った評価結果を得る可能性がある．言い換えれば，解析問題をシミュレーションを用いて解く場合，高い信頼性をもつ出力データを得る必要があり，さらに得られたデータに対して統計的に適切な処理を施さなければならない．

本講義では，ネットワーク設計に欠かすことのできない通信トラヒック理論（すなわち待ち行列理論）の初歩について解説する．本稿の構成は以下の通りである．まず，通信トラヒック理論を理解する上で必要な基本的な知識として，ポワソン過程と指数分布ならびにリトルの公式を紹介した後，出生死滅過程，隠れマルコフ連鎖について解説すると共に，様々な待ち行列モデルへの応用を示す．

# 1　待ち行列モデル

待ち行列理論は共有資源に対する利用要求が確率的に発生するという仮定の下で，資源競合問題を抽象化した数学モデルの構築とその解析に関する理論である．上で述べたように，通信ネットワークへの応用を意識したとき，待ち行列理論は通信トラヒック理論と呼ばれるが，その応用範囲は，通信ネットワークに限らず，卑近な例では，スーパーのレジ台数など，様々である．待ち行列理論において扱われる確率モデルは待ち行列モデルと呼ばれる．図 1 に示されているように，待ち行列モデルとは共有の資源であるサーバと待合室からなるシステムに外部から客が到着し，これらの客はシステム内で暫く滞在した後，システムを去るというものである．通信ネットワークにおける応用では客はパケットに対応し，サーバと待合室はそれぞれ回線とルータ内のバッファに対応する．

一般に待ち行列モデルは次の五つの要素からなる．

1. 到着過程（パケットの発生時点に関する統計的情報）
2. サービス時間分布（パケットの伝送時間に関する統計的情報）
3. サーバ数（回線の数）
4. システム容量（ルータ内で保持できるパケットの最大数）
5. サービス規律（ルータ内のパケットの送信順序を定める規則）

このような要素からなる待ち行列モデルを記述する方法として**ケンドールの記法**（Kendall’s notation）が広く用いられている．これは，通常 $A/B/c/N$ の形をしており，それぞれ，到着間隔分布／サービス時間分布／サーバ数／システム容量を示している．$A$，$B$ に関しては $M$（指数分布），$D$ （一定分布），$E_k$（$k$ 次のアーラン分布），$H_k$（$k$ 次の超指数分布），$G$（一般分布：特定の分布を仮定しない），$GI$（独立同一分布：特定の分布は仮定しないが，到着間隔あるいはサービス時間が独立で同一の分布に従うことを強調したもの）などが用いられる．システム容量が無限大の場合は単に $A/B/c$ と書かれる．サービス規律は通常，先着順サービス（利用要求を到着順に処理するサービス規律）が仮定されており，**FCFS** (First-come, First-served) と書かれる．[1]サービス規律を

[1]FIFO (First-in, First-out) と呼ばれることもある．

明示する場合は，FCFS $A/B/c$ のように，この記号の前に書くことが多い．

待ち行列理論は通信ネットワークを含む様々な資源競合問題に対して抽象化されたモデルを通してシステムの定量的な評価を行い，問題解決の指針を与える数学的道具である．実際のシステムを評価するために待ち行列理論あるいは待ち行列モデルを利用する際には，まず，上記 (1)–(5) の要素を定める必要がある．ここで注意すべきことは，異なるシステムが同一のモデルで表現される場合や，同じシステムが（どの程度詳細にモデル化するかによって）異なるモデルで表現される場合があるということである．言い替えれば，待ち行列モデルは実際のシステムにおける資源競合を抽象的に表現した確率モデルであり，個々のモデルは特定のシステムのみを表現したものではない．以下では待ち行列理論の習慣に従い，個々の資源利用要求を客，個々の客が資源を占有する時間をサービス時間，個々の共有資源をサーバと呼ぶことにする．

## 2　待ち行列理論のための基礎知識

### 2.1　用語と記号

待ち行列モデルにおいて興味のある性能指標には，客の待ち時間やシステム内の客数（以下では系内客数と呼ぶ）などがある．客の到着あるいはサービス時間が確率的に定まる場合，これらの性能指標は確定的な値ではなく**確率変数**（random variable）となる．確率変数とは事象を数値で表現したものであり，例えば，時刻 $t$ における系内客数を $L(t)$ としたとき，時刻 $t$ に系内客数が $j$ 人であるという事象は $\{L(t) = j\}$ で記述され，この事象が起こる確率を $\Pr(L(t) = j)$ と書く．

確率変数 $X$ の定義域を $\mathcal{S}$ とする．すなわち $\Pr(X \in \mathcal{S}) = 1$ である．定義域 $\mathcal{S}$ が可算である場合 $X$ は離散確率変数と呼ばれ，そうでない場合は連続確率変数と呼ばれる．

確率変数 $X$ と $Y$ に対して $\{X \le x\}$ という事象と $\{Y \le y\}$ という事象が同時に起こる確率 $\Pr(X \le x, Y \le y)$ を結合確率という．さらに事象 $\{X \le x\}$ が起こったという条件の下で事象 $\{Y \le y\}$ が起こる確率を条件付き確率といい $\Pr(Y \le y \mid X \le x)$ と書く．結合確率は条件付き確率を用いて以下のように表現できる．

$$\Pr(X \le x, Y \le y) = \Pr(X \le x) \Pr(Y \le y \mid X \le x)$$

もし，結合確率 $\Pr(X \le x, Y \le y)$ が $\Pr(X \le x) \Pr(Y \le y)$ に等しいならば，確率変数 $X$ と $Y$ は**独立**（independent）であるといわれ，$\Pr(Y \le y \mid X \le x) = \Pr(Y \le y)$ となる．

離散確率変数 $X$ の**平均**（mean）$E[X]$ は

$$E[X] = \sum_{x \in \mathcal{S}} x \Pr(X = x) \tag{1}$$

で与えられる．$E[X]$ は $X$ の**期待値**（expectation）とも呼ばれる．また，実数 $\mathcal{R}$ を定義域にもつ連続確率変数 $X$ は**分布関数**（distribution function）

$$F(x) = \Pr(X \le x)$$

によって特徴付けられる．$F(x)$ は非減少関数で $F(\infty) = 1$ である．特に

$$\int_{-\infty}^{x} f(x) dx = F(x)$$

なる $f(x)$ が存在するとき，$f(x)$ は $X$ の**密度関数**（density function）と呼ばれる．密度関数 $f(x)$ は $F(x)$ が微分可能である場合 $f(x) = dF(x)/dx$ である．また $\Delta x$ を微小な正数としたとき，

$$f(x)\Delta x \approx \Pr(x < X \le x + \Delta x)$$

という確率的意味を持つ．さらに定義から

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = F(\infty) = 1 \tag{2}$$

であり，これは確率の和が 1 であることと等価である．密度関数 $f(x)$ をもつ連続確率変数 $X$ の期待値 $E[X]$ は

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

で与えられる．もし $\Pr(X < 0) = 0$ ならば，$X$ の**補分布** (complementary distribution) $F^C(x) = \Pr(X > x) = 1 - F(x)$ を用いて

$$E[X] = \int_{0}^{\infty} F^C(x) dx$$

と書くことが出来る．

定数 $c_1$，$c_2$ と確率変数 $X$，$Y$ に対して，期待値は次の性質を持つ．

$$E[c_1 X + c_2 Y] = c_1 E[X] + c_2 E[Y], \tag{3}$$

また，もし，確率変数 $X$ と $Y$ が独立ならば

$$E[XY] = E[X]E[Y]$$

が成立する．さらに，連続確率変数 $X$ と関数 $u(x)$ に対して

$$E[u(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) f(x) dx \tag{4}$$

である．離散確率変数 $X$ の場合，式 (4) は，

$$E[u(X)] = \sum_{x \in \mathcal{S}} u(x) \Pr(X = x) \tag{5}$$

である．$\mathcal{S} \subset \mathcal{R}$ のとき，式 (4) と式 (5) をまとめて

$$E[u(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} u(x) dF(x)$$

という記法を用いる.[2]この記法を用いれば，$X$ が連続か離散かという区別をせずに統一的に期待値を表すことができる．特に，$u(x) = x^n$ のとき $E[u(X)] = E[X^n]$ は $\boldsymbol{n}$ **次積率**（the $n$th moment）と呼ばれる．

最後に**分散** (variance) を定義する．確率変数 $X$ の分散 $\mathrm{Var}(X)$ は

$$\mathrm{Var}[X] = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2$$

で与えられる．分散は確率変数の取る値が平均からどの程度離れやすいかを示す指標であり，最初の等号から非負の値を取ることが分かる．また，$\sqrt{\mathrm{Var}[X]}$ は**標準偏差**（standard deviation）と呼ばれる．

## 2.2 リトルの公式

最初に述べたように，待ち行列モデルとは，システムの外部から客が到着し，システム内で一時的に滞在した後，システムを去る，という動作を表現したモデルである．よって，時刻 $t$ におけるシステム内の客数，すなわち系内客数を $L(t)$ とし，$A(0, t]$ を区間 $(0, t]$ の間にシステムに到着した客数，$D(0, t]$ を区間 $(0, t]$ の間にシステムを離脱した客数とすると，

$$L(t) = L(0) + A(0, t] - D(0, t] \tag{6}$$

という関係を満たすモデルを対象としていることになる．ここで $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を時刻 0 以降，$n$ 番目に到着した客の到着時刻とし，$N(t) = \max\{n;\, A_n \le t\} = A(0, t]$ を時刻 $t$ までに到着した客の総数とすると，単位時間当たりに到着する平均客数，すなわち，平均到着率 $\lambda$ は

$$\lambda = \lim_{t \to \infty} \frac{N(t)}{t}$$

[2]Riemann-Stieltjes 積分と呼ばれる．

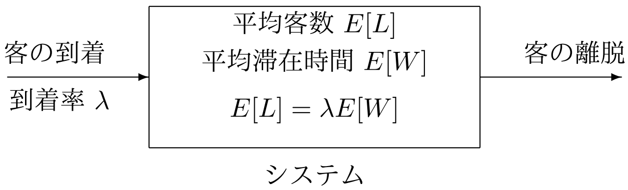



図 2: リトルの公式

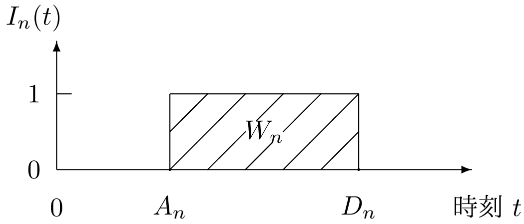



図 3: $W_n$ と $I_n(t)$ の関係

で与えられる．

最も興味ある量は平均系内客数 $E[L]$ と平均系内滞在時間 $E[W]$ である．$W_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を時刻 0 以降，$n$ 番目に到着した客の系内滞在時間とすると，$E[L]$ と $E[W]$ はそれぞれ

$$E[L] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T L(t)dt, \qquad E[W] = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} W_n$$

で与えられる．ここで $E[L]$ は十分に長い間，システムを観測したときの累積客数の平均であり，時間平均と呼ばれる．一方，$E[W]$ は滞在時間の総和を客数で割った平均であり，客平均と呼ばれる．

一般に式 (6) を満たすモデルにおける平均系内客数 $E[L]$ と平均系内滞在時間 $E[W]$ の間には**リトルの公式**（Little's formula）と呼ばれる非常に単純な関係が成立する．

**定理 1 (リトルの公式)** $E[L]$，$\lambda$，$E[W]$ が全て存在し，かつ，有限である場合，これらの間にはサービス順序によらず次式が成立する．

$$E[L] = \lambda E[W] \tag{7}$$

リトルの公式がなぜ成立するかを見るために，若干の準備を行う．まず，$A_n$ を $n$ 番目の客の到着時刻，$D_n = A_n + W_n$ を $n$ 番目の客の離脱時刻とする．ここで指示関数 $I_n(t)$ を次式で定義する．

$$I_n(t) = \begin{cases} 1, & n \text{ 番目の客が時刻 } t \text{ に系内にいる場合} \\ & \quad \text{（すなわち } A_n \le t < D_n \text{ のとき）} \\ 0, & \text{その他} \end{cases}$$

定義より，$W_n$ ならびに $L(t)$ はそれぞれ $I_n(t)$ を用いて

$$W_n = \int_0^\infty I_n(t)dt, \qquad L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(t)$$

で与えられる．図 3 に $W_n$ と $I_n(t)$ の関係を示す．

以上の準備の下でリトルの公式がなぜ成立するかを見ていく．今，空のシステムからスタートし（$L(0) = 0$），$L(T) = 0$，すなわちシステムが空であるような時刻 $T$ を考える．図 4 は時刻 $T$ までに到着した 5 人の客が全て時刻 $T$ までに離脱し，時刻 $T$ における系内客数が 0 である場合を示している[3]．

[3] この図ではサービス規律が後着順であると仮定している．

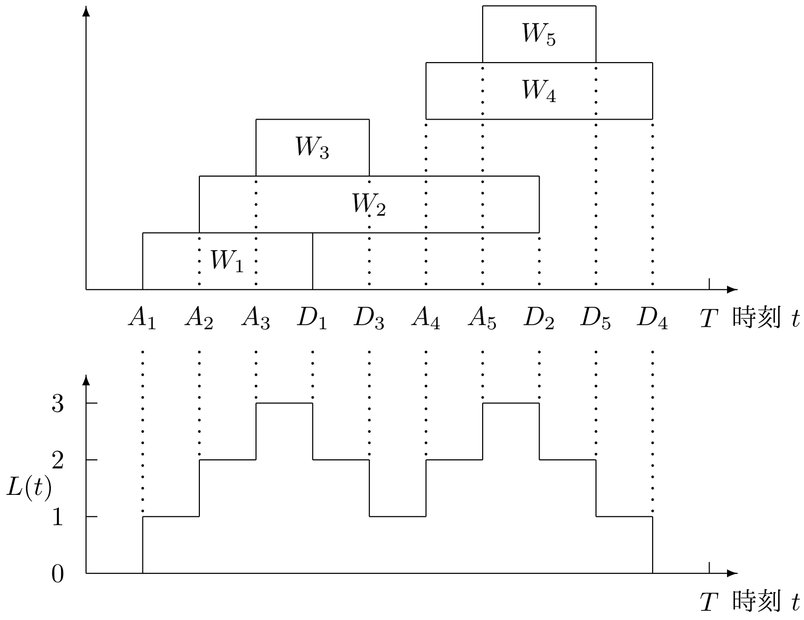



図 4: 客数の時間累積和と系内滞在時間の総和

時刻 $T$ までに到着した全ての客はシステムを離脱しているので

$$\int_0^\infty I_n(t)dt = \int_0^T I_n(t)dt, \qquad n = 1, \ldots, N(T)$$

が成立する．さらに時刻 $T$ 以降に到着する客，すなわち，$n > N(T)$ なる $n$ に対しては，時間区間 $[0, T]$ において $I_n(t) = 0$ である．よって

$$\int_0^T L(t)dt = \int_0^T \sum_{n=1}^{N(T)} I_n(t)dt = \sum_{n=1}^{N(T)} \int_0^T I_n(t)dt = \sum_{n=1}^{N(T)} W_n$$

を得る．すなわち客数の時間累積和は系内滞在時間の総和に等しい（図 4 参照）．よって，時間区間 $[0, T]$ における平均系内客数と平均系内滞在時間の間には

$$\frac{1}{T}\int_0^T L(t)dt = \frac{N(T)}{T} \cdot \frac{1}{N(T)} \sum_{n=1}^{N(T)} W_n$$

が成立する．ここで $N(T)/T$ は時間区間 $[0, T]$ における平均到着率である．

一方，任意に選ばれた時刻 $t$ においては

$$\int_0^t L(\tau)d\tau = \sum_{n=1}^{N(t)} W_n + X_E$$

である．ここで $X_E$ は誤差の項を表現している．時刻 $t$ における系内客数 $L(t)$ が正ならば，ある $n$（$\leq N(t)$）に対して $\int_0^t I_n(\tau)d\tau < W_n$ となるので誤差の項 $X_E$ は負となる．$t$ で両辺を割ると

$$\frac{1}{t}\int_0^t L(\tau)d\tau = \frac{N(t)}{t}\frac{1}{N(t)} \sum_{n=1}^{N(t)} W_n + \frac{X_E}{t}$$

を得る．もし

$$\lim_{t\to\infty} \frac{X_E}{t} = 0$$

ならば，$t \to \infty$ とすることにより式 (7) を得る．ここで仮定した $\lim_{t\to\infty} X_E/t = 0$ は 十分時間が経った後にも誤差の項 $X_E$ が高々有限の値に押えられていることと等価である．すなわち，いかなる時刻においても系内に滞

在している客が離脱するまでの時間の和が有限であれば，この条件が成立する．実際の安定なシステムへの応用では，無条件にリトルの公式が成立すると考えても支障はない．

ここで考えた「システム」は待ち行列モデル全体を意味する必要はない．証明の手順から分かるように，個々の客の指示関数 $I_n(t)$ が 1 となる状態の平均継続時間が $E[W]$ に対応し，そのような状態にある客の総数の平均が $E[L]$ に対応する．例えば，待合室のみをシステムと見なせば，個々の客が到着してからサービスを開始するまでの期間，指示関数は 1 となり，その結果，平均待ち客数 $E[L_q]$ と平均待ち時間 $E[W_q]$ の間には $E[L_q] = \lambda E[W_q]$ が成立する．

また，サーバ部分のみをシステムと見なすこともできる．これを 平均到着率 $\lambda$，平均サービス時間 $b$ をもつ安定な $G/G/c$ を対象に考えてみる．この場合は，個々の客のサービスの開始時点から終了時点までの期間，指示関数は 1 となる．$G/G/c$ が安定ならば到着した客は全てサービスされるので，サーバへは単位時間当たり平均 $\lambda$ 人の客が到着する．また，サーバでの平均滞在時間は平均サービス時間 $b$ に等しい．よって，リトルの公式より，サーバにいる，すなわちサービス中の平均客数は $\lambda b$ で与えられる．

特に $c = 1$，すなわち $G/G/1$ の場合，サービス中の客は高々 1 人なので，この結果をサーバが稼働している確率を用いて表現すると，

$$\lambda b = 0 \text{ 人} \times \Pr(\text{サーバが休止}) + 1 \text{ 人} \times \Pr(\text{サーバが稼働})$$

となる．$\rho = \lambda b$ とすれば $\rho$ は $\Pr(\text{サーバが稼働})$ という確率を与える．このため $\rho$ は**利用率**（utilization factor）とも呼ばれる．一般に単一サーバをもつシステムが安定であるための条件は $\rho < 1$ である．[4]

## 2.3 ポワソン過程と指数分布

待ち行列理論で用いられる到着過程の内，最も基本的なものはランダムな到着である．ランダムな到着を数学的に表現するため次のような状況を考える (高橋 1995)．時間区間 $(0, T]$ に $K$ 人の客がでたらめに到着すると仮定する．すなわち，それぞれの客は他の客とは独立に時間区間 $(0, T]$ 内で一様分布に従って到着時点を選ぶと仮定する．この結果，幅 $x$ をもつ任意に選ばれた区間に到着がある確率は区間の幅だけに依存する．すなわち，ある客の到着時刻を $\tau$ としたとき， $\tau$ が時間区間 $(y, y+x]$ に含まれる確率は $\Pr(\tau \in (y, y+x] \subset (0, T]) = x/T$ で与えられ，区間の位置を表す $y$ の値とは独立である．

$A(y, y+x]$ を時間区間 $(y, y+x] \subset (0, T]$ に到着する客数を表す確率変数とする．それぞれの客は互いに独立に到着時点を選ぶので，

$$\Pr(A(y, y+x] = k) = \frac{K!}{k!(K-k)!} \left(\frac{x}{T}\right)^k \left(1 - \frac{x}{T}\right)^{K-k} \tag{8}$$

で与えられる．$\lambda = K/T$ とし，期待値の公式に従って計算すると

$$E[A(y, y+x]] = \lambda x$$

を得る．[5]　定義より $\lambda$ は単位時間当たりに到着する平均客数，すなわち，平均到着率を表しており，時間区間 $(y, y+x]$ に到着する平均客数は時間区間の長さ $x$ と平均到着率の積で与えられ，区間の位置とは独立である．

### 2.3.1 ランダムな到着とポワソン過程

ここで平均到着率 $\lambda = K/T$ を一定の値に保ちながら $T \to \infty$，$K \to \infty$ の極限を考える．まず，式 (8) は

$$\Pr(A(y, y+x] = k) = \frac{x^k}{k!} \left(1 - \frac{x}{T}\right)^K \frac{K}{T-x} \cdot \frac{K-1}{T-x} \cdot \cdots \cdot \frac{K-k+1}{T-x}$$

と変形できる．ここで $x/T = \lambda x/K$ に注意すると

$$\lim_{T\to\infty} \left(1 - \frac{x}{T}\right)^K = \lim_{K\to\infty} \left(1 - \frac{\lambda x}{K}\right)^K = e^{-\lambda x}$$

[4]一定間隔到着，一定時間サービスをもつ $D/D/1$ の場合の安定条件は $\rho \leq 1$ である．

[5]これは二項分布 (binomial distribution) の例である．

となり，また

$$\lim_{T\to\infty}\frac{K-n}{T-x}=\lim_{T\to\infty}\frac{\lambda T-n}{T-x}=\lambda \qquad (n=0,\dots,k-1)$$

なので，平均到着率 $\lambda=K/T$ を一定に保ちながら $T\to\infty$，$K\to\infty$ の極限を取ると次式を得る．

$$\Pr(A(y,y+x]=k)=e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!} \qquad (k=0,1,\dots) \tag{9}$$

**定義 2 (ポワソン分布)** 式 (9) の右辺で与えられる確率分布を，平均 $\lambda x$ をもつ**ポワソン分布**（Poisson distribution）という．[6]

次に，互いに重なり合わない二つの時間区間に到着する客数の結合確率を考える．$K$ 人の客が時間区間 $(0,T]$ の間に互いに独立に一様分布に従って到着するとき，時間区間 $(0,T]$ に含まれる重なり合わない二つの時間区間 $(y_1,y_1+x_1]$, $(y_2,y_2+x_2]$ にそれぞれ $k_1$ 人，$k_2$ 人の客が到着する結合確率は

$$\begin{aligned}
&\Pr(A(y_1,y_1+x_1]=k_1,A(y_2,y_2+x_2]=k_2)\\
&\qquad=\Pr(A(y_1,y_1+x_1]=k_1)\Pr(A(y_2,y_2+x_2]=k_2\mid A(y_1,y_1+x_1]=k_1)\\
&\qquad=\frac{K!}{k_1!k_2!(K-k_1-k_2)!}\left(\frac{x_1}{T}\right)^{k_1}\left(\frac{x_2}{T}\right)^{k_2}\left(1-\frac{x_1+x_2}{T}\right)^{K-k_1-k_2}
\end{aligned} \tag{10}$$

で与えられる．さらに式 (10) は

$$\begin{aligned}
\Pr(A(y_1,y_1+x_1]=k_1,A(y_2,y_2+x_2]=k_2)&=\frac{x_1^{k_1}}{k_1!}\cdot\frac{x_2^{k_2}}{k_2!}\left(1-\frac{x_1+x_2}{T}\right)^K\\
&\quad\cdot\frac{K}{T-x_1-x_2}\cdot\frac{K-1}{T-x_1-x_2}\cdot\dots\cdot\frac{K-k_1-k_2+1}{T-x_1-x_2}
\end{aligned}$$

と書き換えられるので，平均到着率 $\lambda=K/T$ を一定に保ちながら $T\to\infty$，$K\to\infty$ の極限を考えると

$$\begin{aligned}
\Pr(A(y_1,y_1+x_1]=k_1,A(y_2,y_2+x_2]=k_2)&=e^{-\lambda(x_1+x_2)}\frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!}\cdot\frac{(\lambda x_2)^{k_2}}{k_2!}\\
&=e^{-\lambda x_1}\frac{(\lambda x_1)^{k_1}}{k_1!}\cdot e^{-\lambda x_2}\frac{(\lambda x_2)^{k_2}}{k_2!}
\end{aligned} \tag{11}$$

を得る．式 (9) に注意すると式 (11) は

$$\Pr(A(y_1,y_1+x_1]=k_1,A(y_2,y_2+x_2]=k_2)=\Pr(A(y_1,y_1+x_1]=k_1)\Pr(A(y_2,y_2+x_2]=k_2)$$

と書くことができる．すなわち上記の極限で与えられる客の到着過程において，互いに重なり合わない時間区間に到着する客数は独立な確率変数となる．

**定義 3 (ポワソン過程)** 区間 $(y,y+x]$ の間に到着する客数分布が平均 $\lambda x$ のポワソン分布に従い，かつ，重なり合わない区間に到着する客数は互いに独立であるような到着過程を率 $\lambda$ をもつ**ポワソン過程**（Poisson process），あるいは率 $\lambda$ をもつ**ポワソン到着**（Poisson arrivals）という．

### 2.3.2 ポワソン到着における到着間隔と指数分布

次に率 $\lambda$ でポワソン到着する客の到着間隔 $X$ について考察する．時刻 $t_0$ に客の到着があったという事象を $Z(t_0)$ で表し，事象 $Z(t_0)$ が起こったという条件の下で，その次の客の到着までの間隔 $X$ が $x$ より大きい確率を考える．ポワソン到着の独立性より $A(t_0,t_0+x]$ は $t_0$ 以前の到着とは独立なので，

$$\Pr(X>x\mid Z(t_0))=\Pr(A(t_0,t_0+x]=0\mid Z(t_0))=\Pr(A(t_0,t_0+x]=0)=e^{-\lambda x}$$

を得る．よって，到着間隔の分布関数 $\Pr(X\le x\mid Z(t_0))$ は次式で与えられる．

$$\Pr(X\le x\mid Z(t_0))=1-e^{-\lambda x} \tag{12}$$

**定義 4 (指数分布)** 分布関数が式 (12) の右辺で与えられる確率分布をパラメタ $\lambda$ をもつ**指数分布**（exponential distribution）という．

[6] 式 (8) の二項分布は $K$ が大きいとき（あるいは $x/T$ が小さいとき），同じ平均をもつポワソン分布で近似できる事を示している．

式 (12) より，パラメタ $\lambda$ をもつ指数分布の密度関数は $\lambda\exp(-\lambda x)$ で与えられ，$n$ 次積率（$n=1,2,\ldots$）は $n!/\lambda^n$ で与えられることが分かる．

次に，$t_0$ に客の到着があったという条件の下で，その後到着する 2 人の客の到着間隔 $X_1$, $X_2$ の結合分布を考える．$X_1=y$ で条件付けを行うと，ポワソン到着の独立性より

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1\le x_1, X_2>x_2 \mid Z(t_0)) &= \int_0^{x_1} \lambda e^{-\lambda y}\Pr(A(t_0+y, t_0+y+x_2]=0 \mid Z(t_0), Z(t_0+y))dy \\
&= \int_0^{x_1} \lambda e^{-\lambda y}\Pr(A(t_0+y, t_0+y+x_2]=0)dy \\
&= \int_0^{x_1} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda x_2}dy \\
&= (1-e^{-\lambda x_1})e^{-\lambda x_2}
\end{aligned}$$

となる．ここで $\Pr(X_1\le x_1, X_2\le x_2)+\Pr(X_1\le x_1, X_2>x_2)=\Pr(X_1\le x_1)$ に注意すると

$$\begin{aligned}
\Pr(X_1\le x_1, X_2\le x_2) &= \Pr(X_1\le x_1)-\Pr(X_1\le x_1, X_2>x_2) \\
&= (1-e^{-\lambda x_1})(1-e^{-\lambda x_2}) \\
&= \Pr(X_1\le x_1)\Pr(X_2\le x_2)
\end{aligned}$$

を得る．これは率λでポワソン到着する客の連続する到着間隔は互いに独立であり，それぞれ同じパラメタλをもつ指数分布に従うことを示している．

さて，ある時刻 $t_0$ に客が到着したと仮定し，次の客の到着までの間隔を $X$ で表す．このとき，$(t_0, t_1]$ の間，次の客が到着しなかったという条件の下で時刻 $t_1+x$ までに次の客が到着する条件付き確率 $\Pr(X\le t_1+x \mid X>t_1)$ を考える．定義に従って計算を進めると

$$\begin{aligned}
\Pr(X\le t_1+x \mid X>t_1,\ Z(t_0)) &= \frac{\Pr(t_1<X\le t_1+x \mid Z(t_0))}{\Pr(X>t_1 \mid Z(t_0))} \\
&= \frac{\Pr(X\le t_1+x \mid Z(t_0))-\Pr(X\le t_1 \mid Z(t_0))}{\Pr(X>t_1 \mid Z(t_0))} \\
&= \frac{(1-e^{-\lambda(t_1+x)})-(1-e^{-\lambda t_1})}{e^{-\lambda t_1}} \\
&= 1-e^{-\lambda x} \qquad (13)
\end{aligned}$$

を得る．式 (13) は条件付き確率 $\Pr(X\le t_1+x \mid X>t_1,\ Z(t_0))$ が（$t_0$ のみならず）$t_1$ とも独立であり，時刻 $t_1$ から次の到着までの間隔は元の到着間隔 $X$ と同じ確率分布に従うことを示している．この性質は指数分布の**無記憶性**（memoryless property）と呼ばれ，後で見るように待ち行列モデルの解析において極めて重要な役割を果たす．

### 2.3.3 一定到着率の仮定

客の到着間隔が独立同一なパラメタ $\lambda$ をもつ指数分布に従うとき，その到着過程は以下で定義される一定到着率の仮定を満たす．

**定義 5 (一定到着率の仮定)** *次の 3 つの仮定を満たす客の到着過程は一定到着率の仮定を満たすと呼ばれる．*

1. 独立増分 : 客の到着は互いに独立である．すなわち，交わらない二つの時間区間の間に到着する客の数は互いに独立な確率変数となる．
2. 定常増分 : 微小な時間区間 $(t, t+\Delta t]$ の間に 1 人の客が到着する確率は $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ で与えられ，$t$ とは独立である．
3. 順序性 : 客は 1 人ずつ到着する．すなわち，微小な時間区間 $(t, t+\Delta t]$ の間に 2 人以上の客が到着する確率は $o(\Delta t)$ である．

ここで $o(\Delta t)$ は $\lim_{\Delta t\to 0} o(\Delta t)/\Delta t=0$ となる項，すなわち $\Delta t$ の高次の項を表す．仮定の 2.，3. ならびに確率の和が 1 であることから，

4. 微小な時間区間 $(t, t+\Delta t]$ の間に客が到着しない確率は $1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$ で与えられる．

が成立することに注意する．以下では客の到着間隔が独立同一な指数分布に従うとき客の到着過程は一定到着率の仮定を満たすことを示す．

まず初めに仮定 1. を考える．2 つの時間区間 $(y_1, y_1 + x_1]$ と $(y_2, y_2 + x_2]$ が重なり合わない（$y_1 + x_1 \leq y_2$）ならば，$\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1)$ は到着間隔が独立同一な分布に従うこと，ならびに，指数分布の無記憶性より $\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2)$ と等しくなる[7]．すなわち

$$
\begin{aligned}
&\Pr(A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_2, y_2 + x_2] = k_2) \\
&\qquad = \Pr(A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \\
&\qquad = \Pr(A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2)
\end{aligned}
$$

となり，仮定 1. が満たされる．

次に区間 $(t, t + \Delta t]$ の間に 1 人の客が到着する確率を考える．時刻 $t$ 以降，最初の到着までの時間間隔を $X_1$ とし，さらにその次の客の到着までの時間間隔を $X_2$ とすると，この確率は $\Pr(X_1 \leq \Delta t, X_2 > \Delta t - X_1)$ で与えられる．よって，指数分布の無記憶性より，

$$
\begin{aligned}
\Pr(X_1 \leq \Delta t, X_2 > \Delta t - X_1) &= \int_0^{\Delta t} \lambda e^{-\lambda y} e^{-\lambda(\Delta t - y)} dy \\
&= \lambda \Delta t e^{-\lambda \Delta t} \\
&= \lambda \Delta t (1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) \\
&= \lambda \Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

となり，仮定 2. を満たす．

最後に区間 $(t, t + \Delta t]$ の間に 2 人以上の客が到着する確率を考える．

$$\Pr(A(t, t + \Delta t] \geq 2) = 1 - \Pr(A(t, t + \Delta t] = 0) - \Pr(A(t, t + \Delta t] = 1)$$

ここで

$$\Pr(A(t, t + \Delta t] = 0) = \Pr(X_1 > \Delta t) = e^{-\lambda \Delta t} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

に注意すると

$$\Pr(A(t, t + \Delta t] \geq 2) = 1 - (1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)) - (\lambda \Delta t + o(\Delta t)) = o(\Delta t)$$

となり仮定 3. を満たす．よって，独立同一な指数分布間隔で到着する客は一定到着率の仮定を満たすことが示された．

### 2.3.4 一定到着率の仮定とポワソン過程

これまでに，ポワソン過程に従い到着する客の到着間隔が独立同一な指数分布に従う確率変数列となること，さらに客の到着間隔が独立同一な指数分布に従うとき，一定到着率の仮定を満たすことを見てきた．最後に，客の到着が一定到着率の仮定を満たすとき，客の到着がポワソン過程に従うことを示す．これにより，客の到着がポワソン過程に従うこと，到着間隔が独立同一な指数分布に従うこと，ならびに客の到着が一定到着率の仮定に従うことが等価であることが示される．

まず，仮定 1. より，ポワソン到着における独立増分性は明らかに満たされる．次に一定到着率の仮定の下で区間 $(y, y + x]$ に到着する客数 $A(y, y + x]$ を考える．確率 $\Pr(A(y, y + x] = k)$ は $y$ とは独立であるので，$P_k(x) = \Pr(A(y, y + x] = k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ とおくと次式を得る．

$$P_0(x + \Delta x) = P_0(x)(1 - \lambda \Delta x + o(\Delta x)) \tag{14}$$

$$P_k(x + \Delta x) = P_{k-1}(x)(\lambda \Delta x + o(\Delta x)) + P_k(x)(1 - \lambda \Delta x + o(\Delta x)) + o(\Delta x), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{15}$$

これらの式において右辺の $P_k(x)$ を左辺へ移項し，両辺を $\Delta x$ で割り，$\Delta x \to 0$ の極限を取ることにより，微分差分方程式

$$\frac{d}{dx} P_0(x) = -\lambda P_0(x) \tag{16}$$

$$\frac{d}{dx} P_k(x) = \lambda P_{k-1}(x) - \lambda P_k(x), \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{17}$$

[7]付録 A 参照

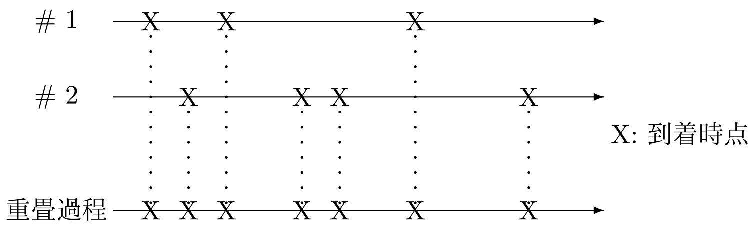



図 5: ポワソン過程の重畳（$N = 2$）

を得る．なお，確率の総和は 1 であり，区間長が 0 の区間内に客が到着する確率は 0 なので

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) = 1, \qquad \lim_{x\to 0} P_0(x) = 1$$

が成立している．

ここで $\lim_{x\to 0} P_0(x) = 1$ に留意すると，式 (14) より $P_0(x) = \exp(-\lambda x)$ となり，式 (15) を用いて

$$P_k(x) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

となることを帰納法によって示すことができる．すなわち，$\Pr(A(y, y + x] = k)$ は式 (9) を満たす．

連立微分差分方程式 (14)， (15) を代数的に解くのであれば，$z$ 変換を用いれば良い．まず $P_k(x)$ $(k = 0, 1, \ldots)$ の $z$ 変換 $P(x, z)$ を次式で定義する．

$$P(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x) z^k$$

式 (16) ならびに式 (17) の両辺に $z^k$ をかけたものの両辺を、それぞれ $k = 0$ から $\infty$ まで総和をとると

$$\frac{\partial}{\partial x}P(x, z) = -\lambda\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)z^k + \lambda\sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}(x)z^k = -\lambda P(x, z) + \lambda z\sum_{k'=0}^{\infty} P_{k'}(x)z^{k'} = \lambda(z - 1)P(x, z)$$

を得る．よって，形式解は

$$P(x, z) = A\exp[\lambda(z - 1)x]$$

であり，$\lim_{x\to 0} P(x, 0) = \lim_{x\to 0} P_0(x) = 1$ に留意すると $A = 1$ を得る．以上より，

$$P(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x)z^k = \exp[\lambda(z - 1)x] = e^{-\lambda x}e^{\lambda xz} = e^{-\lambda x}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\cdot z^k$$

となり，両辺の $z^k$ の係数を比較することにより

$$P_k(x) = e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

を得る．

**定理 6 (ポワソン過程，指数分布到着間隔，一定到着率の仮定の等価性)** 客の到着がポワソン過程に従うこと，到着間隔が独立同一な指数分布に従うこと，ならびに客の到着が一定到着率の仮定に従うことは等価である．

#### 2.3.5 ポワソン過程の重畳と分岐

率 $\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ をもつ $N$ 個の独立なポワソン過程を重ね合わせた到着過程を考える（図 5 参照）．

重ね合わせた到着流における到着間隔を $X$ としたとき，$X > x$ となる確率は時間区間 $(0, x]$ の間に客が到着しない確率に等しく，後者はいずれの到着流からも客が到着しない確率に等しいため

$$\Pr(X > x) = \prod_{i=1}^{N} e^{-\lambda_i x} = \exp\left[-\left(\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\right)x\right]$$

となり，到着間隔 $X$ はパラメタ $\lambda=\lambda_1+\cdots+\lambda_N$ の指数分布に従うことが分かる．さらに到着間隔 $X$ が $x$ であったという条件の下で，その到着が $j$ 番目の到着流から到着した客である確率 $d_j$ は

$$\begin{aligned} d_j &= \lim_{\Delta x\to 0}\Pr(j\,\text{番目からの到着}\mid x<X\le x+\Delta x) \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Pr(\text{時間区間}\,(x,x+\Delta x]\,\text{に}\,j\,\text{番目からの到着})}{\Pr(x<X\le x+\Delta x)} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\exp(-\lambda x)(\lambda_j\Delta x+o(\Delta x))}{\exp(-\lambda x)(\lambda\Delta x+o(\Delta x))}=\frac{\lambda_j}{\lambda} \end{aligned}$$

となり，到着間隔 $X$ とは独立に平均到着率の割合で与えられる．

**定理 7 (独立なポワソン過程の重畳)** $N$ 個の独立な率 $\lambda_i$ $(i=1,\ldots,N)$ をもつポワソン過程を重ね合わせた到着過程は率 $\lambda=\lambda_1+\cdots+\lambda_N$ のポワソン過程となる．また，到着があったという条件の下で，その到着が $j$ 番目の到着流からの客である確率は到着間隔とは独立に $\lambda_j/\lambda$ で与えられる．

次に，率 $\lambda$ でポワソン到着する客を，それぞれ独立に確率 $p_i$ $(i=1,2,\ldots,N)$ で $i$ 番目の支流へ割り当てることを考える．$A_i(0,t]$（$i=1,2,\ldots,N$）を時間区間 $(0,t]$ の間に支流 $i$ に到着した客数とする．個々の客は独立に確率 $p_i$ で支流 $i$ に割り当てられるので $p_1+p_2+\cdots+p_N=1$，すなわち，

$$e^{-\lambda t}=e^{-\lambda(p_1+p_2+\cdots+p_N)t}=e^{-\lambda p_1 t}\cdot e^{-\lambda p_2 t}\cdot\cdots\cdot e^{-\lambda p_N t}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned} \Pr(A_i(0,t]=n_i,i=1,2,\ldots,N) &= \Pr(A(0,t]=n_1+n_2+\cdots+n_N) \\ &\qquad\cdot\Pr(A_i(0,t]=n_i,i=1,2,\ldots,N\mid A(0,t]=n_1+n_2+\cdots+n_N) \\ &= e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n_1+n_2+\cdots+n_N}}{(n_1+n_2+\cdots+n_N)!}\cdot\frac{(n_1+n_2+\cdots+n_N)!}{n_1!n_2!\cdots n_N!}p_1^{n_1}p_2^{n_2}\cdots p_N^{n_N} \\ &= e^{-\lambda t}\cdot\frac{(\lambda p_1 t)^{n_1}}{n_1!}\cdot\frac{(\lambda p_2 t)^{n_2}}{n_2!}\cdot\cdots\cdot\frac{(\lambda p_N t)^{n_N}}{n_N!} \\ &= e^{-\lambda p_1 t}\frac{(\lambda p_1 t)^{n_1}}{n_1!}\cdot e^{-\lambda p_2 t}\frac{(\lambda p_2 t)^{n_2}}{n_2!}\cdot\cdots\cdot e^{-\lambda p_N t}\frac{(\lambda p_N t)^{n_N}}{n_N!} \\ &= \Pr(A_1(0,t]=n_1)\Pr(A_2(0,t]=n_2)\cdots\Pr(A_N(0,t]=n_N) \end{aligned}$$

を得る．

**定理 8 (ポワソン過程の分岐)** 率 $\lambda$ でポワソン到着する客をそれぞれ独立に確率 $p_i$ $(i=1,\ldots,N)$ で $i$ 番目の支流へ割り当てたとき，$i$ 番目の支流は他の支流とは独立な率 $p_i\lambda$ のポワソン過程となる．

### 2.3.6 ポワソン到着する客が見るシステムの状態 (Cooper 1981)

最後に，率 $\lambda$ でポワソン到着する客の見るシステムの状態を考える．$Q(t)$ を時刻 $t$ における系内客数とする．また，$P(t)$ を時刻 $t$ の直後に客が到着したという条件の下での，時刻 $t$ における系内客数とする．すなわち $P(t)$ は到着した客が見るシステムの状態である．ここで $C(x,y]$ を時間区間 $(x,y]$ に客が到着する事象とすると

$$\Pr(P(t)=k)=\lim_{\Delta t\to 0}\Pr(Q(t)=k\mid C(t,t+\Delta t])$$

である．よって

$$\begin{aligned} \Pr(P(t)=k) &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Pr(Q(t)=k,C(t,t+\Delta t])}{\Pr(C(t,t+\Delta t])} \\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Pr(C(t,t+\Delta t]\mid Q(t)=k)\Pr(Q(t)=k)}{\Pr(C(t,t+\Delta t])} \end{aligned} \tag{18}$$

を得る．ここまでは到着に関して特に何も仮定していないことに注意する．

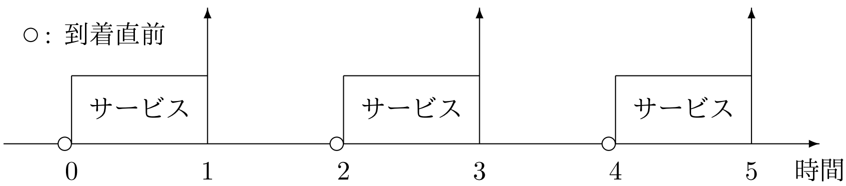



図 6: $D/D/1$ における客数の変化

時刻 $t$ におけるシステムの状態 $Q(t)$ は時刻 $t$ 以前の到着のみによって定まる．一方，客の到着はポワソン過程に従うため，時刻 $t$ 以降の到着はそれ以前の到着とは独立である．よって，ポワソン到着の場合，システムの状態とは独立に到着がおこるため

$$\Pr(C(t, t+\Delta t] \mid Q(t)=k) = \Pr(C(t, t+\Delta t]) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

である．これを式 (18) に代入すると次式を得る．

$$\Pr(P(t)=k) = \Pr(Q(t)=k)$$

**定理 9 (ポワソン到着する客が見るシステムの状態)** ポワソン到着する客が見るシステムの状態 $P(t)$ は外部観察者が見るシステムの状態 $Q(t)$ に等しい．特に，システムが**定常状態**（steady state）にある，すなわち $\Pr(Q(t)=k)$ が時刻 $t$ に依存しない場合，ポワソン到着する客は定常状態を見る．

この結果は，ポワソン到着以外の場合は必ずしも成り立たないことに注意する．例として図 6 に到着間隔 2 秒，サービス時間 1 秒の $D/D/1$ （一定の到着間隔と一定のサービス時間を持つ単一サーバ待ち行列）に系内客数の変化を示す．最初の客がシステムに到着する時刻を 0 とすると，$(2t, 2t+1]$ （$t=0,1,2,\ldots$）の間はサービス中であり，$(2t+1, 2t+2]$ （$t=0,1,2,\ldots$）の間はシステムは空である．よって，図に示されているように外部観察者は全時間の 1/2 の間，稼働中のシステムと見るが，到着する客は常に空のシステムを見る．このように，一般には，到着する客の見るシステムの状態は外部観察者が見るシステムの状態と異なる．

## 演習問題

### ２章の授業内容確認

**問 2.1　リトルの公式**

平均系内滞在時間を $W$，平均系内客数を $L$，平均到着率を $\lambda$ とする．

(1) $W$, $L$, $\lambda$ の間に成立する関係式を示せ（証明は不要）．
(2) 安定な $G/G/c$ 待ち行列を考える．客の平均サービス時間を $b$ としたとき，サービス中の平均客数を求めよ．
(3) 安定な $G/G/1$ 待ち行列を考える．客の平均サービス時間を $b$ としたとき，客がサービス中である確率を求めよ．

**問 2.2　ポワソン過程の定義**

以下の問いに答えよ．

(1) 時間区間 $[y, y+x]$ の間に到着する客数に注目して率 $\lambda$ のポワソン過程を定義せよ．
(2) 連続する到着間隔 $X_n$（$n=1,2,\ldots$）に注目して率 $\lambda$ のポワソン過程を定義せよ．
(3) 微少な時間区間 $(t, t+\Delta t]$ に起こる事象に注目して率 $\lambda$ のポワソン過程を定義せよ．

**問 2.3　指数分布の無記憶性**

以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数 $X$ がどのような性質をもてば無記憶性をもつと言われるか述べよ．
(2) 指数分布が無記憶性を持つことを示せ．

**問 2.4　ポワソン過程の性質**

独立増分である到着過程を考える．

(1) 長さ $t$ の時間間隔の間に到着する客数が平均 $\lambda t$ のポワソン分布に従うとき，到着間隔の分布関数を導け．
(2) 到着間隔がパラメタ $\lambda$ の指数分布に従うとき，一定の到着率の仮定が満たされることを示せ．
(3) 一定の到着率の仮定（率 $\lambda$）が満たされるとき，長さ $t$ の間に到着する客数 $A(t)$ の確率関数 $\Pr(A(t)=k)$ を求めよ．

**問 2.5　ポワソン過程の重畳と分岐**

以下の問いに答えよ．

(1) $N$ 個の独立な率 $\lambda_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ をもつポワソン過程を重ね合わせた到着過程（重畳過程）が率 $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_N$ のポワソン過程となることを示せ．
(2) さらに，重畳過程において到着があったという条件の下で，その到着が $j$ 番目の到着流からの客である確率は到着間隔とは独立に $\lambda_j/\lambda$ で与えられることを示せ．
(3) 率 $\lambda$ でポワソン到着する客をそれぞれ独立に確率 $p_i$ $(i = 1, \ldots, N)$ で $i$ 番目の支流へ割り当てたとき，$i$ 番目の支流は他の支流とは独立な率 $p_i\lambda$ のポワソン過程となることを示せ．

## 練習問題

**問 2.6**
非負整数値をとる確率変数 $X$ の平均は $E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X > k)$ で与えられることを示せ．

**問 2.7**
非負確率変数 $X$ の平均は $E[X] = \int_0^{\infty} \Pr(X > x)dx$ で与えられることを示せ．ただし，$X$ の密度関数が存在すると仮定して良い．

**問 2.8**
$X_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ を独立で同一な分布に従う確率変数とする．$F(x) = \Pr(X_n \le x)$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ としたとき，
(1) $X_{\max} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ の分布関数を $F(x)$ を用いて示せ．
(2) $X_{\min} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ の分布関数を $F(x)$ を用いて示せ．

**問 2.9**
$X_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ を独立で同一なパラメタ $\mu$ の指数分布に従う確率変数とする．$X_{\max} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N)$，$X_{\min} = \min(X_1, X_2, \ldots, X_N)$ としたとき，$Y = X_{\max} - X_{\min}$ の分布関数を求めよ．

**問 2.10**
$X_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ をパラメタ $\mu_j$ をもつ指数分布に従う互いに独立な確率変数とする．このとき $\Pr(X_j < X_i \text{ for all } i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n)$ を求めよ．

**問 2.11**
$N$ 個 $(N \ge 2)$ のジョブを 2 台の機械 1, 2 を用いて処理する状況を想定する．機械 $i$ $(i = 1, 2)$ が 1 ジョブを処理するために必要な時間はパラメタ $\mu_i$ の指数分布に従うと仮定する．時刻 0 においてこれら 2 台の機械がそれぞれ一つのジョブの処理を開始し，処理が終了した時点で未処理のジョブが残っていれば，その内の一つのジョブの処理を直ちに開始する．機械 1 が先に停止する（機械 1 があるジョブの処理を終了した際，未処理ジョブが残っておらず，機械 2 はジョブを処理中である）確率を求めよ．

**問 2.12**
$\{X_i\}$ を独立同一な分布に従うベルヌーイ（Bernoulli）確率変数列（$\Pr(X_i = 1) = p$, $\Pr(X_i = 0) = 1 - p$）とする．$N$ が平均 $\lambda$ をもつポワソン分布に従うとき，$S_N = \sum_{i=1}^{N} X_i$ は平均 $p\lambda$ をもつポワソン分布に従うことを示せ．

# 3 出生死滅過程と待ち行列

この節では出生死滅過程と呼ばれる確率過程の定常状態確率分布の計算法ならびに待ち行列モデルへの応用を紹介する．

## 3.1 出生死滅過程

最初に出生死滅過程の定義を与える．

**定義 10 (出生死滅過程)** 時刻 $t$ における系内客数 $L(t)$ の挙動が以下の仮定を満たすとき，$L(t)$ は出生死滅過程 (birth and death process) と呼ばれる．

$$\Pr(L(t + \Delta t) = j \mid L(t) = i) = \begin{cases} \lambda_i \Delta t + o(\Delta t), & j = i + 1 \ge 1 \\ \mu_i \Delta t + o(\Delta t), & j = i - 1 \ge 0 \\ o(\Delta t), & |j - i| \ge 2 \end{cases} \tag{19}$$

ただし，全ての $i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ に対して $\lambda_i \ge 0$，また，全ての $i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ に対して $\mu_i \ge 0$ である．

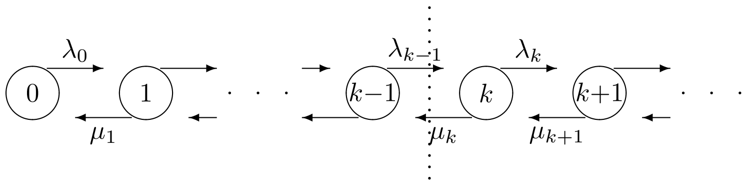



図 7: 出生死滅過程の状態遷移速度図

定義より，出生死滅過程 $L(t)$ は非負の整数値を取り，十分に小さな時間区間においてはその値は高々 1 しか増減しない．また，式 (19) ならびに確率の和が 1 であることから

$$\Pr(L(t+\Delta t) = i \mid L(t) = i) = \begin{cases} 1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t), & i = 0 \\ 1 - (\lambda_i + \mu_i)\Delta t + o(\Delta t), & i \geq 1 \end{cases}$$

が成立する．図 7 に出生死滅過程の状態遷移速度図を示す．

**例 11** 率 $\lambda$ のポワソン過程において時間区間 $(0, t]$ の間に到着する客数を $L(t)$ とすると，一定到着率の仮定より，$L(t)$ は $\lambda_i = \lambda$ $(i = 0, 1, \ldots)$，$\mu_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ で特徴付けられる出生死滅過程の特別な場合であることが分かる．特に $\mu_i = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ であるような出生死滅過程は**純出生過程**（pure birth process）とも呼ばれる．

$r_i(t)$ を時刻 0 において状態 $i$ にいるという条件の下で，時間間隔 $(0, t]$ の間状態 $i$ から一度も他の状態に遷移しない確率とする．定義より $r_i(0) = 1$ である．すなわち $r_i(t) = \Pr(L(\tau) = i, 0 \leq \tau \leq t \mid L(0) = i)$ である．このとき

$$\begin{aligned} r_i(t+\Delta t) &= r_i(t) \Pr(L(t+x) = i, 0 \leq x \leq \Delta t \mid L(\tau) = i, 0 \leq \tau \leq t) \\ &= r_i(t) \Pr(L(t+x) = i, 0 \leq x \leq \Delta t \mid L(t) = i) \end{aligned}$$

となるので，$i \geq 1$ の場合，

$$r_i(t+\Delta t) = r_i(t)(1 - (\lambda_i + \mu_i)\Delta t + o(\Delta t))$$

を得る．同様に $i = 0$ の場合は

$$r_0(t+\Delta t) = r_0(t)(1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t))$$

となる．さらに右辺の $r_i(t)$ を左辺に移項し，両辺を $\Delta t$ で割り，$\Delta t \to 0$ の極限を考えると，$r_i(t)$ は以下の微分方程式を満たすことがわかる．

$$\frac{d}{dt} r_0(t) = -\lambda_0 r_0(t), \qquad \frac{d}{dt} r_i(t) = -(\lambda_i + \mu_i) r_i(t) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

$r_i(0) = 1$ $(i = 0, 1, \ldots)$ に注意し，この微分方程式を解くと

$$r_0(t) = \exp(-\lambda_0 t), \qquad r_i(t) = \exp(-(\lambda_i + \mu_i)t) \quad (i = 1, 2, \ldots)$$

を得る．この結果より，出生死滅過程 $L(t)$ が各状態に留まる時間間隔は状態に依存したパラメタをもつ指数分布に従うことをが分かる．

時刻 $t$ において出生死滅過程 $L(t)$ が $k$ である確率を $p_k(t) = \Pr(L(t) = k)$ とする．時間区間 $(t, t+\Delta t]$ の間に起こる事象を考えると $p_k(t+\Delta t)$ は

$$\begin{aligned} p_0(t+\Delta t) &= p_0(t)(1 - \lambda_0 \Delta t) + p_1(t)\mu_1 \Delta t + o(\Delta t) \\ p_k(t+\Delta t) &= p_{k-1}(t)\lambda_{k-1}\Delta t + p_k(t)(1 - \lambda_k \Delta t - \mu_k \Delta t) + p_{k+1}(t)\mu_{k+1}\Delta t + o(\Delta t), \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

を満たすことがわかる．これらの式に対して $r_i(t)$ の導出と同様の計算を行うと $p_k(t)$ が満たす微分差分方程式が得られる．

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_0(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \\ \frac{d}{dt} p_k(t) &= \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

以下では，システムが**定常**（stationary）であると仮定する．すなわち，$p_k(t)$ は時間に依存しないとする．このとき $p_k(t)$ の時間に関する微分値は 0 になるので，$p_k(t) = p_k$ とすると

$$
\begin{aligned}
0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1 \\
0 &= \lambda_{k-1} p_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) p_k + \mu_{k+1} p_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots
\end{aligned}
$$

となり，これらを変形すると

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1 \tag{20}$$

$$(\lambda_k + \mu_k) p_k = \lambda_{k-1} p_{k-1} + \mu_{k+1} p_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{21}$$

を得る．式 (20)，(21) の左辺は注目する状態から出ていく確率フローの量，右辺は注目する状態へ入る確率フローの量となっていることに注意する．一般に，定常状態においては，ある状態から出ていく確率フローの量はその状態へ入る確率フローの量に等しい．このような観察から，式 (20)，(21) を（状態 $k$ に対する）**平衡方程式**（balance equation）という．

さて，式 (20) ならびに (21) における $k = 1, \ldots, n-1$ を，辺々，足しあわせ，改めて $n = k$ とおくと

$$\lambda_{k-1} p_{k-1} = \mu_k p_k, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{22}$$

を得る．式 (22) の右辺は状態集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ から出ていく確率フローの総和であり，左辺は状態集合 $\{0, 1, \ldots, n-1\}$ へ入る確率フローの総和である．一般に，定常状態においては，ある状態集合から出ていく確率フローの総和はその状態へ入る確率フローの総和に等しい．特に，出生死滅過程の場合，状態遷移が隣り合う状態間でしか起こらないため，式 (22) の左辺 $\lambda_{k-1} p_{k-1}$ は客数が $k-1$ から $k$ になる確率フローの量となり，右辺 $\mu_k p_k$ は客数が $k$ から $k-1$ になる確率フローの量となる．すなわち，出生死滅過程の場合，$k-1$ と $k$ の間を行きかう確率フローの量は定常状態では等しい（図 7 参照）．

さて，式 (22) より

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k} p_{k-1} = \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1}\cdots\mu_1} p_0, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{23}$$

を得る．確率の総和は 1 なので，

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1}\cdots\mu_1} p_0 = 1$$

を満たさなければならない．よって，未知の確率 $p_0$ は次式で与えられる．

$$p_0 = \left[ 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdots\lambda_0}{\mu_k \mu_{k-1}\cdots\mu_1} \right]^{-1} \tag{24}$$

定常状態が存在するための条件は式 (24) の右辺に現れる無限和が有限の値に収束することである．以上をまとめて次の定理を得る．

**定理 12 (出生死滅過程の定常状態確率)** 定義 10 で与えられる出生死滅過程は式 (24) の右辺が有限の値に収束するとき定常状態確率をもち，それらは式 (23) ならびに式 (24) で与えられる．

### 3.2 待ち行列モデルへの応用

この節では，客の到着が率 $\lambda$ のポワソン過程に従い，サービス時間がパラメタ $\mu$ の指数分布に従う様々な待ち行列モデルを考える．ただしサーバは系内に客がいる限り常にサービスを行うものとする．ポワソン到着をもつ待ち行列では，ポワソン到着の率 $\lambda$ を到着率と呼ぶ．また，サービス時間が指数分布に従う場合，そのパラメタ

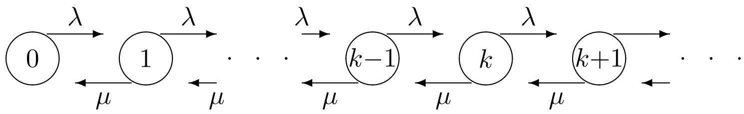



図 8: $M/M/1$ の状態遷移速度図

$\mu$ をサービス率と呼ぶ．以下に見るように，このような待ち行列モデルにおける系内客数 $L(t)$ は出生死滅過程となるため，前節の結果を用いて定常状態における系内客数分布を得ることができる．なお，定常状態をもつ待ち行列モデルは**安定**（stable）であるといわれる．以下では

$$\rho = \lambda/\mu$$

とする．

#### 3.2.1 $M/M/1$

まず初めに，単一サーバ待ち行列 $M/M/1$ を考える．

**例 13** 十分に大きなバッファをもつルータがあり，出力回線の容量は $C$ bps であるとする．パケットの到着が率 $\lambda$ のポワソン過程に従い，パケット長は平均 $T$ バイトの指数分布に従うとする．このとき，ルータ内のパケット数の振舞いは，到着率 $\lambda$，サービス率 $\mu = C/(8T)$ をもつ $M/M/1$ でモデル化できる．

到着はポワソン過程に従うので，一定到着率の仮定より

$$\Pr(L(t+\Delta t) = 1 \mid L(t) = 0) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

である．また，サービス時間は指数分布に従うので $k = 1, 2, \ldots$ に対しても

$$\begin{aligned}\Pr(L(t+\Delta t) = k+1 \mid L(t) = k) &= (\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \\ &= \lambda\Delta t + o(\Delta t)\end{aligned}$$

となる．なお，一つ目の等号の右辺の最後にある $o(\Delta t)$ は $(t, t+\Delta t]$ の間に二つ以上の到着がある場合に対応している[8]．一方，客数が減少する場合は $k = 1, 2, \ldots$ に対しても同様に

$$\begin{aligned}\Pr(L(t+\Delta t) = k-1 \mid L(t) = k) &= (\mu\Delta t + o(\Delta t))(1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t) \\ &= \mu\Delta t + o(\Delta t)\end{aligned}$$

となる．$(t, t+\Delta t]$ の間に 2 人以上客が増加あるいは減少する確率は一定到着率の仮定より $o(\Delta t)$ である．確率の総和は 1 であるため，結果として，

$$\Pr(L(t+\Delta t) = k \mid L(t) = k) = \begin{cases} 1 - \lambda\Delta t + o(\Delta t), & k = 0 \\ 1 - (\lambda+\mu)\Delta t + o(\Delta t), & k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

となる．

以上の考察により $M/M/1$ の系内客数 $L(t)$ は $\lambda_k = \lambda$ （$k = 0, 1, \ldots$），$\mu_k = \mu$（$k = 1, 2, \ldots$）の出生死滅過程となることがわかる．図 8 に $M/M/1$ の状態遷移速度図を示す．

[8] このとき，$(t, t+\Delta t]$ の間に到着数より一人少ない数の客に対するサービスも終了する．

以上より，定理 12 が適用できることが分かるが，ここでは出生死滅過程の最も簡単な例である $M/M/1$ の客数過程に対して定理 12 の導出手順をなぞることで定常解の導出手法に対する理解を深める．まず，状態 $k$（$k = 0, 1, \ldots$）に注目し，式 (20)，(21) に対応する平衡方程式を書き下すと

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 \\ (\lambda + \mu) p_k &= \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

を得る．$k = 0, 1, \ldots, n-1$ について辺々，足し合わせた後，改めて $n = k$ とおくと

$$\lambda p_{k-1} = \mu p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

を得る．すなわち

$$p_k = \frac{\lambda}{\mu} p_{k-1} = \rho p_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

が全ての $k$（$k = 1, 2, \ldots$）に対して成立する．よって

$$p_k = \rho p_{k-1} = \rho^2 p_{k-2} = \cdots = \rho^k p_0 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

を得る．上式は $k = 0$ の場合も成立することに注意する．確率の総和は 1 であるので

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k p_0 = 1$$

が成立する必要がある．よって，定常状態確率が存在するためには $\rho < 1$ である必要があり，このとき

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho^k p_0 = \frac{p_0}{1 - \rho} = 1$$

より，$p_0 = 1 - \rho$ を得る．

以上の議論より，$\rho < 1$ のとき定常状態確率 $p_k$ が存在し，それは

$$p_k = (1 - \rho) \rho^k, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{25}$$

で与えられることが分かる．$E[L]$ を定常状態における平均系内客数とすると式 (25) より

$$E[L] = \sum_{k=1}^{\infty} k p_k = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

を得る．さらにリトルの公式を用いると平均系内滞在時間 $E[W]$ は

$$E[W] = E[L]/\lambda = \frac{1/\mu}{1 - \rho}$$

となる．利用率 $\rho$ に対する平均系内客数 $E[L]$ の変化を図 9 に示す．平均系内客数は利用率 $\rho$ に対して非線形であり，$\rho$ が 1 に近付くと急激に増加することに注意する．これは単一サーバ待ち行列に典型的に見られる性質である．

#### 3.2.2 $M/M/1/K$

システム容量が $K$ 人である単一サーバ待ち行列 $M/M/1/K$ を考える．すなわち，客が到着した時点で系内客数が $K$ 人であれば，到着した客はシステムにはいることができず，棄却される．待ち行列理論ではこのように到着客が棄却されることを**呼損**（loss）[9]という．例 13 において，ルータのバッファが高々 $K$ パケットしか保持できないと仮定すれば，そのようなルータの振舞いは $M/M/1/K$ でモデル化できる．

[9]呼とは電話を接続する際の制御信号を指す call の訳語である．呼損という言葉を習慣的に用いているのは待ち行列理論が電話網の設計理論として発展してきた証でもある．

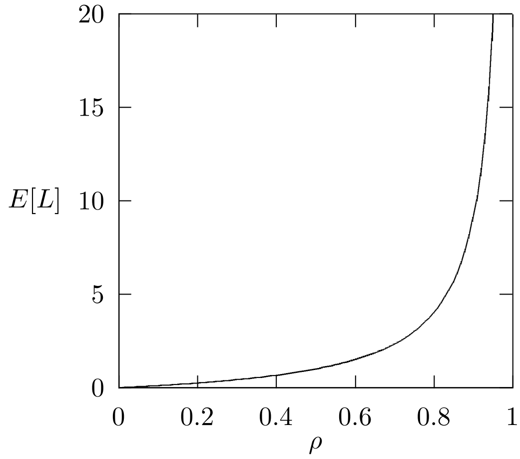



図 9: $M/M/1$ の平均系内客数 ($\mu = 1$)

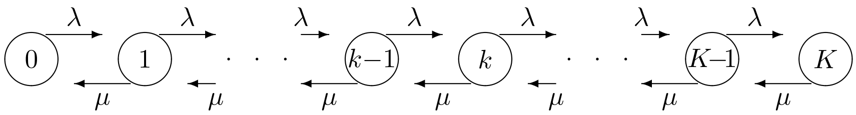



図 10: $M/M/1/K$ の状態遷移速度図

システムの容量が $K$ であるため系内客数が $K+1$ 以上にならないという事実は，状態 $K$ における出生率（状態 $K$ から状態 $K+1$ への遷移率）を 0 とおくことで表現される．すなわち，この待ち行列の系内客数 $L(t)$ は $\lambda_k = \lambda$（$k = 0, \ldots, K-1$），$\lambda_k = 0$（$k = K, K+1, \ldots$），$\mu_k = \mu$（$k = 1, 2 \ldots$）の出生死滅過程となる．図 10 に $M/M/1/K$ の状態遷移速度図を示す．

状態 $k$ に注目し平衡方程式を書き下すと次式を得る．

$$\begin{aligned}
\lambda p_0 &= \mu p_1 \\
(\lambda + \mu) p_k &= \lambda p_{k-1} + \mu p_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, K-1 \\
\mu p_K &= \lambda p_{K-1}
\end{aligned}$$

を得る．$k = 0, 1, \ldots, n-1$（$n \leq K$）について辺々，足し合わせた後，改めて $n = k$ とおくと

$$\lambda p_{k-1} = \mu p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

を得る．すなわち

$$p_k = \frac{\lambda}{\mu} p_{k-1} = \rho p_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

が全ての $k$（$k = 1, 2, \ldots, K$）に対して成立する．よって

$$p_k = \rho p_{k-1} = \rho^2 p_{k-2} = \cdots = \rho^k p_0 \qquad k = 1, 2, \ldots, K$$

を得る．上式は $k = 0$ の場合も成立することに注意する．確率の総和は 1 であるので

$$1 = \sum_{k=0}^{K} p_k = \sum_{k=0}^{K} \rho^k p_0 = \begin{cases} \dfrac{1 - \rho^{K+1}}{1 - \rho} p_0, & \rho \neq 1 \\ (K+1) p_0 & \rho = 1 \end{cases}$$

が成立する．よって，$p_0$ は

$$p_0 = \begin{cases} \dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{K+1}, & \rho = 1 \end{cases}$$

で与えられ，$M/M/1/K$ は常に安定である．さらに系内客数の定常状態確率 $p_k$ は

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{(1-\rho)\rho^k}{1-\rho^{K+1}}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{1}{K+1}, & \rho = 1 \end{cases}, \qquad k = 0, 1, \ldots, K \tag{26}$$

で与えられる．この例から明らかなように，状態数が有限である出生死滅過程は常に定常状態が存在する．

システムの容量が有限であるモデルでは，特に，到着した客の内，システムに入ることができず失われてしまう確率，すなわち，**呼損率**（loss probability）に興味がある．例 13 のように客がパケットに対応している場合，呼損が起こる確率はパケット損確率あるいはパケット棄却率と呼ばれる．到着した客が失われる確率は，到着時に系内客数が $K$ 人である確率に等しい．$M/M/1/K$ における客の到着はポワソン過程に従っているため，2.3.6 節の結果より，到着時に $k$ 人いる確率は，定常状態確率 $p_k$ に等しくなる．よって $M/M/1/K$ の呼損率は $p_K$ で与えられる．

$M/M/1/K$ は $M/M/1$ におけるシステムの容量を $K$ に制限したモデルである．そこで，$\rho < 1$ のとき，$M/M/1$ と $M/M/1/K$ の間にどのような関係があるかを見ておく．$L^{(\infty)}_{M/M/1}$ ならびに $L^{(K)}_{M/M/1}$ をそれぞれ，$M/M/1$ ならびにそれに対応する $M/M/1/K$ の定常状態における系内客数とする．$\rho < 1$ の場合について，式 (25) と (26) を比較することにより，定数 $C = 1 - \rho^{K+1}$ に対して

$$\Pr\left(L^{(K)}_{M/M/1} = k\right) = \frac{\Pr\left(L^{(\infty)}_{M/M/1} = k\right)}{C}, \qquad k = 0, 1, \ldots, K$$

となっていることが分かる．定数 $C$ は $M/M/1/K$ における定常確率の和が 1 であることから決定され

$$C = \sum_{k=0}^{K} \Pr\left(L^{(\infty)}_{M/M/1} = K\right) = \Pr\left(L^{(\infty)}_{M/M/1} \leq K\right)$$

で与えられる．よって次式を得る．

$$\Pr\left(L^{(K)}_{M/M/1} = k\right) = \frac{\Pr\left(L^{(\infty)}_{M/M/1} = k\right)}{\Pr\left(L^{(\infty)}_{M/M/1} \leq K\right)} = \Pr\left(L^{(\infty)}_{M/M/1} = k \;\middle|\; L^{(\infty)}_{M/M/1} \leq K\right), \qquad k = 0, 1, \ldots, K$$

すなわち，$\rho < 1$ の場合，$M/M/1/K$ の定常状態確率は，対応する $M/M/1$ の定常状態確率の系内客数が $K$ 人以下という条件下での系内客数分布に等しい．

### 3.2.3 $M/M/c$

$c$ 個のサーバをもつ待ち行列 $M/M/c$ を考える．複数サーバ待ち行列は複数の CPU をもつコンピュータや通信ネットワークにおいて考察する送受信端末間に複数の経路が存在するような場合に適用できる．

$M/M/1$ の場合と同様に，ポワソン到着の仮定より

$$\Pr(L(t+\Delta t) = 1 \mid L(t) = 0) = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

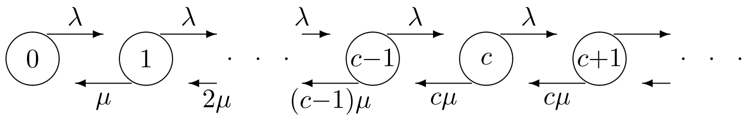



図 11: $M/M/c$ の状態遷移速度図

である．また，サービス時間は指数分布に従うので $k = 1, 2, \ldots$ に対しても

$$\Pr(L(t+\Delta t) = k+1 \mid L(t) = k) = (\lambda\Delta t + o(\Delta t))(1-\mu\Delta t + o(\Delta t))^{f(k)} + o(\Delta t) = \lambda\Delta t + o(\Delta t)$$

となる．ただし $f(k)$ はシステム内客数が $k$ 人であるときのサービス中の人数を表す．

$$f(k) = \min(k, c)$$

一方，客数が減少する場合は

$$\begin{aligned}\Pr(L(t+\Delta t) = k-1 \mid L(t) = k) &= f(k)(\mu\Delta t + o(\Delta t))(1-\mu\Delta t + o(\Delta t))^{f(k)-1}(1-\lambda\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)\\ &= f(k)\mu\Delta t + o(\Delta t), \quad k = 1, 2, \ldots\end{aligned}$$

を満たす．$(t, t+\Delta t]$ の間に 2 人以上客が増加あるいは減少する確率は一定到着率の仮定より $o(\Delta t)$ なので，$M/M/c$ の系内客数 $L(t)$ は $\lambda_k = \lambda$（$k = 0, 1, \ldots$），$\mu_k = f(k)\mu$（$k = 1, 2, \ldots$）の出生死滅過程となることがわかる．図 11 に $M/M/c$ の状態遷移速度図を示す．

図 11 より，状態 $k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ に対する平衡方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\lambda p_0 &= \mu p_1\\ (\lambda+\mu)p_1 &= \lambda p_0 + 2\mu p_2\\ (\lambda+2\mu)p_2 &= \lambda p_1 + 3\mu p_3\\ &\vdots\\ (\lambda+(c-2)\mu)p_{c-2} &= \lambda p_{c-3} + (c-1)\mu p_{c-1}\\ (\lambda+(c-1)\mu)p_{c-1} &= \lambda p_{c-2} + c\mu p_c\\ (\lambda+c\mu)p_k &= \lambda p_{k-1} + c\mu p_{k+1}, \qquad k = c, c+1, \ldots\end{aligned}$$

$k = 0, 1, \ldots, n-1$ について辺々，足し合わせた後，整理すると

$$\begin{aligned}n = 1: &\quad \lambda p_0 = \mu p_1\\ n = 2: &\quad \lambda p_1 = 2\mu p_2\\ n = 3: &\quad \lambda p_2 = 3\mu p_3\\ &\quad\vdots\\ n = c-2: &\quad \lambda p_{c-3} = (c-2)\mu p_{c-2}\\ n = c-1: &\quad \lambda p_{c-2} = (c-1)\mu p_{c-1}\\ n \geq c: &\quad \lambda p_{n-1} = c\mu p_n, \qquad n = c, c+1, \ldots\end{aligned}$$

を得る．すなわち

$$p_k = \frac{\lambda}{f(k)\mu}p_{k-1} = \frac{\rho}{f(k)}p_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

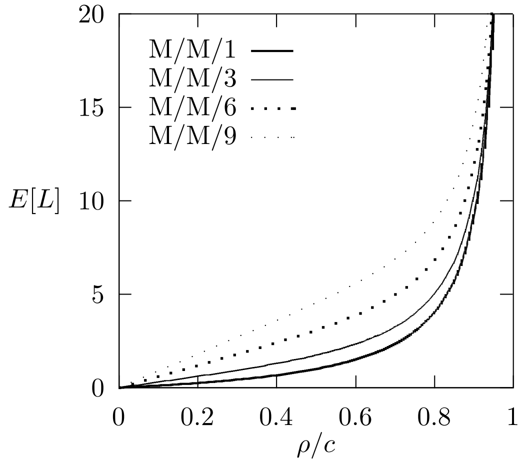



図 12: $M/M/c$ の平均系内客数

が全ての $k$（$k=1,2,\ldots$）に対して成立する．よって

$$p_k = \frac{\rho}{f(k)} p_{k-1} = \frac{\rho^2}{f(k)f(k-1)} p_{k-2} = \cdots = \frac{\rho^k}{\displaystyle\prod_{l=1}^{k} f(l)} p_0 = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} p_0, & k=1,2,\ldots,c-1, \\ \dfrac{\rho^k}{c!c^{k-c}} p_0, & k=c,c+1,\ldots, \end{cases}$$

を得る．確率の総和は 1 であるので

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = p_0 + \sum_{k=1}^{c-1} \frac{\rho^k}{k!} p_0 + \sum_{k=c}^{\infty} \frac{\rho^k}{c!c^{k-c}} p_0 = \sum_{k=0}^{c-1} \frac{\rho^k}{k!} p_0 + \sum_{k=c}^{\infty} \frac{\rho^k}{c!c^{k-c}} p_0 = 1$$

が成立する必要がある．よって，定常状態確率が存在するためには $\rho/c < 1$ である必要があり，このとき定常状態における系内客数分布 $p_k$ は次式で与えられる．

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{c-1} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)} \right]^{-1}$$

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{\rho^k}{k!} p_0, & k=0,\ldots,c-1 \\ \dfrac{\rho^k}{c!c^{k-c}} p_0, & k=c,c+1,\ldots \end{cases} \tag{27}$$

さらに平均系内客数 $E[L]$ は

$$E[L] = p_0 \left[ \sum_{k=1}^{c-1} \frac{\rho^k}{(k-1)!} + \frac{\rho^c}{(c-1)!(c-\rho)^2} \{c^2 - (c-1)\rho\} \right]$$

となり，平均系内滞在時間 $E[W]$ はリトルの公式より $E[W] = E[L]/\lambda$ で与えられる．

図 12 はシステムの能力を表すサーバ数 $c$ で利用率 $\rho$ を正規化したときの $M/M/c$ の平均系内客数 $E[L]$ を示したものである．$\rho/c$ が等しい場合，サーバ一人当たりにかかる負荷はサーバ数に関わらず等しいことに注意する．$c$ 個のサーバがある場合，系内客数が $c$ 人以上であるときは全てのサーバが稼働するが，$c-1$ 人以下の場合，系内に客がいるにも拘らずサービスを行っていないサーバが存在する．結果として，システムの総能力を常時発揮することができないため性能が劣化する．言い替えれば $c$ 個のサーバを用意するより，$c$ 倍の能力をもつ一つのサーバを用意する方が能率的であることを示している．

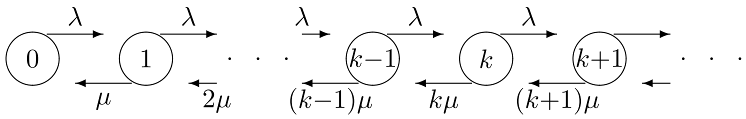



図 13: $M/M/\infty$ の状態遷移速度図

#### 3.2.4　$M/M/\infty$

無限個のサーバをもつ待ち行列 $M/M/\infty$ を考える．サーバ数が無限であるので，到着した客は待たされることなく直ちにサービスを受けることができる．無限サーバ待ち行列は十分に多くのサーバが用意されており，到着客が待たされることがほとんどない場合のモデルである．また，このような状況では，システム内での客の振舞いが互いに独立と見なせるため，例えば，ある地域内でインターネットに接続中の人数や，大規模施設内の客数をマクロな視点でモデル化する際に利用できる．

$M/M/c$ と同様の議論により $M/M/\infty$ の系内客数 $L(t)$ は $\lambda_k = \lambda$（$k = 0, 1, \ldots$），$\mu_k = k\mu$ （$k = 1, 2, \ldots$）の出生死滅過程となる．図 13 に $M/M/\infty$ の状態遷移速度図を示す．

状態 $k$ に対する平衡方程式は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} \lambda p_0 &= \mu p_1 \\ (\lambda + k\mu)p_k &= \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

を得る．$k = 0, 1, \ldots, n-1$ について辺々，足し合わせた後，改めて $n = k$ とおくと

$$\lambda p_{k-1} = k\mu p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

を得る．すなわち

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \frac{\rho}{k} p_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

が全ての $k$（$k = 1, 2, \ldots$）に対して成立する．よって

$$p_k = \frac{\rho}{k} p_{k-1} = \frac{\rho^2}{k(k-1)} p_{k-2} = \cdots = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \qquad k = 1, 2, \ldots$$

を得る．上式は $k = 0$ の場合も成立することに注意する．確率の総和は 1 であるので

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} p_0 = e^{\rho} p_0 = 1$$

が任意の $\rho$ に対して成立する．よって，$M/M/\infty$ は常に安定で定常状態が存在し，

$$p_0 = \exp(-\rho)$$

である．さらに定常状態確率 $p_k$ は

$$p_k = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{28}$$

で与えられ，平均 $\rho$ をもつポワソン分布となる．

なお，式 (28) はサービス時間の平均が $1/\mu$ であるような全ての $M/G/\infty$ に対しても成立することが知られている．このように，サービス時間分布に関して，その平均値のみで系内客数の確率分布が定まる性質をサービス時間分布に関する**不感性**（insensitivity）という．

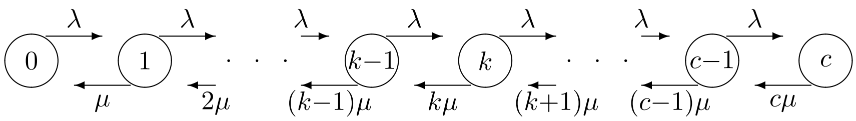



図 14: $M/M/c/c$ の状態遷移速度図

### 3.2.5　$M/M/c/c$

待合室を持たない $c$ 個のサーバをもつ待ち行列 $M/M/c/c$ を考える．すなわち，客が到着した時点でサーバが全て稼働中であれば，到着した客はシステムにはいることが出来ず，呼損となる．

**例 14** 帯域が $C$ bps の回線があり，各利用者は一定の帯域 $r$ bps を要求すると仮定する．もし到着時に空き帯域が $r$ bps 未満であるならば，この利用要求は拒否され，呼損となる．回線利用要求が率 $\lambda$ のポワソン過程に従って発生し，回線接続時間が平均 $\mu^{-1}$ 秒の指数分布に従うならば，この回線の利用状況は，到着率 $\lambda$，サービス率 $\mu$ をもつ $M/M/c/c$ でモデル化できる．ただし $c = \lfloor C/r \rfloor$ は系内へ収容できる最大利用者数である．

$M/M/1/K$ の場合と同様に，系内客数が $c{+}1$ 以上にならないという制約は，状態 $c$ における出生率を 0 とおくことで表現される．すなわち，$M/M/c/c$ の系内客数 $L(t)$ は $\lambda_k = \lambda$（$k = 0, \ldots, c{-}1$），$\lambda_k = 0$（$k = c, c{+}1, \ldots$），$\mu_k = k\mu$（$k = 1, \ldots$,c）の出生死滅過程となる．図 14 に $M/M/c/c$ の状態遷移速度図を示す．

状態 $k$ に対する平衡方程式は次式で与えられる．

$$
\begin{aligned}
\lambda p_0 &= \mu p_1 \\
(\lambda + k\mu) p_k &= \lambda p_{k-1} + (k+1)\mu p_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, c-1 \\
\lambda p_{c-1} &= c\mu p_c
\end{aligned}
$$

を得る．$k = 0, 1, \ldots, n-1$（$n \le c$）について辺々，足し合わせた後，改めて $n = k$ とおくと

$$
\lambda p_{k-1} = k\mu p_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, c
$$

を得る．すなわち

$$
p_k = \frac{\lambda}{k\mu} p_{k-1} = \frac{\rho}{k} p_{k-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, c
$$

が全ての $k$（$k = 1, 2, \ldots, c$）に対して成立する．よって

$$
p_k = \frac{\rho}{k} p_{k-1} = \frac{\rho^2}{k(k-1)} p_{k-2} = \cdots = \frac{\rho^k}{k!} p_0 \qquad k = 1, 2, \ldots, c
$$

を得る．上式は $k = 0$ の場合も成立することに注意する．確率の総和は 1 であるので

$$
\sum_{k=0}^{c} p_k = \sum_{k=0}^{c} \frac{\rho^k}{k!} p_0 = 1
$$

が任意の $\rho$ に対して成立する．よって，$M/M/c/c$ は常に安定で定常状態が存在し，

$$
p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{c} \frac{\rho^k}{k!} \right]^{-1}
$$

となる．よって，系内客数の定常状態確率 $p_k$（$k = 0, 1, \ldots, c$）は

$$
p_k = \frac{\rho^k / k!}{\displaystyle\sum_{i=0}^{c} \rho^i / i!}, \qquad k = 0, \ldots, c \tag{29}
$$

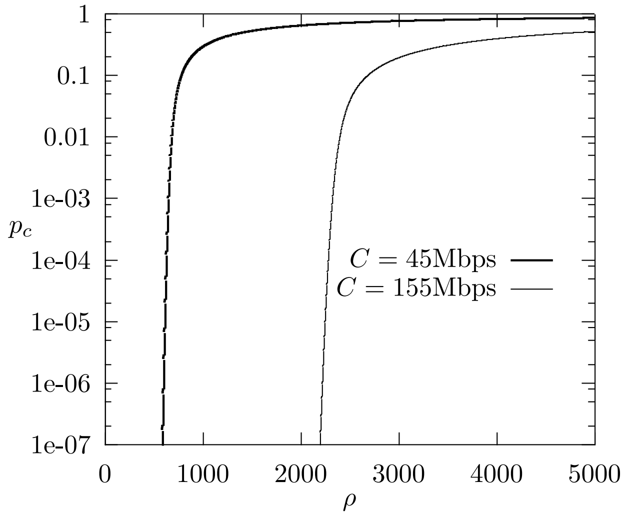



図 15: $M/G/c/c$ における呼損率 $p_c$

で与えられる．$M/M/\infty$ と同様に，式 (29) もサービス時間分布に対して不感性をもっており，平均サービス時間が $1/\mu$ であるような全ての $M/G/c/c$ に対して成立する．

図 13 の $M/M/\infty$ に対する状態遷移速度図と図 14 の $M/M/c/c$ に対する状態遷移速度図を見比べれば分かるように，$M/M/c/c$ は $M/M/\infty$ におけるシステムの容量を $c$ に制限したモデルである．$L_{M/M/\infty}$ ならびに $L_{M/M/c/c}$ をそれぞれ，$M/M/\infty$ ならびにそれに対応する $M/M/c/c$ の定常状態における系内客数とする．式 (29) の分子分母にそれぞれ $\exp(-\rho)$ を掛け，式 (28) と比較することにより，全ての $k$（$k = 0, 1, \ldots, c$）に対して

$$\Pr(L_{M/M/c/c} = k) = \frac{\Pr(L_{M/M/\infty} = k)}{\displaystyle\sum_{l=0}^{c} \Pr(L_{M/M/\infty} = l)} = \frac{\Pr(L_{M/M/\infty} = k)}{\Pr(L_{M/M/\infty} \le c)} = \Pr(L_{M/M/\infty} = k \mid L_{M/M/\infty} \le c)$$

となっていることが分かる．すなわち，$M/M/c/c$ の系内客数分布は $M/M/\infty$ において客数が $c$ 人以下であるという条件の下での条件付き系内客数分布で与えられる．

呼損率は定常状態にあるシステムに到着した客が見る系内客数が $c$ 人である確率であるが，この確率は，客の到着がポワソン過程に従っているため，2.3.6 節の結果より，上記で求めた定常状態確率 $p_c$ に等しい．式 (29) で $k = c$ とおいた

$$p_c = \frac{\rho^c/c!}{\displaystyle\sum_{i=0}^{c} \rho^i/i!} \tag{30}$$

は **アーラン呼損式**（Erlang loss formula）と呼ばれている．利用率が $\rho$ かつサーバ数が $c$ のときの式 (30) で与えられる呼損率 $p_c$ を $B(c, \rho)$ とすると $B(1, \rho) = \rho/(1 + \rho)$ ならびに

$$B(c, \rho) = \frac{\rho B(c-1, \rho)}{c + \rho B(c-1, \rho)}, \qquad c = 2, 3, \ldots$$

により順次，呼損率を求めることができる．

図 15 は例 14 において一人当たりの要求帯域 $r$ が 64kbps の場合の呼損率を示している．回線の帯域 $C$ が 45Mbps の場合は $M/G/703/703$ に対応し，155Mbps の場合は $M/G/2421/2421$ に対応している．負荷の増大に伴い，呼損率は極めて急激に増加することが分かる．

## 3.3　３章のまとめ

定常状態における $M/M/{*}/{*}$ 待ち行列の解析手順をまとめておく．

1. 状態遷移速度図を書く
2. 定常状態確率 $p_k$ が存在すると仮定して，状態遷移速度図を見ながら各状態毎に平衡方程式を書き下す（3状態間の関係）
3. 平衡方程式を解き，定常状態確率 $p_k$ $(k \geq 1)$ を $p_0$ で表現する（２状態間の関係を表す式を導出すればよい）
4. 確率の総和が 1 となるように $p_0$ を決定（$p_0 > 0$（＝定常状態確率が存在）となるための条件が安定条件）

## 演習問題

### ３章の授業内容確認

**問 3.1　出生死滅過程**

非負整数値を状態にもつ出生死滅過程を考える．状態 $k$（$k = 0, 1, \ldots$）から状態 $k{+}1$ への遷移率を $\lambda_k$，状態 $k$（$k = 1, 2, \ldots$）から状態 $k-1$ への遷移率を $\mu_k$ とする．

(1) システムが定常であるとし，過程が状態 $k$ である定常確率を $p_k$ としたとき，状態 $k$ から出る確率フローと他の状態から状態 $k$ に入る確率フローが等しくなることを利用して，$p_0$ と $p_1$ の間に成立する式を示せ．
(2) 同様に，$p_{k-1}, p_k, p_{k+1}$ の間に成立する式を示せ．
(3) (1), (2) の結果を利用して，$p_{k-1}$ と $p_k$（$k = 1, 2, \ldots$）の間に成立する式を示せ．
(4) $p_k$（$k = 1, 2, \ldots$）を $p_0$ を用いて表せ．
(5) 確率の和が 1 であることを利用して，定常状態が存在するための必要条件を示し，その条件が成立するとき，$p_0$ を決定せよ．

**問 3.2　$M/M/1$**

到着率 $\lambda$，平均サービス時間 $1/\mu$ の $M/M/1$ を考える．$\rho = \lambda/\mu$ として，システムが定常であると仮定し系内に $k$ 人の客がいる定常状態確率 $p_k$ を求めよ．また，この結果を用いて定常状態確率が存在するための必要条件を示せ．

**問 3.3　$M/M/1/K$**

到着率 $\lambda$，サービス率 $\mu$ の $M/M/1/K$ を考える．

(1) システムが定常であると仮定し，系内に $k$ 人の客がいる定常状態確率 $p_k$ を求めよ．
(2) また，定常状態において到着した客がシステムに入れず呼損となる確率を求めよ．

**問 3.4　$M/M/c$**

到着率 $\lambda$，平均サービス時間 $1/\mu$ の $M/M/c$ を考える．$\rho = \lambda/\mu$ として，システムが定常であると仮定し，系内に $k$ 人の客がいる定常状態確率 $p_k$ を求めよ．また，この結果を用いて定常状態確率が存在するための必要条件を示せ．

**問 3.5　$M/M/\infty$**

到着率 $\lambda$，平均サービス時間 $1/\mu$ の $M/M/\infty$ を考える．$\rho = \lambda/\mu$ として，システムが定常であると仮定し，系内に $k$ 人の客がいる定常状態確率 $p_k$ を求めよ．

**問 3.6　$M/M/c/c$**

到着率 $\lambda$，平均サービス時間 $1/\mu$ の $M/M/c/c$ を考える．$\rho = \lambda/\mu$ とする．

(1) システムが定常であると仮定し，系内に $k$ 人の客がいる定常状態確率 $p_k$ を求めよ．
(2) サーバー数 $c$，負荷 $\rho$ が与えられたとき，定常状態において到着した客がシステムに入れず呼損となる確率 $B(c, \rho)$ を求めよ．
(3) 呼損率 $B(c, \rho)$ が

$$B(1, \rho) = \frac{\rho}{1+\rho}, \qquad B(c, \rho) = \frac{\rho B(c-1, \rho)}{c + \rho B(c-1, \rho)}, \qquad c = 2, 3, \ldots$$

により，順次計算できることを示せ．

## 練習問題

**問 3.7**

サービス中の客も含め最大 $N$ 人の客を収容することのできる単一サーバ待ち行列を考える．客の到着時点においてシステム内客数が $N-1$ 人以下であれば，この客はシステムに入ることができるが，システム内客数が $N$ 人の場合，この客は直ちにシステムから去るものとする．サーバはシステム内に客がいる限り，到着順に客のサービスを行うものとする．客の到着が到着率 $\lambda$ のポワソン分布に従い，個々の客のサービス時間分布は独立同一で，平均 $\mu^{-1}$ の指数分布に従うとき（すなわち FIFO $M/M/1/N$ のとき），以下の問 (1)〜(4) に答えよ．

(1) 時刻 $t$ においてシステム内に $n$ 人（$n = 0, 1, \ldots, N$）の客がいる確率を $P_n(t)$ とする．$P_n(t)$（$n = 0, 1, \ldots, N$）が満たす微分方程式を導け．

(2) $N=1$ のとき，$P_n(t)$（$n=0,1,\,t\geq 0$）を $P_n(0)$（$n=0,1$）ならびに $\lambda$，$\mu$ を用いて表せ（確率の和は1であるので，全ての $t$ に対して $P_0(t)+P_1(t)=1$）．
(3) $N=1$ のとき，どのような初期分布 $P_n(0)$（$n=0,1$）を選べば $P_n(t)$ は時間 $t$ に対して不変となるか示せ（このような分布を $R_n$（$n=0,1$）とすると，$R_n$ は定常分布と呼ばれる）．
(4) $N=1$ のとき，システム内客数の極限分布 $P_n=P_n(\infty)$（$n=0,1$）を求め，定常分布 $R_n$ と比較せよ．

**問 3.8**

$N$ 人の客が単一サーバ待ち行列（待ち行列１）と２サーバ待ち行列（待ち行列２）を交互に訪れるシステムを考える（図16参照）．外部からの到着はなく，また，外部への離脱もないとする．待ち行列 $i$（$i=1,2$）では，それぞれ平均 $\mu_i^{-1}$ の指数分布に従うサービスを受け，サービス終了後，直ちにもう一方の待ち行列に加わるものとする．
(1) この時，待ち行列1が空である定常確率 $\pi_0$ を求めよ．
(2) 待ち行列1の平均系内客数 $E[L_1]$ を求めよ．必要ならば $x\neq 1$ のとき

$$\sum_{i=1}^{n} ix^i = \frac{nx^{n+2}-(n+1)x^{n+1}+x}{(1-x)^2}$$

が成立することを用いてよい．
(3) 待ち行列2の平均系内客数 $E[L_2]$ は $N-E[L_1]$ で与えられる．$N$ を無限大に近づけると，どのような現象が生じるかを $E[L_2]/E[L_1]$ の挙動を考えることにより述べよ．

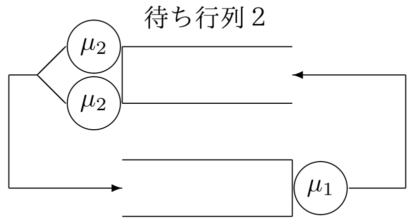



図 16: 巡回待ち行列網

# 4 離散時間マルコフ連鎖とその応用

この節では離散時間マルコフ連鎖と呼ばれる確率過程と待ち行列モデルへの応用を考える．

## 4.1 離散時間マルコフ連鎖とその性質

$X_n$（$n=0,1,\ldots$）を対象となる確率変数列とする．これらの確率変数の取り得る値は非負の整数値とし，その集合を $\mathcal{S}$ で表す．

**定義 15 (離散時間マルコフ連鎖)** 確率変数列 $X_n$（$n=0,1,\ldots$）が

$$\Pr(X_{n+1}=j_{n+1}\mid X_k=j_k, k=0,\ldots,n)=\Pr(X_{n+1}=j_{n+1}\mid X_n=j_n)$$

を満たすとき，確率変数列 $X_n$（$n=0,1,\ldots$）は**離散時間マルコフ連鎖**（discrete-time Markov chain）と呼ばれる．

離散時間マルコフ連鎖では将来の挙動 $X_{n+1}$ が現在の状態 $X_n$ のみで定まり，それ以前の状態 $X_k$ ($k=0,\ldots,n-1$) とは独立である．この性質を **マルコフ性** (Markovian property) をいう．

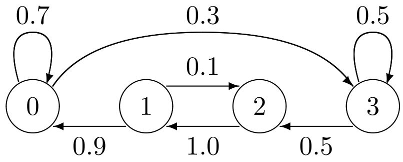



図 17: 状態遷移図の例（$\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3\}$）

#### 4.1.1 離散時間マルコフ連鎖の遷移確率

離散時間マルコフ連鎖における $\Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ は状態 $i$ から状態 $j$ への**遷移確率**あるいは**推移確率**（transition probability）と呼ばれる．以下では，遷移確率 $\Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ が $n$ に依存しないと仮定し，

$$p_{i,j} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i), \qquad i, j \in \mathcal{S}$$

とする．離散時間マルコフ連鎖を表す一つの方法に**状態遷移図**（state transition diagram）がある．状態遷移図は枝に重みが付いた有効グラフであり，ノードは状態を表す．さらに，ノード $i$ からノード $j$ への有向枝は状態 $i$ から状態 $j$ へ直接遷移可能（すなわち $p_{i,j} > 0$）であることを示し，重み $p_{i,j}$ が付加される（図 17 参照）．

$(i, j)$ 要素が $p_{i,j}$ で与えられる行列 $\boldsymbol{P} = (p_{i,j})$ を考える．$\boldsymbol{P}$ は**遷移確率行列**あるいは**推移確率行列**（transition probability matrix）と呼ばれる．行列 $\boldsymbol{P}$ の各行は，$X_n$ の値が与えられたという条件の下での $X_{n+1}$ の確率分布を表している．よって 行列 $\boldsymbol{P}$ は各要素が非負であり，かつ，各行の総和が 1 となる正方行列である．例えば，図 17 で表される離散時間マルコフ連鎖の場合，次のようになる．

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.9 & 0 & 0.1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{array}$$

さらに $(i, j)$ 要素が

$$p_{i,j}^{[n]} = \Pr(X_n = j \mid X_0 = i)$$

で与えられる正方行列 $\boldsymbol{P}^{[n]} = (p_{i,j}^{[n]})$ を $n$ ステップ遷移確率行列と呼ぶ．特に $\boldsymbol{P}^{[1]} = \boldsymbol{P}$ であることに注意する．マルコフ性より，$n, m = 1, 2, \ldots$ に対して

$$\begin{aligned} p_{i,j}^{[n+m]} &= \Pr(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{S}} \Pr(X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{S}} \Pr(X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i) \Pr(X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{S}} \Pr(X_{n+m} = j \mid X_n = k) \Pr(X_n = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in \mathcal{S}} p_{i,k}^{[n]} p_{k,j}^{[m]} \end{aligned}$$

となる．これを行列を用いて表現すると

$$\boldsymbol{P}^{[n+m]} = \boldsymbol{P}^{[n]} \boldsymbol{P}^{[m]}$$

である．特に $m = n = 1$ とすれば $\boldsymbol{P}^{[2]} = \boldsymbol{P}^2$ となるので，$m = 1$ として帰納法を用いると $n$ ステップ遷移確率行列 $\boldsymbol{P}^{[n]}$ は

$$\boldsymbol{P}^{[n]} = \boldsymbol{P}^n$$

で与えられることが分かる．

ここで時点 $n$ において状態が $i$ である確率を $\pi_i^{[n]} = \Pr(X_n = i)$ $(i \in \mathcal{S})$ とし，$X_n$ の確率分布 $\boldsymbol{\pi}^{[n]}$ を次式で定義する．

$$\boldsymbol{\pi}^{[n]} = (\pi_0^{[n]}, \pi_1^{[n]}, \ldots), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

このとき

$$\begin{aligned}\Pr(X_n = j) &= \sum_{i \in \mathcal{S}} \Pr(X_n = j, X_0 = i) \\ &= \sum_{i \in \mathcal{S}} \Pr(X_n = j \mid X_0 = i) \Pr(X_0 = i)\end{aligned}$$

であるので $\boldsymbol{\pi}^{[n]} = \boldsymbol{\pi}^{[0]} \boldsymbol{P}^{[n]}$ となり，次の定理を得る．

**定理 16** 離散時間マルコフ連鎖の時点 $n$ における確率分布 $\boldsymbol{\pi}^{[n]}$ は，初期状態確率分布 $\boldsymbol{\pi}^{[0]}$ ならびに遷移確率行列 $\boldsymbol{P}$ によって，以下のように一意に定まる．

$$\boldsymbol{\pi}^{[n]} = \boldsymbol{\pi}^{[0]} \boldsymbol{P}^n$$

**例 17** 例えば，図 17 で表される離散時間マルコフ連鎖について，初期状態を $\boldsymbol{\pi}^{[0]} = (1, 0, 0, 0)$ とし，$\boldsymbol{\pi}^{[n]}$ を計算すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}^{[0]} &= (1.000 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.000) \\
\boldsymbol{\pi}^{[1]} &= (0.700 \quad 0.000 \quad 0.000 \quad 0.300) \\
\boldsymbol{\pi}^{[2]} &= (0.490 \quad 0.000 \quad 0.150 \quad 0.360) \\
\boldsymbol{\pi}^{[3]} &= (0.343 \quad 0.150 \quad 0.180 \quad 0.327)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}^{[4]} &= (0.37510 \quad 0.18000 \quad 0.17850 \quad 0.26640) \\
\boldsymbol{\pi}^{[5]} &= (0.42457 \quad 0.17850 \quad 0.15120 \quad 0.24573) \\
&\ \ \vdots
\end{aligned}$$

**例 18** (2018 年度 大阪大学二次試験問題の一部）二つのチーム A, B が野球の試合を $n$ 回 $(n \geq 2)$ 行う．1 試合目に A が勝つ確率は $p$ $(0 < p < 1)$ であるとする．また，A が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は $p$ であり，B が勝った試合の次の試合に A が勝つ確率は $q$ $(0 < q < 1)$ であるとする．なお，試合結果に引き分けはなく，勝敗が決まるとする．このとき，$n$ 試合目に A が勝つ確率 $a_n$ を求めよ．

この問題に関連して，2 状態 A, B からなるマルコフ連鎖を考える．各状態は直前の試合における勝者を表している．遷移確率行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \end{array} \!\! \begin{array}{c} \quad \mathrm{A} \qquad \mathrm{B} \\ \begin{pmatrix} p & 1-p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \end{array} \qquad \boldsymbol{P}^n = \frac{1}{1-p+q} \begin{pmatrix} 1 & 1-p \\ 1 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (p-q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & 1-p \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1 試合目に A が勝つ確率は $p$ なので，初期状態（0 試合目に対応）は A，すなわち $\boldsymbol{\pi}^{[0]} = (1 \quad 0)$ とすると

$$(a_n \quad 1-a_n) = \boldsymbol{\pi}^{[n]} = \boldsymbol{\pi}^{[0]} \boldsymbol{P}^n = (1 \quad 0) \boldsymbol{P}^n = \frac{1}{1-p+q} \Big( q + (1-p)(p-q)^n \quad 1 - p - (1-p)(p-q)^n \Big)$$

**例 19** (2018 年度 京都大学二次試験問題）コインを $n$ 回投げて複素数 $z_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ を以下のように定める．ただし $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$．(i) 一回目に表が出れば $z_1 = \omega$ とし，裏が出れば $z_1 = 1$ とする．(ii) $k = 2, 3, \ldots, n$ のとき，$k$ 回目に表が出れば $z_k = \omega z_{k-1}$ とし，裏が出れば $z_k = \overline{z_{k-1}}$ とする．ただし $\overline{z_{k-1}}$ は $z_{k-1}$ の共役複素数．このとき $z_n$ の確率分布を求めよ．

$\omega^3 = 1, \overline{\omega} = \omega^2, \overline{\omega^2} = \omega$ 等に注意すると，各 $z_k$ は 1，$\omega$，$\omega^2$ 以外の値を取ることはないことが分かる．よって，状態 1 が 1 に，状態 2 が $\omega$ に，状態 3 が $\omega^2$ に対応する，3 状態からなるマルコフ連鎖を考える．このとき，

$$\boldsymbol{\pi}^{[1]} = \begin{array}{c} \ \ 1 \quad\ 2 \quad\ 3 \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \!\! \begin{array}{c} \quad 1 \qquad 2 \qquad 3 \\ \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \end{array}, \quad \boldsymbol{P}^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

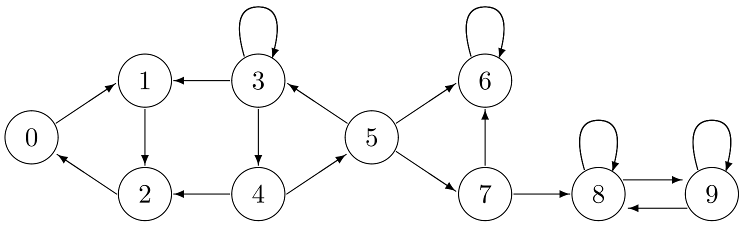



図 18: 一般的な離散時間マルコフ連鎖の例（遷移確率は省略）

であり，$\boldsymbol{\pi}^{[n]} = \boldsymbol{\pi}^{[n-1]}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}^{[n-2]}\boldsymbol{P}^2 = \cdots = \boldsymbol{\pi}^{[1]}\boldsymbol{P}^{n-1}$ が成立するので，

$$\begin{pmatrix}\pi_1^{[n]} & \pi_2^{[n]} & \pi_3^{[n]}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & 3 & -1\\ 1 & -3 & 2\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\end{pmatrix}$$

なお，$\boldsymbol{\pi}^{[0]} = (1\ 0\ 0)$ あるいは $\boldsymbol{\pi}^{[0]} = (0\ 0\ 1)$ とすれば $\boldsymbol{\pi}^{[1]} = \boldsymbol{\pi}^{[0]}\boldsymbol{P} = (1/2\quad 1/2\quad 0)$ なので，$\boldsymbol{\pi}^{[n]} = (1\ 0\ 0)\boldsymbol{P}^n$ あるいは $\boldsymbol{\pi}^{[n]} = (0\ 0\ 1)\boldsymbol{P}^n$ から求めても良い．

#### 4.1.2 再帰時間と状態の分類

マルコフ連鎖の各状態は，以下に示すような幾つかの規準によって分類することができる．そのために，まず最初に**連結**（communicate）という考え方を導入する．まず，ある $n$ （$n = 1, 2, \ldots$）に対して $p_{i,j}^{[n]} > 0$ ならば，状態 $j$ は状態 $i$ から到達可能という．さらに状態 $i$ と $j$ が互いに到達可能である時，状態 $i$ と $j$ は連結しているという．特に，状態 $i$ はそれ自身と連結であるとする．このとき，マルコフ連鎖の全状態の集合 $\mathcal{S}$ の中から一つの状態を選び，それと連結している全ての状態を集めて集合 $\mathcal{S}$ の部分集合 $\mathcal{C}_1$ を作り（これを連結クラスという），さらに $\mathcal{C}_1$ に含まれていない状態を一つ選び，それと連結している全ての状態を集めて連結クラス $\mathcal{C}_2$ を作る，という手続きを繰り返すと，状態集合 $\mathcal{S}$ は

$$\mathcal{S} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \cdots$$

のように互いに素な複数個の連結クラスの和集合で書くことができる．状態数が無限の場合は，連結クラスも無限個必要となる場合がある．

**例 20** 図 18 の離散時間マルコフ連鎖の例に対して上記手順を行ってみる．まず，状態 0 と連結な状態は 1, 2 なので，$\mathcal{C}_1 = \{0, 1, 2\}$ となる．次に状態 3 を選ぶと，これと連結しているのは状態 4, 5 なので $\mathcal{C}_2 = \{3, 4, 5\}$ を得る．次に状態 6 を選ぶと，これと連結している状態はないので $\mathcal{C}_3 = \{6\}$ となる．状態 7 も同様であり，$\mathcal{C}_4 = \{7\}$ を得る．最後に状態 8 を選ぶと，これは状態 9 と連結しているので $\mathcal{C}_5 = \{8, 9\}$ である．以上より，状態空間 $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ は五つの連結クラスの和集合で表現される．

ある時点で離散時間マルコフ連鎖が状態 $i$ にあり，これ以降初めて状態 $j$ に到達するまでの遷移回数 $T_{i,j}$ を状態 $i$ から状態 $j$ への**初到達時間**（first passage time）という．特に $i = j$ のとき，$T_{j,j}$ は状態 $j$ の**再帰時間**（recurrence time）と呼ばれる．状態 $i$ から状態 $j$ への初到達時間が $n$ である確率 $\Pr(T_{i,j} = n)$ を $f_{i,j}^{[n]}$ とする．すなわち

$$f_{i,j}^{[n]} = \Pr(T_{i,j} = n) = \Pr(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \ldots, X_1 \neq j \mid X_0 = i),\ \ n = 1, 2, \ldots$$

である．さらに，$f_{i,j}^{[n]}$ の総和を $f_{i,j}$ とする．

$$f_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}^{[n]}$$

$f_{i,j}$ は状態 $i$ から出発し，いずれは状態 $j$ に到達する確率である．もし $f_{j,j} = 1$ であるならば状態 $j$ は**再帰的**（recurrent）と呼ばれ，$f_{j,j} < 1$ ならば状態 $j$ は**過渡的**または**一時的**（transient）と呼ばれる．図 18 の離散時間マルコフ連鎖では，状態 0, 1, 2, 6, 8, 9 が再帰的であり，状態 3, 4, 5, 7 は過渡的である．

まず，状態 $i$ が再帰的であるか過渡的であるかを判定する条件を $p^{[n]}_{j,j}$ を用いて表すことを考える．ここで状態 $i$ から出発するという条件の下で $n$ ステップ目に状態 $j$ にある確率を，最初に状態 $j$ に訪れた時点を $m$ として排反な事象に分けると

$$p^{[n]}_{i,j} = \sum_{m=1}^{n} f^{[m]}_{i,j} p^{[n-m]}_{j,j} \tag{31}$$

を得る．ただし $p^{[0]}_{j,j} = 1$ である．そこで，式 (31) において $i = j$ とし，両辺を $n$ について和をとると

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} p^{[n]}_{j,j} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n} f^{[m]}_{j,j} p^{[n-m]}_{j,j} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty} f^{[m]}_{j,j} p^{[n-m]}_{j,j} = f_{j,j}\sum_{n=0}^{\infty} p^{[n]}_{j,j} \\ = f_{j,j} + f_{j,j}\sum_{n=1}^{\infty} p^{[n]}_{j,j}\end{aligned}$$

となるので，形式的に

$$\sum_{n=1}^{\infty} p^{[n]}_{j,j} = \frac{f_{j,j}}{1 - f_{j,j}}$$

を得る．これより，状態 $j$ は $\sum_{n=1}^{\infty} p^{[n]}_{j,j}$ が発散すれば再帰的であり，有限であれば過渡的であることがわかる．

次に再帰的な状態 $j$ に対して平均再帰時間 $\nu_j = E[T_{j,j}]$ を考える．明らかに

$$\nu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f^{[n]}_{j,j}$$

である．もし，$f_{j,j} = 1$ かつ $\nu_j < \infty$ ならば状態 $j$ は**正再帰的**（positive recurrent）と呼ばれ，$f_{j,j} = 1$ かつ $\nu_j = \infty$ ならば**零再帰的**（null recurrent）と呼ばれる．なお，マルコフ連鎖の状態数が有限ならば，零再帰的な状態は存在しない（すなわち，無限個の状態がある場合のみ零再帰的な状態が存在する可能性がある）．

定義より，任意に選ばれた連結クラス $\mathcal{C}$ に含まれる二つの状態 $i$ と $j$ に対して，$p^{[n]}_{j,i} > 0$，$p^{[m]}_{i,j} > 0$ なる $n$，$m$ が存在する．さらに

$$p^{[n+l+m]}_{j,j} \geq p^{[n]}_{j,i} p^{[l]}_{i,i} p^{[m]}_{i,j} \tag{32}$$

が成立するので，両辺を $l$ について和をとれば

$$\sum_{l=1}^{\infty} p^{[l]}_{j,j} \geq \sum_{l=1}^{\infty} p^{[n+l+m]}_{j,j} \geq p^{[n]}_{j,i}\left(\sum_{l=1}^{\infty} p^{[l]}_{i,i}\right) p^{[m]}_{i,j}$$

を得る．これより次のことが分かる．もし，状態 $i$ が再帰的ならば（すなわち $\sum_{l=1}^{\infty} p^{[l]}_{i,i} = \infty$），同じ連結クラスに属する他の状態 $j$ もまた再帰的である（すなわち $\sum_{l=1}^{\infty} p^{[l]}_{j,j} = \infty$）．逆に状態 $j$ が過渡的ならば（すなわち $\sum_{l=1}^{\infty} p^{[l]}_{j,j} < \infty$），同じ連結クラスに属する他の状態 $i$ も過渡的である．

ある連結クラスに属する状態 $i$ が正再帰的（零再帰的）であるならば，同じ連結クラスに属する他の状態 $j$ もまた正再帰的（零再帰的）であることを示すことができる．特に再帰的な連結クラスに含まれる状態数が有限の場合，これらの状態は全て正再帰的である．

再帰的な連結クラス $\mathcal{C}$ の任意に選ばれた状態 $i$ に対して，$p^{[l]}_{i,i} > 0$ となる $l$ の最大公約数 $d_i$ を考える．$d_i$ は状態 $i$ の周期と呼ばれる．同じ連結クラスに属する状態は同じ周期を持つことを下記のように示すことができ，$d = 1$ の時，連結クラスは**非周期的**（aperiodic）あるいは**エルゴード的**（ergodic）であると呼ばれ，$d \geq 2$ のとき**周期的**（periodic）であると呼ばれる．

まず，$i$ とは異なる状態 $j \in \mathcal{C}$ に対して，$p^{[n]}_{j,i} > 0$，$p^{[m]}_{i,j} > 0$ なる $n$，$m$ を選ぶ．定義より $n+m$ は $d_j$ の倍数である．さて，$p^{[l]}_{i,i} > 0$，すなわち $l$ が $d_i$ の倍数ならば，式 (32) の右辺は正となる．よって，$p^{[n+l+m]}_{j,j} > 0$ であり，$n+l+m$ は $d_j$ の倍数であり，$n+m$ は $d_j$ の倍数なので $l$ も $d_j$ の倍数でなければならない．以上の議論より，$p^{[n]}_{j,i} > 0$，$p^{[m]}_{i,j} > 0$ なる $n$，$m$ に対して，$l$ が $d_i$ の倍数であることは，$p^{[n+l+m]}_{j,j} > 0$ の十分条件となっていることが分かる．
一方，$l$ が $d_j$ の倍数であることは $p^{[n+l+m]}_{j,j} > 0$ の必要十分条件である．よって，$d_j \leq d_i$ を得る．ここで状態 $i$，$j$ の選び方は任意であるので，この議論を $i$ と $j$ を逆にしても成り立つ．すなわち $d_i \leq d_j$ も同様に成立する．これより，$d_i = d$（$i \in \mathcal{C}$）が成立する．

図 18 の離散時間マルコフ連鎖では，再帰的な連結クラス $\mathcal{C}_1 = \{0,1,2\}$ に含まれる状態は周期的であり，再帰的な連結クラス $\mathcal{C}_3 = \{6\}$ ならびに $\mathcal{C}_5 = \{8,9\}$ に含まれる状態は非周期的である．

以上をまとめて次の定理を得る．

**定理 21** 連結クラス内の各状態は全て正再帰的か，全て零再帰的か，あるいは全て過渡的かのいずれかである．また，再帰的な連結クラスに属するある状態が周期的であるならば，その状態と同じ連結クラスに属する全ての状態は同じ周期をもつ．

#### 4.1.3 既約な離散時間マルコフ連鎖の極限確率と定常状態分布

全ての状態 $i \in \mathcal{S}$ が一つの連結クラスに含まれるようなマルコフ連鎖は**既約**（irreducible）と呼ばれる．定義より，既約なマルコフ連鎖の任意に選ばれた状態 $i,j \in \mathcal{S}$ に対して，$p_{i,j}^{[n(i,j)]} > 0$ となるような自然数 $n(i,j)$ が存在する．

既約で正再帰的なマルコフ連鎖に対しては

$$\pi_j = \sum_{i\in\mathcal{S}} \pi_i p_{i,j}, \qquad \sum_{j\in\mathcal{S}} \pi_j = 1 \tag{33}$$

を満たす正数 $\pi_j$（$j \in \mathcal{S}$）が唯一定まる．例えば，図 17 で表される離散時間マルコフ連鎖では $\pi_0 = 15/34$, $\pi_1 = \pi_2 = 5/34$, $\pi_3 = 9/34$ である．

$\boldsymbol{\pi} = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ としたとき，式 (33) の最初の式は $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ と等価であることに注意する．$\pi_j$ を状態 $j$ の**定常状態確率** (steady state probability) といい，$\boldsymbol{\pi}$ を**定常状態分布**（steady state distribution）という．定義より，もし $\boldsymbol{\pi}^{[0]} = \boldsymbol{\pi}$ ならば $\boldsymbol{\pi}^{[1]} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}$ であるので，帰納法により

$$\boldsymbol{\pi}^{[n]} = \boldsymbol{\pi}^{[n-1]}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\pi}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

を得る．すなわち初期状態分布 $\boldsymbol{\pi}^{[0]}$ が定常状態分布 $\boldsymbol{\pi}$ に等しければ，任意に選ばれた時点 $n$ での状態分布 $\boldsymbol{\pi}^{[n]}$ は定常状態分布 $\boldsymbol{\pi}$ に等しい．

定常状態分布は時間平均分布と密接な関係がある．既約で正再帰的なマルコフ連鎖を時刻 0 から $N-1$ の間，観察したとき，状態 $j$ にある時間平均を $g_j(N)$ とする．

$$g_j(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \pi_j^{[n]}$$

ここで $\boldsymbol{g}(N) = (g_0(N), g_1(N), \ldots)$ とすると

$$\boldsymbol{g}(N) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{\pi}^{[n]} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\boldsymbol{\pi}^{[0]}\boldsymbol{P}^n$$

を得る．$\boldsymbol{I}$ を単位行列，$\boldsymbol{e}$ を全ての要素が 1 である列ベクトルとし，この両辺に $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}$ を掛け，$\boldsymbol{P}\boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}$，$\boldsymbol{\pi}^{[0]}\boldsymbol{e} = 1$ に注意すると

$$\boldsymbol{g}(N)[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}] = \frac{1}{N}\boldsymbol{\pi}^{[0]}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^N + N\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}) = \boldsymbol{\pi}^{[0]}\frac{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^N}{N} + \boldsymbol{\pi}$$

となる．さらに $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi}$ が正則であり，$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi})^{-1} = \boldsymbol{\pi}$ に注意すると

$$\boldsymbol{g}(N) = \boldsymbol{\pi}^{[0]}\frac{\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^N}{N}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}+\boldsymbol{e}\boldsymbol{\pi})^{-1} + \boldsymbol{\pi}$$

を得る．ここで $N \to \infty$ の極限を考えると $\lim_{N\to\infty}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^N)/N = \lim_{N\to\infty}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{[N]})/N = \boldsymbol{O}$ となるので，

$$\lim_{N\to\infty}\boldsymbol{g}(N) = \boldsymbol{\pi}$$

が得られる．

さらに，状態 $j$ から出発し，平均 $\nu_j$ ステップで再び状態 $j$ に戻って来るならば，平均して $\nu_j$ 回に一回，状態 $j$ を訪れることになるので，定常状態確率 $\pi_j$ は平均再帰時間の逆数 $1/\nu_j$ に等しくなる．以上より，次の定理を得る．

**定理 22 (マルコフ連鎖の定常状態確率と時間平均)** 既約で正再帰的なマルコフ連鎖は式 (33) を満たす唯一の定常状態確率をもち，それは平均再帰時間の逆数に等しい．また，時間平均分布は定常状態分布と等しく，初期状態分布とは独立である．

一方，既約，正再帰的，かつ，非周期的なマルコフ連鎖に対しては次式が成立する．

$$\lim_{n\to\infty} p_{i,j}^{[n]} = \lim_{n\to\infty} \pi_j^{[n]} = \pi_j^{[\infty]}$$

上式は，$n \to \infty$ の極限においてマルコフ連鎖がある状態 $j$ にある確率が初期状態分布とは独立であることを示している．確率 $\pi_j^{[\infty]}$ は**極限確率** (limiting probability) と呼ばれる．極限確率に関しては次の定理が知られている．

**定理 23 (マルコフ連鎖の極限確率)** 既約なマルコフ連鎖が過渡的あるいは零再帰的である場合，全ての状態 $j \in \mathcal{S}$ に対して $\pi_j^{[\infty]} = 0$ である．また，正再帰的かつ非周期的である場合，極限確率 $\pi_j^{[\infty]}$ は定常状態確率 $\pi_j$ に等しい．

## 4.2 待ち行列モデルの系内客数分布

以下で扱われる待ち行列モデルは，それぞれ，ある事象が起こった時点にのみ注目すると，系内客数に関する離散時間マルコフ連鎖を得ることができる．さらに得られたマルコフ連鎖の定常状態確率を用いて定常状態における系内客数分布を導出する手法について解説する．

### 4.2.1 $M/G/1$ の系内客数分布

到着率 $\lambda$，サービス時間分布関数 $H(x)$，平均サービス時間 $b$ をもつ $M/G/1$ を考える．

**例 24** 十分に大きなバッファをもつルータがあり，出力回線の容量は $C$ bps であるとする．パケットの到着が率 $\lambda$ のポワソン過程に従い，パケット長（byte）の分布関数 は $G(x)$ であるとする．このとき，ルータ内のパケット数の振舞いは，到着率 $\lambda$，サービス時間分布関数 $H(x) = G(Cx/8)$ をもつ $M/G/1$ でモデル化できる．

以下では利用率 $\rho = \lambda b$ が $\rho < 1$ であると仮定する．定常状態における系内客数分布を求めるため，客の離脱直後に注目する．$n$ 番目の客の離脱直後の系内客数を $X_n$ とし，$A_n$ を $n$ 番目の客のサービス時間の間に新たに到着する客数とする．

図 19 に系内客数の変化を示す．$X_n = 0$ ならば，この後，暫くの間サーバは休止しており，次の客が到着するとサービスを開始する．そして，この客のサービスが終了し離脱が起こった直後の系内客数は，この客のサービス中に新たに到着した客数に等しい．すなわち $X_n = 0$ ならば $X_{n+1} = A_{n+1}$ となる．

一方，$X_n = i$ $(i \ge 1)$ ならば，客の離脱の後，直ちに次のサービスが開始される．このサービスの終了直後における系内客数は，サービス開始時点で既に系内にいた $i-1$ 人の客とサービス中に新たに到着した客数の和で与えられる．すなわち $X_n \ge 1$ ならば $X_{n+1} = X_n - 1 + A_{n+1}$ である．よって

$$X_{n+1} = \max(X_n - 1, 0) + A_{n+1} \tag{34}$$

が成立する．

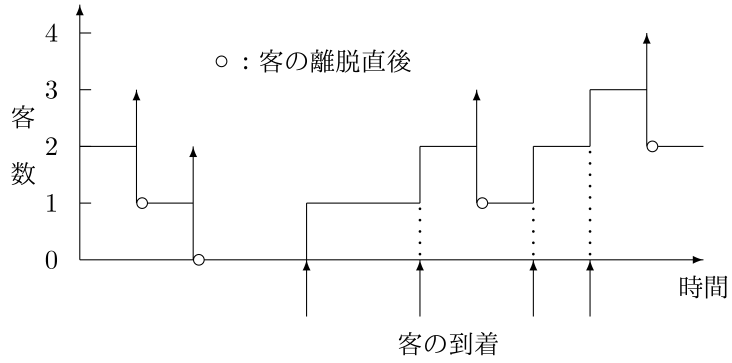



図 19: $M/G/1$ の系内客数の変化

さらに，一人の客のサービス時間の間に $k$ 人の客が到着する確率を $a_k = \Pr(A_n = k)$ とすると，ポワソン到着の仮定より $a_k$ は

$$a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dH(x), \qquad k = 0, 1, \ldots \tag{35}$$

で与えられ，$n$ とは独立である．

**例 25** $H(x)$ がパラメタ $\mu$ の指数分布に従うとき，分布関数は $H(x) = 1 - \exp(-\mu x)$ であり，密度関数は $h(x) = dH(x)/dx = \mu \exp(-\mu x)$ となる．よって $k = 0$ の場合

$$a_0 = \int_0^\infty e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu x} dx = \mu \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)x} dx = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

であり，$k \geq 1$ に対しては部分積分することで

$$\begin{aligned}
a_k &= \int_0^\infty e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \mu e^{-\mu x} dx = \frac{\lambda^k}{k!} \mu \int_0^\infty x^k e^{-(\lambda+\mu)x} dx \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} \mu \left( \left[ -\frac{x^k}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)x} \right]_0^\infty + \frac{k}{\lambda+\mu} \int_0^\infty x^{k-1} e^{-(\lambda+\mu)x} dx \right) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} \mu e^{-(\lambda+\mu)x} dx \\
&= \frac{\lambda}{\lambda+\mu} a_{k-1} = \left( \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^2 a_{k-2} = \cdots = \left( \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k a_0
\end{aligned}$$

となり，最終的に

$$a_k = \left( \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \right)^k \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

を得る．

以上の議論から，$n+1$ 番目の客の離脱直後の系内客数 $X_{n+1}$ の確率分布は $n$ 番目の客の離脱直後の系内客数 $X_n$ のみに依存しており，それ以前の客の離脱時点での系内客数とは独立となる．すなわち，$X_n$ はマルコフ性をもつことがわかる．このように系内客数が注目する時点でマルコフ性をもつとき，これらの時点を**隠れマルコフ点**（imbedded Markov point）といい，そのような時点のみに注目して構成されたマルコフ連鎖 $X_n$ を**隠れマルコフ連鎖**（imbedded Markov chain）と言う．

定常状態における離脱直後の系内客数分布を求めるため，隠れマルコフ連鎖 $X_n$ の遷移確率 $p_{i,j} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ を考える．式 (34) より $X_n = 0$ ならば $A_{n+1} = X_{n+1}$ なので

$$p_{0,j} = a_j, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

を得る（図 20 参照）．また，$X_n = i \geq 1$ ならば $A_{n+1} = X_{n+1} - X_n + 1$ なので

$$p_{i,j} = \begin{cases} a_{j-i+1}, & j = i-1, i, \ldots \\ 0, & j = 0, \ldots, i-2 \end{cases}$$

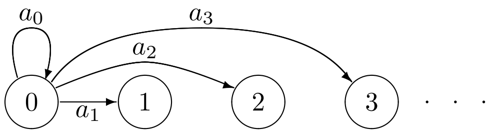



図 20: M/G/1 待ち行列に対する隠れマルコフ連鎖の状態遷移図（$X_n = 0$）

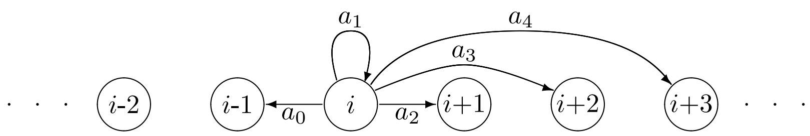



図 21: M/G/1 待ち行列に対する隠れマルコフ連鎖の状態遷移図（$X_n = i \geq 1$）

を得る（図 21 参照）．以上より，客の離脱直後の系内客数の遷移確率行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

で与えられる．状態 0 からは 1 ステップで任意の状態 $j$ に到達可能であり，かつ，任意の状態 $j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ からは $j$ ステップで状態 0 に到達可能なので（そのような確率は $a_0^j$），マルコフ連鎖 $X_n$ は既約であることが分かる．よって以下では $X_n$ の定常状態確率が存在すると仮定する．

客の離脱直後における系内客数が $k$ 人である定常状態確率を $\pi_k$ とする．このとき定常状態分布 $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)$ は

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

を満たす．$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ を要素毎に書き下せば

$$\pi_j = \pi_0 a_j + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j+1-i}, \qquad j = 0, 1, \ldots \tag{36}$$

である．

ここで式 (36) の両辺を $j = 0$ から $k - 1$ まで加えると

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{k-1} \pi_j &= \pi_0 \sum_{j=0}^{k-1} a_j + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j+1-i} \\ &= \pi_0 \sum_{j=0}^{k-1} a_j + \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i-1}^{k-1} \pi_i a_{j+1-i} \\ &= \pi_0 \sum_{j=0}^{k-1} a_j + \sum_{i=1}^{k} \pi_i \sum_{j=0}^{k-i} a_j \\ &= \pi_0 \sum_{j=0}^{k-1} a_j + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i \sum_{j=0}^{k-i} a_j + \pi_k a_0 \end{aligned}$$

を得る．これを $\pi_k$ について解くと

$$\pi_k a_0 = \pi_0 \left( 1 - \sum_{j=0}^{k-1} a_j \right) + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i \left( 1 - \sum_{j=0}^{k-i} a_j \right) \tag{37}$$

となる．一回の遷移で高々一つしか系内客数が減らないことに注意すると，式 (37) の左辺は系内客数が $k$ 以上から $k-1$ 以下に減少する確率フローの量と見なすことができ，一方，右辺は系内客数が $k-1$ 以下から $k$ 以上になる確率フローの量と見なすことが出来る．一般に，定常状態では系内客数が $k$ と $k-1$ の間を横切るフローの量は等しくなる．

定常状態において任意に選ばれた時点で系内客数が $k$ 人である確率を $p_k$ とする．$\pi_k$ は客の離脱直後における系内客数分布であり，一般には $p_k$ とは異なるが，$M/G/1$ においては両者が一致する (Gross and Harris 1998).

**補題 26** 客の到着ならびに離脱が順序性をもつ定常状態にある待ち行列モデルにおいて，客の到着直前の系内客数分布と客の離脱直後の系内客数分布は等しい．さらに，このとき，単位時間当たりに系内客数が $k$ から $k+1$ へ変化する平均回数は単位時間当たりに系内客数が $k+1$ から $k$ へ変化する平均回数に等しい．

まず，系内客数を時間の関数として眺めると一回の変化で高々 1 しか動かない階段関数である（図 19 参照）．そこで，$A_k(t)$ を時間区間 $(0,t]$ の間に系内客数が $k$ から $k+1$ に増加した時点の数とし，$D_k(t)$ を時間区間 $(0,t]$ の間に系内客数が $k+1$ から $k$ に減少した時点の数とする．このとき $A(t)=\sum_{k=0}^{\infty} A_k(t)$ は時間区間 $(0,t]$ の間に到着する総客数を表し，$D(t)=\sum_{k=0}^{\infty} D_k(t)$ は時間区間 $(0,t]$ の間に離脱した総客数を表すことに注意する．定義より

$$\pi_k = \lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)}{D(t)}$$

である．ここで $L(t)$ を時刻 $t$ における系内客数とすると $L(t)=L(0)+A(t)-D(t)$ が成立する．よって

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)}{D(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{A(t)} \cdot \frac{A(t)}{A(t)+L(0)-L(t)} + \lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)-A_k(t)}{D(t)}$$

を得る．さらに $L(0)<\infty$，かつ，$L(t)$ が極限分布をもつと仮定すると，$t\to\infty$ の極限では $A(t)/[A(t)+L(0)-L(t)]\to 1$ となり，一方，$|A_k(t)-D_k(t)|\le 1$ であるので $[D_k(t)-A_k(t)]/D(t)\to 0$ となる．すなわち

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)}{D(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{A(t)} \tag{38}$$

が成立する．式 (38) は客の離脱直後の系内客数分布が客の到着直前の系内客数分布と等しいということを示している．また式 (38) を

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)}{t}\frac{t}{D(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{t}\frac{t}{A(t)}$$

のように変形し，$\lim_{t\to\infty} A(t)/t = \lim_{t\to\infty} D(t)/t$ に注意すると

$$\lim_{t\to\infty} \frac{D_k(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{A_k(t)}{t} \tag{39}$$

を得る．式 (39) は単位時間当たりに状態 $k$ を見る平均到着客数が離脱直後に状態 $k$ を見る平均離脱客数に等しいことを示している．以上をまとめて補題 26 を得る．

一方，客の到着がポワソン過程に従うならば，定常状態において客の到着直前の系内客数分布は定常状態分布に等しい．それゆえ補題 26 より，離脱直後の系内客数分布は定常状態分布に等しくなる．特に $\pi_0=p_0$ であり，$p_0$ はサーバが稼働していない確率なので，$\pi_0=p_0=1-\rho$ を得る．

このように，式 (37) より $\pi_k$ が順次求まり，離脱直後の系内客数分布 $\{\pi_k; k=0,1,\ldots\}$ は定常状態における系内客数分布 $\{p_k; k=0,1,\ldots\}$ に等しい．以上をまとめて次の定理を得る．

**定理 27** $\rho<1$ のとき，$M/G/1$ の定常状態における系内客数分布 $\{p_k; k=0,1,\ldots\}$ は次式により計算される．

$$\begin{aligned} p_0 &= 1-\rho \\ p_k &= \frac{1}{a_0}\left[p_0\left(1-\sum_{j=0}^{k-1} a_j\right) + \sum_{i=1}^{k-1} p_i \left(1-\sum_{j=0}^{k-i} a_j\right)\right], \qquad k=1,2,\ldots \end{aligned}$$

図 22 はサービス時間が 1 である $M/D/1$ の系内客数 $L$ の**裾野分布**（tail distribution） $\Pr(L>k)$ を対数軸で示している．図より，大きな $k$ の値に対しては $\Pr(L>k)$ は一定の率で減少することがわかる．すなわち，十

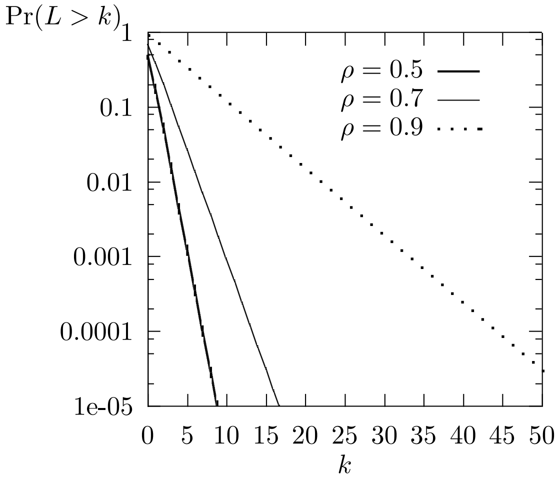



図 22: $M/D/1$ の系内客数の裾野分布（$b=1$）

分大きな $k$ に対して系内客数の裾野分布は $d>0$，$0<r<1$ なる定数 $d$，$r$ を用いて $\Pr(L>k)\sim dr^k$ となっている．

次に系内客数分布の積率を計算する方法を考える．その準備として**確率母関数**（probability generating function）を導入する．[10]非負の整数値を取る確率変数 $X$ に対して

$$G^*(z)=E\left[z^X\right]=\sum_{j=0}^{\infty}\Pr(X=j)z^j,\qquad |z|\le 1$$

を $X$ の確率母関数という．確率母関数 $G^*(z)$ は次の性質をもつ．

1. $G^*(z)$ は $|z|\le 1$ で収束し，$|z|<1$ で何回でも微分可能である．
2. $G^{(n)}(z)$ を $G^*(z)$ の $n$ 階導関数とすると，$E[X^n]<\infty$ ならば $G^{(n)}(1)=E[X(X-1)\cdots(X-n+1)]$ であり，これは $n$ 次の**階乗積率**（factorial moment）と呼ばれる．特に $X$ の平均 $E[X]$ は $G^{(1)}(1)$ で与えられ，2 次積率 $E[X^2]$ は $G^{(2)}(1)+G^{(1)}(1)$ で与えられる．
3. 確率分布と確率母関数は 1 対 1 に対応している．
4. 独立な二つの確率変数 $X$，$Y$ の確率母関数をそれぞれ $G_X^*(z)$，$G_Y^*(z)$ とすると，これらの和 $Z=X+Y$ の確率母関数 $G_Z^*(z)$ は $G_Z^*(z)=G_X^*(z)G_Y^*(z)$ で与えられる．

一方，非負の値を取る（連続）確率変数 $X$ に対しては**ラプラス･スティルチェス変換**（Laplace-Stieltjes transform）がある．[11]非負の確率変数 $X$ の分布関数を $G(x)$ としたとき，確率変数 $X$ に対するラプラス・スティルチェス変換 $G^*(s)$ は

$$G^*(s)=E\left[e^{-sX}\right]=\int_0^{\infty}e^{-sx}dG(x),\qquad \mathrm{Re}(s)>0$$

で与えられる．$X$ の密度関数 $g(x)=dG(x)/dx$ が存在する場合は，

$$G^*(s)=\int_0^{\infty}e^{-sx}g(x)dx$$

であり，密度関数に対する通常のラプラス変換と等価である．ラプラス・スティルチェス変換は密度関数が存在しないような場合に通常のラプラス変換を拡張したものと見ることができる．ラプラス・スティルチェス変換は次の性質をもつ．

1. $G^*(s)$ は $\mathrm{Re}(s)\ge 0$ で収束し，$\mathrm{Re}(s)>0$ で何回でも微分可能である．

[10]確率母関数は Z 変換とも呼ばれる．

[11]ラプラス・スティルチェス変換は離散確率変数に対しても定義できるが，離散確率変数に対しては，通常，確率母関数を用いる．

2. $G^{*(n)}(s)$ を $G(s)$ の $n$ 階導関数とすると，$E[X^n] < \infty$ ならば $G^{*(n)}(0) = (-1)^n E[X^n]$ となる．特に $X$ の平均 $E[X]$ は $-G^{*(1)}(0)$ で与えられ，2 次積率 $E[X^2]$ は $G^{*(2)}(0)$ で与えられる．
3. 確率分布とラプラス・スティルチェス変換は 1 対 1 に対応している．
4. 独立な確率変数 $X$，$Y$ のラプラス・スティルチェス変換をそれぞれ $G_X^*(s)$，$G_Y^*(s)$ とすると，それらの和 $Z = X + Y$ のラプラス・スティルチェス変換 $G_Z^*(s)$ は $G_Z^*(s) = G_X^*(s) G_Y^*(s)$ で与えられる．

以上の準備のもとで $M/G/1$ の客の離脱時点における系内客数分布の確率母関数

$$L^*(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j z^j$$

を導く．$L^*(z)$ は定常状態における系内客数分布の確率母関数に等しいことに注意する．式 (36) の両辺に $z^j$ を掛け，$j = 0$ から無限大まで和を取ると

$$\begin{aligned} L^*(z) &= \pi_0 \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j+1-i} z^j \\ &= \pi_0 A^*(z) + \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z^i \sum_{j=i-1}^{\infty} a_{j+1-i} z^{j+1-i} \\ &= \pi_0 A^*(z) + \frac{1}{z} \left( L^*(z) - \pi_0 \right) A^*(z) \end{aligned} \tag{40}$$

を得る．ただし $A^*(z)$ は任意に選ばれた客のサービス時間の間に到着する客数の確率分布 $\{a_k; k = 0, 1, \ldots\}$ の確率母関数であり

$$\begin{aligned} A^*(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dH(x) z^k \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z x)^k}{k!} dH(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda(1-z)x} dH(x) \end{aligned}$$

で与えられる．ここで，サービス時間分布のラプラス・スティルチェス変換

$$H^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dH(x)$$

を用いれば

$$A^*(z) = H^*(\lambda - \lambda z)$$

となる．式 (40) を $L^*(z)$ について解くと

$$L^*(z) = \frac{\pi_0 (z-1) H^*(\lambda - \lambda z)}{z - H^*(\lambda - \lambda z)}$$

を得る．右辺に現れる未知数 $\pi_0$ は正規化条件 $L^*(1) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ を用いて定めることができる．すなわち

$$1 = \lim_{z \to 1-} L^*(z) = \frac{\pi_0}{1 - \rho} \tag{41}$$

となるので，$\pi_0 = 1 - \rho$ が得られ $L^*(z)$ が完全に決定される．

**定理 28** (**$M/G/1$ の系内客数分布の母関数**) $\rho < 1$ のとき，$M/G/1$ の系内客数分布 $\{p_k; k = 0, 1, \ldots\}$ の確率母関数 $L^*(z)$ は

$$L^*(z) = \frac{(1-\rho)(z-1) H^*(\lambda - \lambda z)}{z - H^*(\lambda - \lambda z)} \tag{42}$$

で与えられる．

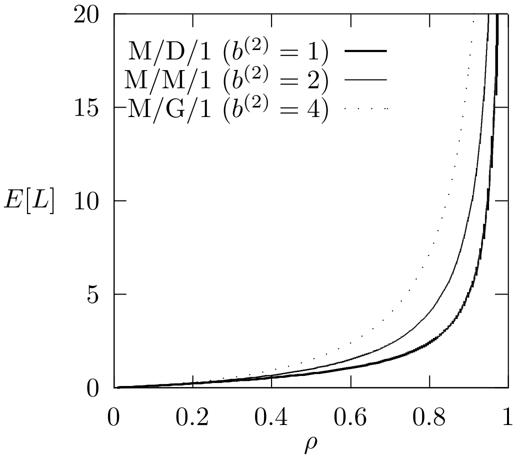



図 23: $M/G/1$ の平均系内客数（$b=1$）

確率母関数の性質より，$L^*(z)$ を微分することで系内客数分布の階乗積率を求めることができる．定常状態における系内客数分布の $n$ 次の階乗積率を $L^{(n)}$ とし，$b^{(n)}$ をサービス時間分布の $n$ 次積率とする．式 (42) の右辺の分母を払った上，両辺を $n+1$ 回微分し，$z \to 1$ とすれば，系内客数分布の階乗積率は次の再帰式を満たすことを示すことができる．

$$L^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} \frac{\lambda^{n+1-k} b^{(n+1-k)} L^{(k)}}{(n+1)(1-\rho)} + \lambda^n b^{(n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{43}$$

ただし $L^{(0)} = 1$ とした．特に平均系内客数 $E[L] = L^{(1)}$ は

$$E[L] = \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \rho$$

で与えられる．さらにリトルの公式より，平均滞在時間 $E[W]$ は

$$E[W] = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + b$$

となる．図 23 は利用率 $\rho$ に対して平均系内客数を示したものである．平均系内客数 は利用率 $\rho$ のみならず，サービスの変動要因 $b^{(2)}$ にも依存することに注意する．特に $\rho$ が比較的大きい場合，$b^{(2)}$ の影響が顕著になる．また，いずれの場合も $\rho$ が 1 に近付くと平均系内客数が急激に増大することが分かる．

#### 4.2.2 $M/G/1/K$ の系内客数分布

到着率 $\lambda$，サービス時間分布関数 $H(x)$，平均サービス時間 $b$ をもつ $M/G/1/K$ を考える．システム容量が $K$ なので，ある客の到着時に系内客数が $K$ 人であれば，この客は棄却され呼損となる．例 24 において，ルータのバッファが高々 $K$ パケットしか保持できないと仮定すれば，そのようなルータの振舞いは $M/G/1/K$ でモデル化できる．

定常状態における系内客数分布を導くため，$M/G/1$ の場合と同じく，客の離脱直後に注目する．$X_n$ を $n$ 番目の客の離脱直後の系内客数とし，$A_n$ を $n$ 番目の客のサービス中に新たに到着する客数とする．システムには高々 $K$ 人の客しか存在し得ないので，離脱直後の系内客数は高々 $K-1$ であることに注意する．$M/G/1/K$ の系内客数の振舞いは，この点を除けば M/G/1 と同じであるので，$M/G/1$ において客数が $K-1$ 以上に遷移する場合は，$M/G/1/K$ では全て状態 $K-1$ に遷移することになる．すなわち

$$X_{n+1} = \min(\max(X_n - 1, 0) + A_{n+1}, K-1)$$

が成立する．この式より $M/G/1$ の場合と同様に $X_n$ はマルコフ性をもち，客の離脱直後は隠れマルコフ点となることがわかる．

さらに $M/G/1$ の場合と同様の議論により，遷移確率 $p_{i,j}$（$i,j=0,1,\ldots,K-1$）は次式で与えられる．

$$p_{0,j}=\begin{cases} a_j, & j=0,1,\ldots,K-2,\\ \overline{a}_{K-1}, & j=K-1 \end{cases}$$

$$p_{i,j}=\begin{cases} 0, & i=1,\ldots,K-1, j=0,\ldots,i-2,\\ a_{j+1-i}, & i=1,\ldots,K-1, j=i-1,\ldots,K-2,\\ \overline{a}_{K-i}, & i=1,\ldots,K-1, j=K-1 \end{cases}$$

ただし

$$\overline{a}_j=\sum_{i=j}^{\infty}a_i=1-\sum_{i=0}^{j-1}a_i$$

である．よって客の離脱直後の系内客数の遷移確率行列 $\boldsymbol{P}^{(K)}$ は

$$\boldsymbol{P}^{(K)}=\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{K-2} & \overline{a}_{K-1}\\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_{K-2} & \overline{a}_{K-1}\\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{K-3} & \overline{a}_{K-2}\\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{K-4} & \overline{a}_{K-3}\\ 0 & 0 & 0 & a_0 & \ldots & a_{K-5} & \overline{a}_{K-4}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & \overline{a}_1 \end{pmatrix}$$

で与えられ，定常状態分布 $\boldsymbol{\pi}^{(K)}=(\pi_j^{(K)})$ は

$$\boldsymbol{\pi}^{(K)}=\boldsymbol{\pi}^{(K)}\boldsymbol{P}^{(K)},\qquad \sum_{j=0}^{K-1}\pi_j^{(K)}=1$$

を満たす．$\boldsymbol{\pi}^{(K)}=\boldsymbol{\pi}^{(K)}\boldsymbol{P}^{(K)}$ を要素毎に書き下せば

$$\pi_j^{(K)}=\pi_0^{(K)}a_j+\sum_{i=1}^{j+1}\pi_i^{(K)}a_{j+1-i},\qquad j=0,\ldots,K-2 \tag{44}$$

$$\pi_{K-1}^{(K)}=\pi_0^{(K)}\overline{a}_{K-1}+\sum_{i=1}^{K-1}\pi_i^{(K)}\overline{a}_{K-i}$$

である．$\pi_j^{(K)}$ が満たすべき方程式は $\boldsymbol{\pi}^{(K)}=\boldsymbol{\pi}^{(K)}\boldsymbol{P}^{(K)}$ から $K$ 個得られるが，行列 $\boldsymbol{P}^{(K)}$ のランクは $K-1$ であるので，その内一つは冗長である．よって，例えば，上に挙げた式 (44) と正規化条件 $\sum_{j=0}^{K-1}\pi_j^{(K)}=1$ によって $\pi_j^{(K)}$ は一意に決定される．

ここで $j=0,\ldots,K-2$ の場合，$\pi_j^{(K)}$ は $M/G/1$ における式 (36) と同じ式を満たしていることに注意する．これより，$\pi_0^{(K)}$ に対して適当な正の初期値を与え，順次 $\pi_j^{(K)}$（$j=1,\ldots,K-1$）を式 (37) より計算し，確率の総和が 1 となるように正規化してやれば客の離脱時点における定常状態確率を求めることができる．

次に，定常状態において任意に選ばれた時点における系内客数分布 $\{p_j^{(K)}; j=0.1.\ldots,K\}$ を求める．客の離脱直後の系内客数は高々 $K-1$ であるが，任意に選ばれた時点における系内客数は $K$ である可能性があることに注意する．客の到着はポワソン過程に従っているため，呼損率は系内に $K$ 人の客がいる定常状態確率 $p_K^{(K)}$ に等しい．さらに到着した客が系内に収容されるという条件の下で，その客が到着直前に見る客数分布は離脱直後の客数分布に等しいため，

$$\frac{p_j^{(K)}}{1-p_K^{(K)}}=\pi_j^{(K)},\qquad j=0,\ldots,K-1 \tag{45}$$

を得る．特に $j=0$ を考えると

$$p_0^{(K)} = \left(1 - p_K^{(K)}\right) \pi_0^{(K)} \tag{46}$$

が成立する．

一方，単位時間当たりにサービスを開始する平均客数は $\left(1 - p_K^{(K)}\right)\lambda$ であり，サーバでの平均滞在時間は $b$ なので，$\rho = \lambda b$ とするとリトルの公式よりサーバにいる平均客数，すなわちサーバが稼働している確率は $\left(1 - p_K^{(K)}\right)\rho$ で与えられる．すなわち

$$p_0^{(K)} = 1 - \left(1 - p_K^{(K)}\right)\rho \tag{47}$$

が成立する．

よって，式 (46) 及び式 (47) より

$$\left(1 - p_K^{(K)}\right)\pi_0^{(K)} = 1 - \left(1 - p_K^{(K)}\right)\rho \tag{48}$$

となり，これを $p_K^{(K)}$ について解けば $p_K^{(K)}$ が得られる．一方，式 (45) より $p_j^{(K)} = (1-p_K^{(K)})\pi_j^{(K)}$ $(j = 0,\ldots,K-1)$ なので次の定理を得る．

**定理 29** $\pi_j^{(K)}$ $(j = 0,\ldots,K-1)$ を式 (37) を満たし，かつ，和が 1 である正数とする．このとき $M/G/1/K$ の系内客数分布 $\{p_j^{(K)}; j = 0,\ldots,K\}$ は

$$p_j^{(K)} = \frac{\pi_j^{(K)}}{\pi_0^{(K)} + \rho}, \qquad j = 0,\ldots,K-1$$
$$p_K^{(K)} = 1 - \frac{1}{\pi_0^{(K)} + \rho}$$

で与えられる．

システム容量が有限の場合には呼損率（到着客の内，呼損となる客の割合）に興味がある．呼損率は客平均量であるが，3.2.2 節の $M/M/1/K$ の場合と同じ理由により，$M/G/1/K$ における呼損率は時間平均量である $p_K^{(K)}$ に等しい．

もし $\rho < 1$ ならば，$M/G/1/K$ の離脱直後の系内客数分布は，$M/G/1$ において離脱直後の系内客数が $K-1$ 以下であるという条件の下での離脱直後の条件付き系内客数分布に等しいことがわかる．なぜならば，式 (37) は両方のモデルに対して成立し，この式によって $\pi_j$ ならびに $\pi_j^{(K)}$（$j = 0,\ldots,K-1$）の比が完全に決定されるからである．さらに，$\pi_j = p_j$ であるので次式を得る．

$$\pi_j^{(K)} = \frac{\pi_j}{\sum_{k=0}^{K-1} \pi_k} = \frac{p_j}{\sum_{k=0}^{K-1} p_k}, \qquad j = 0,\ldots,K-1$$

このように $\rho < 1$ の場合，定常状態における $M/G/1/K$ の系内客数分布は，対応する $M/G/1$ の定常状態系内客数分布を用いて表すことができる．

さらに，$\rho < 1$ の仮定の下で，対応する $M/G/1$ における客数の裾野分布 $\overline{p}_K$ を次式で定義する．

$$\overline{p}_K = \sum_{j=K}^{\infty} p_j = 1 - \sum_{j=0}^{K-1} p_j$$

$\overline{p}_K$ は $M/G/1$ において系内客数が $K$ 以上である定常状態確率である．$p_0 = 1 - \rho$ ならびに $\pi_0^{(K)} = p_0/(1 - \overline{p}_K)$ に注意して呼損率 $p_K^{(K)}$ を書き換えると

$$p_K^{(K)} = 1 - \frac{1}{\dfrac{1-\rho}{1-\overline{p}_K} + \rho} = 1 - \frac{1 - \overline{p}_K}{1 - \rho\overline{p}_K} = \frac{(1-\rho)\overline{p}_K}{1 - \rho\overline{p}_K} \tag{49}$$

を得る．このように $\rho < 1$ の場合，$M/G/1/K$ の呼損率 $p_K^{(K)}$ は対応する $M/G/1$ の利用率 $\rho$ と裾野分布 $\overline{p}_K$ を用いて表現できる．

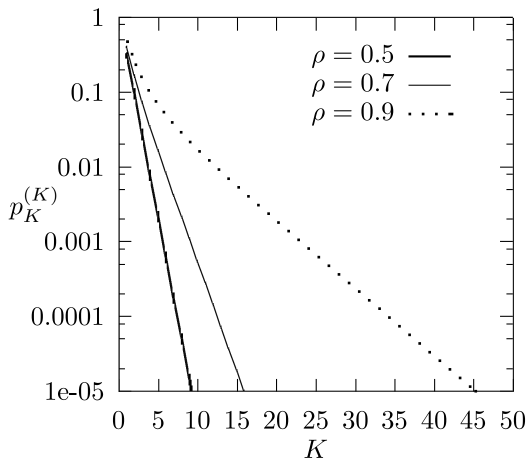



図 24: $M/D/1/K$ の呼損率（$b = 1$）

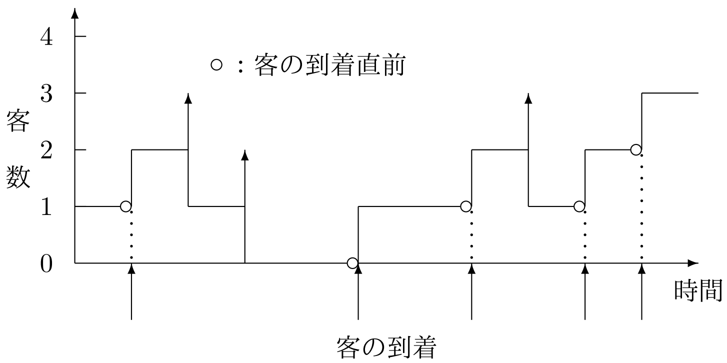



図 25: $GI/M/1$ の客数の変化

図 24 はサービス時間が 1 である $M/D/1/K$ の呼損率 $p_K^{(K)}$ を対数軸で示している．図より，大きな $K$ の値に対して呼損率はシステム容量に対して一定の率で減少することがわかる．この性質は次のように説明できる．まず，図 22 で説明したように多くの単一サーバ待ち行列モデルでは裾野分布 $\overline{p}_K$ は等比級数的に減少する．一方，式 (49) より $p_K^{(K)} = (1-\rho)\overline{p}_K + o(\overline{p}_K)$ であるので，十分小さな呼損率に対しては $p_K^{(K)} \approx (1-\rho)\overline{p}_K$ となる．よって $K$ が大きくなると呼損率も等比級数的に減少する．この性質は，ルータが $M/G/1/K$ でモデル化可能であれば，ルータのバッファ容量を 2 倍にすることで呼損率をおよそ一桁小さくできることを示している．

#### 4.2.3　$GI/M/1$ の客数分布

到着間隔が平均 $\lambda^{-1}$ をもつ独立同一な分布関数 $G(x)$ に従い，サービス時間がパラメタ $\mu$ の指数分布に従う $GI/M/1$ を考える．

**例 30** 十分に大きなバッファをもつルータがあり，出力回線の容量は $C$ bps であるとする．パケットの到着間隔（秒）が独立同一な分布関数 $G(x)$ に従い，パケット長（byte）はパラメタ $\mu$ の指数分布に従うとする．このとき，ルータ内のパケット数の振舞いは，到着間隔分布関数 $G(x)$ とパラメタ $\mu C/8$ の指数サービスをもつ $GI/M/1$ でモデル化できる．

以下では利用率を $\rho = \lambda/\mu$ とし，$\rho < 1$ であると仮定する．定常状態における系内客数分布を導くため，客の到着直前の系内客数に注目する．$Y_n$ を $n$ 番目の客の到着直前の系内客数とし，$B_n$ を $n-1$ 番目と $n$ 番目の到着の間に離脱した客数とする．図 25 に $GI/M/1$ の客数の変化を示す．

$n$ 番目の客の到着直後の系内客数は $Y_n+1$ であり，この後，次の到着までに $B_{n+1}$ 人の客が離脱するので，$Y_n$ は次式を満たす．

$$Y_{n+1} = Y_n + 1 - B_{n+1} \geq 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

さらに $Y_n = i$ $(i = 0, 1, \ldots)$ という仮定の下で，ある客の到着直前から次の客の到着直前までの間に $k$ 人（$k = 0, \ldots, i$）の客がサービスを受けて離脱する確率を $b_k$ とする．もし到着間隔が $x$ であれば，$b_k$ は $x$ の間に率 $\mu$ で $k$ 人の客のサービスが終了する確率となり，これは平均 $\mu x$ のポワソン分布に従う．よって $Y_n = i$ のとき $b_k$（$k = 0, \ldots, i$）は

$$b_k = \int_0^\infty e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^k}{k!} dG(x)$$

で与えられ，このとき $Y_{n+1} = i + 1 - k$ となる．一方，$i+1$ 人全てのサービスが終了する場合，$Y_{n+1} = 0$ となり，このような事象は確率 $1 - \sum_{k=0}^{i} b_k$ で起こる．以上の議論より，客の到着直前の系内客数に対する遷移確率は

$$p_{i,j} = \begin{cases} \bar{b}_{i+1} & j = 0 \\ b_{i+1-j}, & j = 1, \ldots, i+1 \\ 0, & j = i+2, i+3, \ldots \end{cases}$$

で与えられる．ただし

$$\bar{b}_k = \sum_{i=k}^{\infty} b_i$$

である．よって遷移確率行列 $\boldsymbol{P}$ は

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \bar{b}_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \bar{b}_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ \bar{b}_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & \ldots \\ \bar{b}_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots \\ \bar{b}_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

となり，到着直前の客数の定常状態確率ベクトル $\boldsymbol{\pi} = (\pi_j)$ は

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}, \qquad \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$$

を満たす．$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{P}$ を要素毎に書き下せば

$$\pi_0 = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i \bar{b}_{i+1}, \qquad \pi_j = \sum_{i=j-1}^{\infty} \pi_i b_{i+1-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{50}$$

である．

さて，式 (50) の 2 番目の式を $\gamma$ 倍したものと 2 番目の式で $\pi_{j+1}$ に対応するものの差を取ると

$$\gamma\pi_j - \pi_{j+1} = \sum_{i=j-1}^{\infty} (\gamma\pi_i - \pi_{i+1}) b_{i+1-j}, \qquad j = 1, 2, \ldots \tag{51}$$

が成立する．よって，もし $0 < \gamma < 1$ なる $\gamma$ に対して

$$\gamma\pi_j = \pi_{j+1} \tag{52}$$

であるならば，式 (51) の両辺は等しくなるため，式 (50) の 2 番目の式が成立し，$\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ より

$$\pi_j = (1-\gamma)\gamma^j, \qquad j = 0, 1, \ldots \tag{53}$$

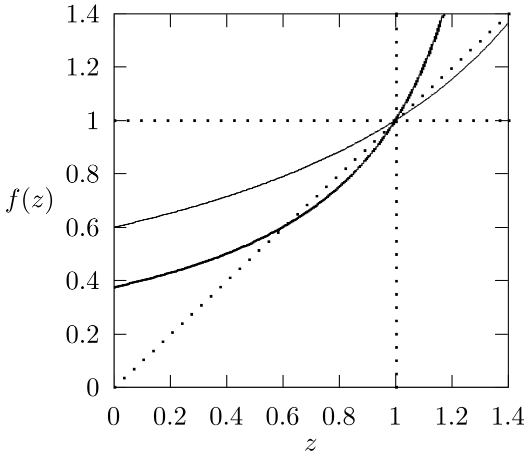



図 26: $f(z) = G^*(\mu - \mu z)$ の挙動

となる．さらに，もし，式 (53) で与えられる $\pi_j$ が式 (50) の 1 番目の式を満たせば，定常状態確率を支配する全ての制約を満たすことになる．定常状態が存在すればそれは唯一の定常状態確率をもつため，このとき式 (53) で与えられる $\pi_j$ は定常状態確率に他ならない．

よって，以下では式 (53) を仮定し，$\gamma$ を求めることを考える．式 (50) の 1 番目の式に式 (53) を代入すると

$$1 - \gamma = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\gamma)\gamma^i \bar{b}_{i+1}$$

となり，これより

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \gamma^i \bar{b}_{i+1} = \frac{1 - G^*(\mu - \mu\gamma)}{1-\gamma} \tag{54}$$

を得る．ただし $G^*(s)$ は分布関数 $G(x)$ のラプラス・スティルチェス変換であり

$$G^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dG(x)$$

で与えられる．それゆえ，もし

$$\gamma = G^*(\mu - \mu\gamma) \tag{55}$$

なる $0 < \gamma < 1$ が存在すれば，到着直前の定常状態確率 $\pi_j$ は式 (55) を満たす $\gamma$ を用いて式 (53) で与えられることになる．

$0 < \gamma < 1$ なる $\gamma$ が存在するための条件は次のようにして得られる．$f(z) = G^*(\mu - \mu z)$ とおくと，$f(0) > 0$, $f(1) = 1$ であり，$df(z)/dz = -\mu dG^*(s)/ds > 0$ かつ $d^2 f(z)/dz^2 = \mu^2 d^2 G^*(s)/ds^2 > 0$ であるので，$z = f(z)$ が区間 (0,1) 内に解を持つための条件は $df(z)/dz|_{z=1-} > 1$ である（図 26 参照）．ここで

$$\frac{d}{dz} f(z)|_{z=1} = -\mu \frac{d}{ds} G^*(s)|_{s=0} = -\mu \times -\lambda^{-1} = \rho^{-1}$$

なので，$\rho < 1$ ならば $df/dz|_{z=1-} > 1$ であり，式 (55) を満たす $\gamma$ は区間 (0,1) 内に唯一存在する．

次に定常状態における任意に選ばれた時点で系内客数が $j$ 人である確率 $p_j$ を到着直前における系内客数の定常確率 $\pi_j$ を用いて表すことを考える．単位時間当たりに到着する平均客数は $\lambda$ で与えられ，到着客は確率 $\pi_j$ で到着時に $j$ 人の客を見る．よって，単位時間当たりに系内客数が $j$ 人から $j+1$ 人へ変化する平均回数は $\lambda\pi_j$ で与えられる．一方，$j+1$ 人から $j$ 人への変化は，ある時点で $j+1$ 人の客がおり，サービスが終了したとき起こる．よって，単位時間当たりに系内客数が $j+1$ 人から $j$ 人へ変化する平均回数は $\mu p_{j+1}$ で与えられる．一方，

補題 26 より，定常状態では系内客数が $j$ 人から $j+1$ 人へ変化する平均回数は $j+1$ 人から $j$ 人へ変化する平均回数に等しい．よって

$$\lambda\pi_j = \mu p_{j+1}, \qquad j = 0, 1, \ldots$$

が成立し

$$p_j = \rho\pi_{j-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

となる．また $p_0 = 1 - \sum_{j=1}^{\infty} p_j$ なので $p_0 = 1 - \rho$ となる．[12]以上をまとめて次の定理を得る．

**定理 31** $\rho < 1$ のとき，定常状態における $GI/M/1$ の系内客数分布 $\{p_j; j = 0, 1, \ldots\}$ は式 (55) を満たす唯一の $\gamma \in (0, 1)$ を用いて

$$p_0 = 1 - \rho$$
$$p_j = \rho(1-\gamma)\gamma^{j-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots$$

で与えられる．

また，定理 31 ならびにリトルの公式より，$GI/M/1$ の平均系内客数 $E[L]$ と平均系内滞在時間 $E[W]$ はそれぞれ

$$E[L] = \frac{\rho}{1-\gamma}, \qquad E[W] = \frac{1}{\mu(1-\gamma)}$$

で与えられる．$M/G/1$ の平均系内客数ならびに平均系内滞在時間がサービス時間分布の平均と 2 次積率で決まるのに対し，$GI/M/1$ では $\gamma$ が到着間隔分布の関数になっているため，確率分布そのものに依存していることに注意する．$GI/M/1$ において到着間隔分布が性能に与える影響については次節で改めて論じる．

## 演習問題

### ４章の授業内容確認

**問 4.1 離散時間マルコフ連鎖 (1)**

以下の問いに答えよ．

(1) 確率変数列 $X_n$（$n = 0, 1, \ldots$）がどのような性質を持てば離散時間マルコフ連鎖と呼ばれるか述べよ．
(2) マルコフ性とはどのような性質を指すか述べよ．
(3) 離散時間マルコフ連鎖のある状態が再帰的であるとはどういう意味か．また過渡的であるとはどういう意味か．
(4) さらに再帰的な状態は正再帰的なものと零再帰的なものに分けられる．それぞれどういう意味か．
(5) 既約な離散時間マルコフ連鎖とはどのようなものか．

**問 4.2 離散時間マルコフ連鎖 (2)**

２状態 0, 1 からなる離散時間マルコフ連鎖 $X_n$ を考える．ある $0 < p, q, < 1$ に対して推移確率が $\Pr(X_{n+1} = 1 \mid X_n = 0) = p$，$\Pr(X_{n+1} = 0 \mid X_n = 1) = q$ で与えられるとする．

(1) 遷移確率行列 $\boldsymbol{P}$ を書き下せ．
(2) 定常状態確率 $\pi_i$（$i = 0, 1$）を求めよ．
(3) $n$ ステップ遷移確率行列 $\boldsymbol{P}^{[n]}$ を求めよ．
(4) 時刻 0 において確率 $\alpha$ で状態 0 にあるとする（$\Pr(X_0 = 0) = \alpha$）．このとき，$\Pr(X_n = 0)$ および $\Pr(X_n = 1)$（$n = 1, 2, \ldots$）を求めよ．
(5) 極限分布 $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 0)$ および $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 1)$ を求め，定常状態確率と比較せよ．

**問 4.3 $M/G/1$ の系内客数分布 (1)**

到着率 $\lambda$，サービス時間の密度関数が $h(x)$，平均サービス時間 $b$ の $M/G/1$ を考える．利用率 $\rho = \lambda b < 1$ とする．

(1) 一つのサービス時間の間に $k$ 人の客が到着する確率 $a_k$ を求めよ．特にサービス時間がパラメタ $\mu$ の指数分布に従う場合，$a_k$ はどのようになるか．
(2) $n$ 番目の客の離脱直後の系内客数を $X_n$ とする．$p_{0,j} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = 0)$（$j = 0, 1, \ldots$）を $a_k$ を用いて表せ．
(3) 同様に，$i = 1, 2, \ldots$ に対して $p_{i,j} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$（$j = 0, 1, \ldots$）を $a_k$ を用いて表せ．
(4) 定常状態において客の離脱直後の系内客数が $j$ 人（$j = 0, 1, \ldots$）である確率を $\pi_j$ とする．$\pi_j$ が満たす式を示せ．
(5) 以下の関係が成立することを示せ．また，この式はどのような確率的解釈が出来るか述べよ．

$$\pi_k a_0 = \pi_0 \left(1 - \sum_{j=0}^{k-1} a_j\right) + \sum_{i=1}^{k-1} \pi_i \left(1 - \sum_{j=0}^{k-i} a_j\right)$$

[12]システムが空である確率が $1-\rho$ であることから，この結果は自明である．

(6) 定常状態における任意の時点で系内客数が $j$ 人（$j=0,1,\ldots$）である確率を $p_j$ とする．$p_j=\pi_j$ となる理由を述べよ．
(7) リトルの公式と (6) の結果を併用して $\pi_0$ を決定せよ．

**問 4.4 母関数 (1)**

以下の問いに答えよ．
(1) パラメタ $\mu$ をもつ指数分布のラプラス・スティルチェス変換 $G^*(s)$ を求めよ．
(2) 平均 $\rho$ のポワソン分布の確率母関数 $P^*(z)$ を求めよ．

**問 4.5 母関数 (2)**

到着率 $\lambda$，サービス率 $\mu$ の定常な $M/M/1$ における系内客数分布は幾何分布 $p_j=(1-\rho)\rho^j$ で与えられる．ただし $\rho=\lambda/\mu<1$ である．
(1) 系内客数の確率母関数 $L^*(z)$ を求めよ．
(2) 定常状態における平均系内客数 $E[L]$ を求めよ．
(3) 定常状態における平均待ち時間 $E[W_q]$ を求めよ．

**問 4.6 $M/G/1$ の系内客数分布 (2)**

前々問と同じ $M/G/1$ を考える．
(1) サービス時間分布のラプラス・スティルチェス変換を $H^*(s)$ とする．前問 (1) で求めた $a_k$ の確率母関数（Z 変換）$A^*(z)$ を $H^*(s)$ を用いて表せ．
(2) 前問 (4) で求めた関係式を元に，$\pi_j$ の確率母関数（Z 変換） $L^*(z)$ を $\pi_0$ ならびに $A^*(z)$ を用いて表せ．
(3) 確率母関数の性質 $L^*(1)=1$ を利用して $\pi_0$ を決定せよ．
(4) $L^*(z)$ を微分することにより，平均系内客数 $E[L]$ を求めよ．ただし，サービス時間の 2 次積率を $b^{(2)}$ とする．
(5) リトルの公式を利用して平均待ち時間 $E[W_q]$ を求めよ．
(6) 式 (43) を導け.（ヒント：式 (42) の右辺の分母を払ってから微分せよ．先に $\lim_{z\to 1} d^nH^*(\lambda-\lambda z)/dz^n$ を求めておく．一般に分数で与えられる関数の微分は分母をはらってから微分した方が遙かに効率がよい.）

**問 4.7 $M/G/1/K$ (1)**

到着率 $\lambda$，サービス時間の密度関数が $h(x)$，平均サービス時間 $b$，システムの容量が $K$ 人である $M/G/1/K$ を考える．$\rho=\lambda b$ とせよ．
(1) 一つのサービス時間の間に $k$ 人の客が到着する確率 $a_k$ を求めよ．さらに，一つのサービス時間の間に $k$ 人以上の客が到着する確率 $\overline{a}_k$ を求めよ．
(2) $n$ 番目の客の離脱直後の系内客数を $X_n$ とする．$X_n$ の取り得る範囲を示せ．
(3) $p_{0,j}=\Pr(X_{n+1}=j\mid X_n=0)$（$j=0,1,\ldots,K-1$）を $a_k$，$\overline{a}_k$ を用いて表せ．
(4) 同様に，$i=1,2,\ldots$ に対して $p_{i,j}=\Pr(X_{n+1}=j\mid X_n=i)$（$j=0,1,\ldots,K-1$）を $a_k$，$\overline{a}_k$ を用いて表せ．
(5) 定常状態において系内客数が $j$ 人である確率を $\pi_j^{(K)}$ とする．$\pi_j^{(K)}$ が満たす式を示せ．
(6) 以下の関係が成立することを示せ．また，この式はどのような確率的解釈が出来るか述べよ．

$$\pi_j^{(K)}a_0=\pi_0^{(K)}\overline{a}_j+\sum_{i=1}^{j-1}\pi_i^{(K)}\overline{a}_{j-i+1},\qquad j=1,\ldots,K-1$$

(7) 前問の結果を用いて $\pi_j^{(K)}$（$j=0,1,\ldots,K-1$）を求める手順について述べよ．
(8) 定常状態における任意の時点で系内客数が $j$ 人（$j=0,1,\ldots,K$）である確率を $p_j^{(K)}$ とする．$\pi_j^{(K)}$（$j=0,1,\ldots,K$）を $p_j^{(K)}$ を用いて表せ．
(9) リトルの公式を用いてサービス中である確率 $1-p_0^{(K)}$ が $(1-p_K^{(K)})\rho$ で与えられることを示せ．
(10) 前問の結果ならびに $j=0$ に対する (8) の結果を用いて $p_K^{(K)}$ を $\pi_0^{(K)}$ を用いて表せ．
(11) 最後に (8)，(10) の結果を利用して $p_j^{(K)}$（$j=0,1,\ldots,K-1$）を $\pi_j^{(K)}$ を用いて表せ．
(12) $p_K^{(K)}$ が呼損率（到着した客がシステムに入れない確率）を与える理由を述べよ．

**問 4.8 $M/G/1/K$ (2)**

$\rho<1$ の仮定の下で，前問と同じ M/G/1/K と $K\to\infty$ の場合に対応する $M/G/1$ の間の関係を考える．$M/G/1$ の定常状態における系内客数 $L$ の確率関数を
(1) $p_j=\Pr(L=j)$（$j=0,1,\ldots$）とする．

$$p_j^{(K)}=\frac{p_j}{\displaystyle\sum_{k=0}^{K-1}p_k}$$

が成立する理由を述べよ．
(2) $M/G/1$ の定常状態における系内客数 $L$ の補分布 $\overline{p}_k$ を

$$\overline{p}_k=\Pr(L\geq k)=\sum_{j=k}^{\infty}p_j=1-\sum_{j=0}^{k-1}p_j$$

で定義する．呼損率 $p_K^{(K)}$ を $\rho$ と $\overline{p}_K$ を用いて表せ．

**問 4.9 $GI/M/1$ の系内客数分布 (1)**

到着間隔が平均 $\lambda^{-1}$ をもつ独立同一な分布関数 $G(x)$ に従い，サービス時間がパラメタ $\mu$ の指数分布に従う定常な $GI/M/1$ を考える
(1) サービス中である確率（利用率）$\rho$ を求めよ．
(2) 十分な数のサービスを待っている客がいる場合，客の到着間隔の間に $k$ 人の客のサービスが終了する確率 $b_k$ を求めよ．

(3) $n$ 番目の客の到着直前の系内客数を $X_n$ とする．$i = 0, 1, \ldots$ に対して $p_{i,j} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ （$j = 0, 1, \ldots$）を $b_k$ ならびに $\bar{b}_k = \sum_{i=k}^{\infty}$ を用いて表せ．
(4) 定常状態において客の到着直前の系内客数が $j$ 人（$j = 0, 1, \ldots$）である確率を $\pi_j$ とする．$\pi_j$ が満たす式を示せ．
(5) あるパラメタ $\gamma$ $(0 < \gamma < 1)$ を用いて，$\pi_j = \pi_0 \gamma^j$ （$j = 0, 1, \ldots$）であると仮定する．このとき $\pi_0$ を $\gamma$ を用いて表せ．
(6) $\pi_j = \pi_0 \gamma^j$ （$j = 0, 1, \ldots$）であると仮定したとき，$\gamma$ が満たすべき方程式を導け．
(7) 前問の方程式が $0 < \gamma < 1$ なる解を唯一もつ条件を示せ．

**問 4.10 $GI/M/1$ の系内客数分布 (2)**

前問と同じ定常な $GI/M/1$ を考える定常状態において客の到着直前の系内客数が $j$ 人（$j = 0, 1, \ldots$）である確率を $\pi_j$，定常状態における任意の時点の系内客数が $j$ 人（$j = 0, 1, \ldots$）である確率を $p_j$ とする．
(1) 定常状態において，単位時間当たりに系内客数が $j$ 人から $j + 1$ 人に変化する平均回数を求めよ．
(2) 定常状態において，単位時間当たりに系内客数が $j + 1$ 人から $j$ 人に変化する平均回数を求めよ．
(3) 定常状態において，単位時間当たりに系内客数が $j$ 人から $j + 1$ 人に変化する平均回数と系内客数が $j + 1$ 人から $j$ 人に変化する平均回数は等しくなる．また，$\pi_j$ （$j = 0, 1, \ldots$）は，ある定数 $\gamma$ （$0 < \gamma < 1$）を用いて $\pi_j = (1 - \gamma)\gamma^j$ で与えられる．これらの結果を利用して $p_j$ を $\gamma$ と $\rho$ を用いて表せ．

## 練習問題

**問 4.11**

式 (42) の $L^*(z)$ の分母を払い，両辺を $n + 1$ 回微分することにより，式 (43) を導け．

**問 4.12**

非負整数値をとる確率変数 $X$ の母関数を $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X = k) z^k$ とする．一方，$Z_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を独立同一な Bernoulli 確率変数列，すなわち，$\Pr(Z_n = 0) = 1 - p$, $\Pr(Z_n = 1) = p$ を満たすとする．確率変数 $Y$ を $Y = \sum_{n=1}^{X} Z_n$ としたとき，
(1) $Y$ の母関数を求めよ．
(2) $Y = X$ という条件下での $X$ の母関数を求めよ．
(3) 全ての $p$ $(0 < p < 1)$ に対して (1) と (2) の分布が等しいとき，$X$ はどのような分布に従うか（最初に $F(1-p)F(p) = F(0)$ を示し，$F(1 - p + pz)/F(0) = [F(1 - p)/F(0)] \cdot [F(pz)/F(0)]$ を導く）．

**問 4.13**

確率変数列 $X_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ はラプラス・スティルチェス変換 $G^*(s) = E[e^{-sX}]$ をもつ独立同一分布に従うとする．ここで，平均 $\lambda$ のポワソン分布に従う確率変数 $N$ を用いて新しい確率変数 $Y$ を考える．

$$Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$$

$Y$ のラプラス・スティルチェス変換 $Y^*(s) = E[e^{-sY}]$ を求めよ．

**問 4.14**

到着率 $\lambda$ のポワソン過程に従い客が到着し，サービス時間が到着時のサーバの状態に応じて，稼働していない場合は確率密度関数 $b_1(t)$（平均 $b_1$），稼働している場合は確率密度関数 $b_2(t)$（平均 $b_2$）に従う先着順サービス $M/G/1$ を考える．確率密度関数 $b_i(t)$（$i = 1, 2$）のラプラス変換を $B_i^*(s)$ で表す．
(1) 確率密度関数 $b_i(t)$（$i = 1, 2$）に従うサービス中に $k$ 人の客が到着する確率を $a_k^{(i)}$ としたとき，$a_k^{(i)}$ の確率母関数 $A_i(z)$ を $B_i^*(s)$ を用いて示せ．
(2) 客の離脱時点において $n$ 人の客がシステムにいる定常確率 $\pi_n$ の確率母関数 $\Pi(z)$ を $\lambda$ ならびに $A_i(z)$，$b_i$ （$i = 1, 2$）を用いて表せ．
(3) $\Pi(z)$ は任意時点における客数分布の確率母関数とみなせる理由を述べよ．

**問 4.15**

通常の待ち行列では，サービスを待っている客がいる時はサーバは必ずサービスを行い，システムが空の時のみ停止する．ここでは，サービスを待っている客がいる場合でも，サーバが停止する（休暇をとる）以下のような単一サーバシステムを考える．システム内に客がいなくなると，サーバは待ち客数が $N$ 人（$N \geq 1$）になるまで休暇をとる．$N$ 人目の客が到着すると直ちにそれらの客に対して先着順でサービスを開始し，再びシステムが空になるまで連続してサービスを行い，空になると再び休暇をとるという動作を繰り返す．このようなシステムにおいて，客の到着が率 $\lambda$ のポワソン過程に従い，客のサービス時間が独立かつ同一な一般分布に従う場合を考える．サービス時間の分布関数を $B(x)$，そのラプラス・スティルチェス変換形を $B^*(s)$，平均を $b$ として，(1) から (5) の問いに答えよ．
(1) $A$ を一つのサービス時間の間に新たに到着する客の数とする．$A$ の確率母関数 $A(z)$ を $\lambda$ ならびに $B^*(s)$ を用いて表せ．
(2) $X_n$ を $n$ 番目の客のサービスが終了した直後のシステム内客数とし，$p_{i,j} = \Pr(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$ と定義する．$i = 0$ と $i \geq 1$ の場合に分けて考えることにより，$p_{i,j}$ を $a_k$ を用いて表せ．
(3) システムが定常状態にあると仮定する．サービス終了直後のシステム内客数が $k$ 人である定常確率を $\pi_k$ としたとき，$\pi_k$ の Z 変換

$$\Pi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_k z^k$$

を，$\lambda$, $N$, $B^*(s)$ ならびに $\pi_0$ を用いて表せ．
(4) システムが定常状態にあるとの仮定の下で，$\pi_0$ を決定せよ．
(5) $\Pi(z)$ が定常状態における任意時点でのシステム内客数分布の確率母関数と等しい理由を述べよ．

問 4.16

通常の待ち行列システムでは，サービスを待っている客がいる時はサーバは必ずサービスを行い，システムが空の時のみ停止する．ここでは，サービスを待っている客がある場合でも，サーバが停止する（休暇をとる）以下のような単一サーバ待ち行列システムを考える．システム内に客がいなくなると，サーバは休暇をとる．休暇が終ると，待ち行列を調べ，もし休暇中に到着しサービスを待っている客があればそれらのサービスを開始し，再びシステムが空になるまで連続してサービスを行い，空になると再び休暇をとる．一方，休暇が終った時システムが空であれば，サーバは再び休暇を取り，上記の手続きを繰り返す．このようなシステムにおいて，客の到着が到着率 $\lambda$ のポワソン過程に従い，一つのサービス時間の密度関数が $h(x)$（平均 $E[H]$，2 次積率 $E[H^2]$，ラプラス変換は $H^*(s)$ とする），一つの休暇時間の密度関数が $v(x)$（平均 $E[V]$，2 次積率 $E[V^2]$，ラプラス変換は $V^*(s)$ とする）で与えられるとする．$\rho = \lambda E[H] < 1$ のとき，以下の問いに答えよ．

(1) 一つのサービス時間の間に新たに到着する客数が $k$（$k = 0, 1, \ldots$）である確率を $a_k$，一つの休暇時間の間に新たに到着する客数が $k$ 人（$k = 0, 1, \ldots$）である確率を $b_k$ とする．$a_k$, $b_k$ を求めよ．
(2) $a_k$ の確率母関数 $A(z)$ と $b_k$ の確率母関数 $B(z)$ をそれぞれ，$H^*(s)$, $V^*(s)$ を用いて表せ．
(3) システムが空になり休暇を開始した後，初めてサービスが終了した直後の系内客数が $k$ 人（$k = 0, 1, \ldots$）である確率を $c_k$ とする．$c_k$ を $a_i$, $b_i$ を用いて表せ．
(4) $\pi_i$（$i = 0, 1, \ldots$）を定常状態において，システムから客が離脱する直後における系内客数が $i$ 人である確率とする．$\pi_i$ が満たす方程式を書き下せ．
(5) $\pi_i$ の確率母関数 $\Pi(z)$ を，$\lambda$, $H^*(s)$, $V^*(s)$, $b_0$, $\pi_0$ を用いて表せ．
(6) $\pi_0$ を決定せよ．
(7) 定常状態における（時間平均の）平均系内客数 $E[L]$ を求めよ．

# 5 待ち時間分布

この節では 3 3.2 節ならびに 4 4.2 節で考察した待ち行列モデルの待ち時間分布を導出する．

## 5.1 指数サービスをもつ FCFS 待ち行列の待ち時間分布

指数サービスをもつ定常な FCFS 単一サーバ待ち行列における待ち時間分布を考える．以下では，任意に選ばれた客の到着直前の系内客数分布 $\{q_k; k = 0, 1, \ldots\}$ が既知であるとする．ある客の到着直前に $k$ 人の客がシステムにいた場合，これら $k$ 人の客のサービスが終了すれば，到着した客のサービスが開始される．サービス時間がパラメタ $\mu$ の指数分布に従っているならば，指数分布の無記憶性より，到着時点でサービス中の客がサービスを終了するまでの時間もパラメタ $\mu$ の指数分布に従い，他の事象とは独立である．よって，任意に選ばれた客の待ち時間 $W_q$ は，到着時点で系内に $k$ 人の客がいれば，パラメタ $\mu$ をもつ $k$ 個の独立な指数分布に従う確率変数の和で与えられる．

そこで，パラメタ $\mu$ の指数分布に従う独立な確率変数列 $H_i$ （$i = 1, 2, \ldots$）に対して，$F_k = H_1 + \cdots + H_k$ と定義し，$F_k$ の従う確率分布を見い出す．$F_k$ の分布関数を $F_k(x)$ とすれば

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \Pr(H_1 + H_2 \le x) = \int_0^x \Pr(H_1 + y \le x \mid H_2 = y)\mu e^{-\mu y} dy = \int_0^x (1 - e^{-\mu(x-y)})\mu e^{-\mu y} dy \\ &= 1 - e^{-\mu x} - e^{-\mu x}\mu x \end{aligned}$$

となる．同様に，

$$\begin{aligned} F_3(x) &= \Pr(H_1 + H_2 + H_3 \le x) = \int_0^x \Pr(H_1 + H_2 + y \le x \mid H_3 = y)\mu e^{-\mu y} dy = \int_0^x F_2(x-y)\mu e^{-\mu y} dy \\ &= 1 - e^{-\mu x} - e^{-\mu x}\mu x - e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^2}{2} \end{aligned}$$

である．これらを元に，

$$F_k(x) = 1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^i}{i!}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{56}$$

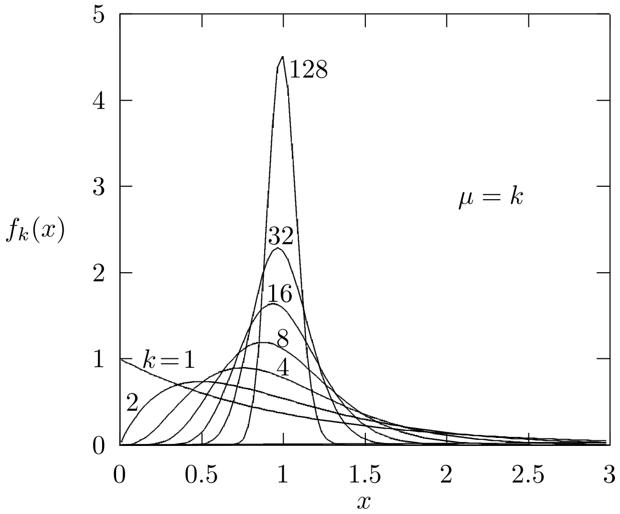



図 27: 平均 1 のアーラン分布の密度関数

が成立すると仮定し，以下では，帰納法によって正しいことを示す．まず，$k = 1$ のとき，定義より $F_1(x) = \Pr(X_1 \le x) = 1 - \exp(-\mu x)$ なので，式 (56) は $k = 1$ に対して成立している．そこで，ある $k = n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ に対して式 (56) が成立すると仮定する．このとき

$$
\begin{aligned}
F_{n+1}(x) &= \int_0^x F_n(y)\mu e^{-\mu(x-y)}dy = \int_0^x \left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-\mu y}\frac{(\mu y)^i}{i!}\right)\mu e^{-\mu(x-y)}dy \\
&= \int_0^x \mu e^{-\mu(x-y)}dy - \sum_{i=0}^{n-1}\mu e^{-\mu x}\int_0^x \frac{(\mu y)^i}{i!}dy = 1 - e^{-\mu x} - \sum_{i=0}^{n-1}\mu e^{-\mu x}\left[\frac{\mu^i y^{i+1}}{(i+1)!}\right]_0^x \\
&= 1 - e^{-\mu x} - \sum_{i=0}^{n-1}\mu e^{-\mu x}\frac{\mu^i x^{i+1}}{(i+1)!} = 1 - \sum_{i=0}^{n} e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^i}{i!}
\end{aligned}
$$

となり，式 (56) は $k = n + 1$ に対しても成立する．よって全ての $k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ に対して式 (56) は成立する．

さらに $F_k(x)$ を微分することにより，$F_k$ の密度関数 $f_k(x)$ は

$$
f_k(x) = \frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}e^{-\mu x}\mu \tag{57}
$$

で与えられることが分かる．

**定義 32** $k$ 個の独立なパラメタ $\mu$ をもつ指数分布に従う確率変数の和が従う確率分布を $k$ 次の**アーラン分布**（Erlang distribution）といい，その分布関数ならびに密度関数はそれぞれ式 (56) ならびに式 (57) で与えられる．特に平均は $k/\mu$ で与えられ，分散は $k(1/\mu)^2 = k/\mu^2 = (k/\mu)^2/k$ で与えられる．

図 27 に平均が 1 であるアーラン分布の密度関数を示す．この図から次数が高くなるに従って分散が減少する様子がわかる．また，アーラン分布の分散は常に同じ平均をもつ指数分布よりも小さいことに注意する．

### 5.1.1 $M/M/1$ の待ち時間分布

到着率 $\lambda$，サービス率 $\mu$ をもつ定常な FCFS $M/M/1$ の待ち時間分布を考える．定常であるので $\rho = \lambda/\mu < 1$ に注意する．待ち時間 $W_q$ を到着直前の系内客数 $L^A$ で条件付けることにより，待ち時間 $W_q$ の分布関数 $W_q(x) =$

$\Pr(W_q \le x)$ は

$$W_q(x) = \Pr(W_q \le x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(L^A = k) \Pr(W_q \le x \mid L^A = k), \qquad x \ge 0$$

と書くことができる．ここで $L^A = 0$ ならば $W_q = 0$ なので

$$\Pr(W_q \le x \mid L^A = 0) = 1, \qquad x \ge 0$$

であり，$k \ge 1$ なる $k$ に対しては $\Pr(W_q \le x \mid L^A = k) = F_k(x)$ が成立することに注意する．よって，到着直前の系内客数分布を $q_k = \Pr(L^A = k)$（$k = 0, 1, \ldots$）とすると，待ち時間 $W_q$ の分布関数 $W_q(x) = \Pr(W_q \le x)$ は

$$W_q(x) = q_0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k F_k(x)$$

で与えられる．ポワソン到着の性質より，到着直前における系内客数の定常状態確率 $q_k$ は任意に選ばれた時点における定常状態確率 $p_k = (1-\rho)\rho^k$ に等しいことに注意すると，

$$\begin{aligned}
W_q(x) &= 1 - \rho + \sum_{k=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^k \left(1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!}\right) \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} (1-\rho)\rho^k \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!} \\
&= 1 - \rho e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} (1-\rho)\rho^{k-1} \\
&= 1 - \rho e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mu x)^n}{n!} \rho^n
\end{aligned}$$

となる．さらに最後の等号の右辺に現れる無限和は $\exp(\mu \rho x)$ となり，次の定理を得る．

**定理 33 (FCFS $M/M/1$ の待ち時間分布)** $\rho < 1$ のとき，定常な FCFS $M/M/1$ における客の待ち時間の分布関数 $W_q(x)$ は

$$W_q(x) = 1 - \rho e^{-(1-\rho)\mu x}, \qquad x \ge 0 \tag{58}$$

で与えられる．

式 (58) より待ち時間の平均 $E[W_q]$ ならびに分散 $\mathrm{Var}[W_q]$ は，それぞれ

$$E[W_q] = \frac{\rho}{(1-\rho)\mu}, \qquad \mathrm{Var}[W_q] = \frac{\rho(2-\rho)}{((1-\rho)\mu)^2}$$

で与えられる．図 28 に FCFS $M/M/1$ の待ち時間の分布関数 $W_q(x)$ ならびに裾野分布 $\overline{W}_q(x) = \Pr(W_q > x) = 1 - W_q(x)$ を示す．利用率 $\rho$ の値によって，待ち時間の特性が大きく異なることが分かる．

#### 5.1.2 $GI/M/1$ の待ち時間分布

到着間隔が平均 $\lambda^{-1}$ をもつ分布関数 $G(x)$ に従い，サービス率 $\mu$ をもつ定常な FCFS $GI/M/1$ の待ち時間分布を考える．$\rho = \lambda/\mu < 1$ のとき，到着直前の系内客数が $k$ 人である確率は $q_k = \pi_k = (1-\gamma)\gamma^k$ で与えられるので，$M/M/1$ と同様の議論により次の定理を得る．

**定理 34 (FCFS $GI/M/1$ の待ち時間分布)** $\rho < 1$ のとき，定常な FCFS $GI/M/1$ における待ち時間の分布関数 $W_q(x)$ は

$$W_q(x) = 1 - \gamma e^{-(1-\gamma)\mu x}, \qquad x \ge 0 \tag{59}$$

で与えられる．

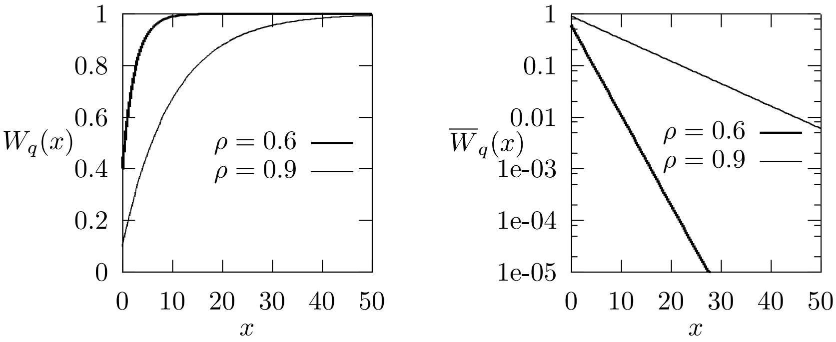



図 28: $M/M/1$ の待ち時間分布（$\mu = 1$）

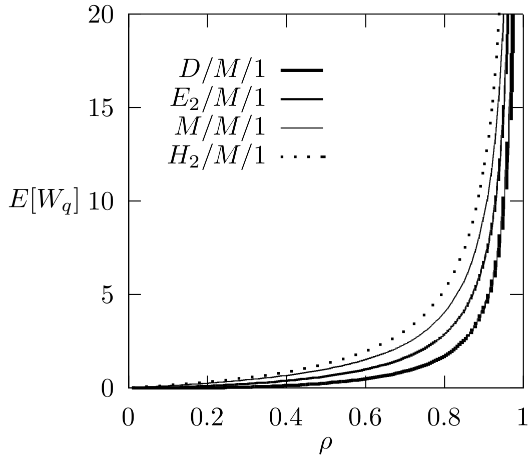



図 29: $GI/M/1$ における平均待ち時間（$\mu = 1$）

式 (59) より待ち時間の平均 $E[W_q]$ ならびに分散 $\mathrm{Var}[W_q]$ は，それぞれ

$$E[W_q] = \frac{\gamma}{(1-\gamma)\mu}, \qquad \mathrm{Var}[W_q] = \frac{\gamma(2-\gamma)}{((1-\gamma)\mu)^2}$$

で与えられる．

到着間隔分布 $G(x)$ が性能に与える影響を見るために，同じ平均到着間隔 $\lambda^{-1}$ ならびにサービス率 $\mu = 1$ をもつ $D/M/1$，$E_2/M/1$，$M/M/1$，$H_2/M/1$ における平均待ち時間を考える．ここで $E_k$ は $k$ 次のアーラン分布，$H_k$ は $k$ 次の**超指数分布**（hyperexponential distribution）を表すケンドールの記号である．$k$ 次の超指数分布とは異なるパラメタ $\mu_i$（$i = 1, \ldots, k$）をもつ指数分布を分岐確率 $p_i$（$i = 1, \ldots, k$）を用いて混合したものであり，その分布関数 $G_k(x)$ は

$$G_k(x) = \sum_{i=1}^{k} p_i(1 - e^{-\mu_i x})$$

で与えられ，平均 $\sum_{i=1}^{k} p_i/\mu_i$，2 次積率 $\sum_{i=1}^{k} 2p_i/\mu_i^2$ をもつ．超指数分布の 2 次積率は同じ平均をもつ指数分布の 2 次積率より常に大きいことが知られている．すなわち超指数分布の方が指数分布よりも変動が大きくなる．図 29 にこれら 4 つの待ち行列モデルの平均待ち時間を示す．ただし 2 次の超指数分布は $G(x) = 0.25(1 - \exp(-\lambda x/2)) + 0.75(1 - \exp(-3\lambda x/2))$ である．図より到着時間間隔の変動が大きくなるに従い，性能が悪化することが分かる．

### 5.1.3 $M/M/c$ の待ち時間分布

到着率 $\lambda$，サービス率 $\mu$ をもつ定常な FCFS $M/M/c$ の待ち時間分布を考える．到着時点における系内客数が $c$ 人以上のときのみ，到着した客は待たなければならない．さらに，客の到着直前の系内客数が $c-1+k$（$k=1,2,\ldots$）人ならば，到着以降 $k$ 人の客のサービスが終了した時点で，この客のサービスが開始される．指数分布の無記憶性より，到着時点でサービス中である個々の客がサービスを終了するまでの時間はそれぞれ独立なパラメタ $\mu$ の指数分布に従う．よって，$c-1+k \geq c$ 人の客が系内にいるとき，客の離脱間隔はパラメタ $c\mu$ の指数分布に従う．また，ポワソン到着の性質から，到着時点における系内客数分布 $\{q_k; k=0,1,\ldots\}$ は定常状態分布 $\{p_k; k=0,1,\ldots\}$ に等しい．

以上の考察により，サービス時間が指数分布に従う場合，複数のサーバをもつ待ち行列モデルの待ち時間分布は単一サーバの場合と同様にして求めることができることがわかる．特に $M/M/c$ の場合，$q_{c-1+k} = p_{c-1+k} = p_{c-1}(\rho/c)^k$（$k=1,2,\ldots$）なので，待ち時間 $W_q$ の分布関数 $W_q(x) = \Pr(W_q \leq x)$ は

$$
\begin{aligned}
W_q(x) &= \sum_{k=0}^{c-1} q_k + \sum_{k=1}^{\infty} q_{c-1+k} \left(1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-c\mu x} \frac{(c\mu x)^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{c-1} q_k + \sum_{k=1}^{\infty} q_{c-1+k} - \sum_{k=1}^{\infty} q_{c-1+k} \sum_{n=0}^{k-1} e^{-c\mu x} \frac{(c\mu x)^n}{n!} \\
&= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} p_{c-1} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k \sum_{n=0}^{k-1} e^{-c\mu x} \frac{(c\mu x)^n}{n!} \\
&= 1 - p_{c-1} e^{-c\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c\mu x)^n}{n!} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{c}\right)^k \\
&= 1 - p_{c-1} e^{-c\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c\mu x)^n}{n!} \left(\frac{\rho}{c}\right)^{n+1} \frac{1}{1-\rho/c} \\
&= 1 - p_{c-1} \frac{\rho}{c} \frac{c}{c-\rho} e^{-c\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^n}{n!}
\end{aligned}
$$

となり，次の定理を得る．

**定理 35 (FCFS $M/M/c$ の待ち時間分布)** $\rho < c$ のとき，定常な FCFS $M/M/c$ における待ち時間の分布関数 $W_q(x)$ は

$$
W_q(x) = 1 - p_{c-1} \frac{\rho}{c-\rho} e^{-(c\mu-\lambda)x}, \qquad x \geq 0
$$

で与えられる．

$M/M/1$, $G/M/1$, $M/M/c$ の待ち時間分布 $W_q(x) = \Pr(W_q \leq x)$ は，全て，

$$
\Pr(W_q \leq x) = 1 - b\exp(-ax)
$$

という形になっていることに注意する．$x=0$ を代入すると $\Pr(W_q \leq 0) = 1-b$，すなわち，$b = \Pr(W_q > 0)$ であることがわかる．

$$
\Pr(W_q \leq x) = 1 - \Pr(W_q > 0)\exp(-ax)
$$

すなわち

$$
\begin{aligned}
\Pr(W_q \leq x) &= \Pr(W_q = 0) + \Pr(W_q > 0) - \Pr(W_q > 0) \cdot \exp(-ax) \\
&= \Pr(W_q = 0) + \Pr(W_q > 0)(1 - \exp(-ax))
\end{aligned}
$$

という形に変形できる．一方，待ち時間分布を $W_q = 0$ と $W_q > 0$ で場合分けすると，$x \geq 0$ に対して

$$
\begin{aligned}
\Pr(W_q \leq x) &= \Pr(W_q = 0)\Pr(W_q \leq x \mid W_q = 0) + \Pr(W_q > 0)\Pr(W_q \leq x \mid W_q > 0) \\
&= \Pr(W_q = 0) + \Pr(W_q > 0)\Pr(W_q \leq x \mid W_q > 0)
\end{aligned}
$$

を得る．よって，待ち時間が正であるという条件下での条件付き待ち時間分布 $\Pr(W_q \le x \mid W_q > 0)$ は指数分布に従うことがわかる．

### 5.1.4 $M/M/1/K$ の待ち時間分布

到着率 $\lambda$，サービス率 $\mu$ をもつ定常な FCFS $M/M/1/K$ の待ち時間分布を考える．系内には高々 $K$ 人の客しか収容できないため，呼損が起こる．このようなシステムにおける待ち時間は，通常，系内に収容された客に対してのみ定義される．ポワソン到着の性質より，到着直前の系内客数分布は定常状態分布と等しい．よって客が系内に収容されるという条件の下で，到着直前の系内客数が $k$ 人である確率 $q_k$ は

$$q_k = \frac{p_k}{1-p_K}, \qquad k = 0, \ldots, K-1$$

で与えられる．さらに，到着直前における系内客数が $k$ 人であれば，この客の待ち時間は $k$ 次のアーラン分布で与えられる．よって待ち時間 $W_q$ の分布関数 $W_q(x) = \Pr(W_q \le x)$ は

$$\begin{aligned} W_q(x) &= q_0 + \sum_{k=1}^{K-1} q_k \left(1 - \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^i}{i!}\right) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{K-1} \frac{p_k}{1-p_K} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^i}{i!} \end{aligned}$$

となり，和の順序を交換すると次の定理を得る．

**定理 36 (FCFS $M/M/1/K$ の待ち時間分布)** 定常な FCFS $M/M/1/K$ における待ち時間の分布関数 $W_q(x)$ は

$$W_q(x) = 1 - \sum_{i=0}^{K-2} \left(\sum_{k=i+1}^{K-1} \frac{p_k}{1-p_K}\right) e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^i}{i!}, \qquad x \ge 0$$

で与えられる．

## 5.2 $M/G/1$ の待ち時間分布

到着率 $\lambda$，サービス時間が平均 $b$ をもつ分布関数 $H(x)$ に従う定常な FCFS $M/G/1$ の待ち時間分布を考える．客の到着直前に $k$ 人の客がいたとすると，この客の待ち時間は現在サービス中の客の残余サービス時間とそれに続く $k-1$ 人のサービス時間の和で与えられる．一般に，到着直前に系内にいる客は，現在行われているサービスの開始時点で既にいた客と現在のサービスの経過時間の間に到着した客に分類することができる．サービス時間が一般分布に従う場合，経過サービス時間と残余サービス時間の間には相関があるため，経過時間内に到着する客数と残余サービス時間の間に相関が生じる．[13]よって，指数サービスの場合と同様の議論を行うことができない．

そこで，以下では待ち時間分布と客の離脱直後の客数分布を関連づけることを考える．サービス時間分布 $H(x)$ のラプラス・スティルチェス変換を $H^*(s)$ とし，任意に選ばれた客の待ち時間分布のラプラス・スティルチェス変換を $W_q^*(s)$ とする．客の系内滞在時間 $W$ は待ち時間 $W_q$ とサービス時間 $H$ の和で与えられ，両者は独立なので，系内滞在時間分布のラプラス・スティルチェス変換 $W^*(s)$ は

$$W^*(s) = W_q^*(s) H^*(s)$$

[13] 指数分布の場合は，無記憶性により，経過サービス時間と残余サービス時間は独立となるが，指数分布以外では両者の間に相関がある．例えば，サービス時間が一定の場合，経過サービス時間が比較的長ければ残余サービス時間は短くなる．結果として，残余サービス時間が短ければ経過サービス時間の間に到着する客数は比較的多くなることが期待される．

で与えられる．両辺を $s$ について $n$ 回微分し，$s=0$ とすることにより

$$E[W^n] = E[W_q^n] + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} E[W_q^k] E[H^{n-k}] + E[H^n], \qquad n = 1, 2, \dots$$

が得られ，特に期待値に関しては

$$E[W] = E[W_q] + E[H]$$

となる．

FCFS $M/G/1$ では，客の離脱直後に系内にいる全ての客は離脱した客の系内滞在時間の間に到着している．また，任意に選ばれた客の離脱時点における客数の確率母関数は式 (42) で与えられた定常状態における系内客数分布の確率母関数 $L^*(z)$ と等しいことに注意する．

そこで系内滞在時間の間に到着する客数を考える．任意に選ばれた客の系内滞在時間が $x$ であったという条件の下で，その間に率 $\lambda$ でポワソン到着する客数の確率母関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^n}{n!} z^n = e^{-(\lambda - \lambda z)x}$$

で与えられる．よって $W(x)$ を任意に選ばれた客の系内滞在時間の分布関数とすると，この客の離脱直後の客数の確率母関数 $L^*(z)$ は

$$L^*(z) = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)x} dW(x)$$

を満たす．この式は，系内滞在時間分布のラプラス・スティルチェス変換の引数 $s$ に $\lambda - \lambda z$ を代入した形になっている．よって

$$L^*(z) = W^*(\lambda - \lambda z) = W_q^*(\lambda - \lambda z) H^*(\lambda - \lambda z) \tag{60}$$

を得る．ここで $s = \lambda - \lambda z$ とおき，式 (60) を $W_q^*(s)$ について解くと

$$W_q^*(s) = L^*\left(\frac{\lambda - s}{\lambda}\right) / H^*(s)$$

を得る．さらに式 (42) を用いると次の定理を得る．

**定理 37 (FCFS $M/G/1$ の待ち時間分布)** $\rho < 1$ のとき，FCFS $M/G/1$ における待ち時間分布のラプラス・スティルチェス変換 $W_q^*(s)$ は

$$W_q^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s - \lambda + \lambda H^*(s)} \tag{61}$$

で与えられる．

$W_q^*(s)$ を微分することにより，待ち時間分布の積率を求めることができる．定常状態における待ち時間分布の $n$ 次積率を $W_q^{(n)}$ とし，$b^{(n)}$ をサービス時間分布の $n$ 次積率とする．式 (61) の右辺の分母を払った後，両辺を微分し，$s \to 0$ とすることで，系内滞在時間分布の積率は一般に次の再帰式を満たすことを示すことができる．

$$W_q^{(n)} = \frac{\lambda}{(n+1)(1-\rho)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} W_q^{(k)} b^{(n+1-k)}, \qquad n = 1, 2, \dots$$

ただし $W_q^{(0)} = 1$ とした．特に，待ち時間の平均 $E[W_q] = W_q^{(1)}$ ならびに分散 $\mathrm{Var}[W_q] = W_q^{(2)} - E[W_q]^2$ は次式で与えられる．

$$E[W_q] = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}, \qquad \mathrm{Var}[W_q] = \frac{\lambda b^{(3)}}{3(1-\rho)} + E[W_q]^2,$$

## 演習問題

### ５章の授業内容確認

**問 5.1　アーラン分布 (1)**

以下の問いに答えよ．

(1) 平均 $k/\mu$ をもつ $k$ 次のアーラン分布とパラメタ $\mu$ をもつ指数分布はどのような関係にあるか．

(2) アーラン分布の平均と分散がそれぞれ $k/\mu$，$(k/\mu)^2/k$ で与えられることを示せ．

**問 5.2　アーラン分布 (2)**

以下の問いに答えよ．

(1) 平均 $k/\mu$ をもつ $k$ 次のアーラン分布の分布関数を $F_k(x)$ とする．$F_k(x)$（$k = 2, 3, \ldots$）を $F_{k-1}(x)$ を用いて表せ．

(2)

$$F_k(x) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

が (1) で与えた等式を満たすことを示せ．

**問 5.3　アーラン分布 (3)**

平均 $\mu x$ $(x, \mu > 0)$ をもつポワソン分布 $P_n(x) = \exp(-\mu x)(\mu x)^n/n!$ $(n = 0, 1, \ldots)$ と，平均 $k/\mu$ $(k = 1, 2, \ldots)$ をもつ $k$ ステージアーラン分布の分布関数 $F_k(x)$ の間に以下の式が成立することを，ポワソン過程とアーラン分布の関係を考えることにより示せ．

$$F_k(x) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1} P_n(x), \qquad k = 1, 2, \ldots$$

**問 5.4　アーラン分布 (4)**

平均 $k/\mu$ $(k = 1, 2, \ldots)$ をもつ $k$ 次のアーラン分布の密度関数 $f_k(x)$ が

$$f_k(x) = e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot \mu, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

で与えられることをポワソン過程とアーラン分布の関係を考えることにより示せ．

**問 5.5　アーラン分布と待ち時間**

サービス時間がパラメタ $\mu$ をもつ指数分布に従う定常な先着順サービス単一サーバ待ち行列の待ち時間 $W_q$ を考える．定常状態において，任意に選ばれた客が到着する直前の系内客数 $L^A$ の確率関数を $q_k = \Pr(L^A = k)$ とする．また，平均 $k/\mu$ $(k = 1, 2, \ldots)$ をもつ $k$ 次のアーラン分布の分布関数を $F_k(x)$ とする．

(1) $\Pr(W_q \le x \mid L^A = 0)$ を求めよ．

(2) $\Pr(W_q \le x \mid L^A = k)$（$k = 1, 2, \ldots$）を $F_k(x)$ を用いて表せ．

(3) $W_q(x) = \Pr(W_q \le x)$ を $q_k$ と $F_k(x)$ を用いて表せ．

(4) 客の到着がポワソン過程に従うとき，任意に選ばれた客の到着直前のシステムの状態と任意に選ばれた時点におけるシステムの状態にはどのような関係があるか述べよ．

**問 5.6　M/M/1 の待ち時間**

到着率 $\lambda$，サービス時間がパラメタ $\mu$ をもつ指数分布に従う定常な先着順サービス $M/M/1$ を考える．

(1) 待ち時間分布を求めよ．

(2) 平均待ち時間を求めよ．

**問 5.7　GI/M/1 の待ち時間**

到着間隔が独立同一な分布関数 $G(x)$ に従い，サービス時間がパラメタ $\mu$ をもつ指数分布に従う定常な先着順サービス $GI/M/1$ の待ち時間分布を求めよ．

**問 5.8　M/M/c の待ち時間**

到着率 $\lambda$，サービス時間がパラメタ $\mu$ をもつ指数分布に従う定常な先着順サービス $M/M/c$ の待ち時間分布を求めよ．

**問 5.9　M/M/1/K の待ち時間**

到着率 $\lambda$，サービス時間がパラメタ $\mu$ をもつ指数分布に従う定常な先着順サービス $M/M/1/K$ の待ち時間分布を求めよ．

**問 5.10　M/G/1 の待ち時間**

到着率 $\lambda$，サービス時間が独立同一な分布関数 $H(x)$ に従う定常な先着順サービス $M/G/1$ を考える．サービス時間，系内滞在時間，ならびに待ち時間のラプラス・スティルチェス変換形をそれぞれ $H^*(s)$, $W^*(s)$, $W_q^*(s)$ とする．

(1) $H^*(s)$, $W^*(s)$, ならびに $W_q^*(s)$ の間に成立する式を示せ．

(2) 客の離脱直後に系内に残っている客は，離脱した客の系内滞在時間の間に到着したという観察に基づき，$W^*(s)$ と離脱直後の系内客数分布の母関数 $L^*(z)$ を関連づけよ．

(3) 前問の結果を利用して，$W_q^*(s)$ を $L^*(z)$ と $H^*(s)$ を用いて表せ．

(4) $W_q^*(s)$ を求めよ．ただし，

$$L^*(z) = \frac{(1-\rho)(z-1)H^*(\lambda - \lambda z)}{z - H^*(\lambda - \lambda z)}$$

を用いて良い．

(5) 平均待ち時間を求めよ．

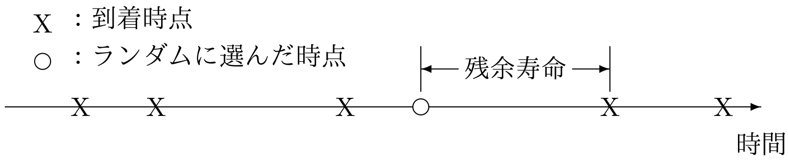



図 30: 残余寿命

**練習問題**

**問 5.11**
到着率 $\lambda$，サービス率 $\mu$ をもつ定常な先着順サービス $M/M/1$ の系内滞在時間分布を求めよ．ただし $\mu > \lambda$ である．

# 6 その他の話題

この節では，ここまでに触れることはできなかったが通信ネットワークの性能評価に有用な幾つかの話題を応用を交えて紹介する．

## 6.1 残余寿命分布

この節では，一般分布を要素に持つ待ち行列モデルを考察する上で非常に重要な残余寿命分布について解説する．到着間隔の**残余寿命**（residual life）とは，時間軸上に到着時点が与えられているとき，ランダムに選んだ時点から次の到着が起こる時点までの長さで定義される．これを次の例を用いて考える．

**例 38** 平均伝送時間が 10ms であるパケット（以下，通常パケットと呼ぶ）が連続的に伝送されている回線を用いて特別なパケットを優先的に伝送することを考える．この特別なパケットは，発生時に伝送中の通常パケットが伝送を完了した後，直ちに伝送されるものとする．このとき，特別なパケットの伝送が開始されるまでの平均待ち時間を考える．特別なパケットの待ち時間は通常パケットの伝送時間の残余寿命に等しいことに注意する．以下では通常パケットの伝送時間 $X$ (ms) の残余寿命を $\widetilde{X}$ (ms) で表す．

1. $\Pr(X=10)=1$ であるとする．この場合，特別なパケットの発生が通常パケットの伝送開始直後に起こる場合から伝送終了直前に起こる場合まで，すべて同様に確からしいので $E[\widetilde{X}]=10/2=5$ms となる．
2. $\Pr(X=5)=1/2$，$\Pr(X=15)=1/2$ であるとする．この場合，特別なパケットの発生時に伝送中の通常パケットの伝送時間は 5ms と 15ms の 2 通りがあるが，伝送時間が 15ms の通常パケットが伝送中である時間帯は時間軸全体の 3/4 を占める．すなわち，特別なパケットの発生時に伝送中の通常パケットの伝送時間は確率 3/4 で 15ms である．よって $E[\widetilde{X}]=5/2\times 1/4+15/2\times 3/4=6.25$ms となる．
3. $\Pr(X=5)=3/4$，$\Pr(X=25)=1/4$ であるとする．この場合，特別なパケットが発生時に伝送中の通常パケットの伝送時間は 5ms と 25ms の 2 通りがあり，伝送時間には 5 倍の差があるが，5ms の通常パケットの発生頻度は 25ms の通常パケットに比べて 3 倍である．よって，伝送時間が 25ms の通常パケットが伝送中である時間帯は時間軸全体の
$$\frac{5\times 1}{1\times 3+5\times 1}=\frac{5}{8}$$
を占める．すなわち，特別なパケットの発生時に伝送中の通常パケットの伝送時間は確率 5/8 で 25ms である．よって $E[\widetilde{X}]=5/2\times 3/8+25/2\times 5/8=8.75$ms となる．

この例からわかるように，特別なパケットが発生した時点でどのような伝送時間をもつ通常パケットが伝送中であるかという確率は，伝送時間とその発生頻度の両方に比例する．今，通常パケットの伝送時間 $X$ の確率分布

関数を $F(x) = \Pr(X \le x)$ とし，$X$ の密度関数 $f(x) = dF(x)/dx$ が存在するとする．このとき，ランダムに選ばれた時点において伝送中のパケットの伝送時間の密度関数は伝送時間の大きさ $x$ と発生頻度 $f(x)$ の双方に比例する．すなわち選ばれる間隔の密度関数は，ある定数 $\alpha$ を用いて

$$\frac{xf(x)}{\alpha}$$

で与えられる．ここで，正規化定数 $\alpha$ は全区間に渡る積分が 1 となるように定められ（式 (2) 参照），$\alpha = E[X]$ であることがわかる．さらに，長さ $x$ の間隔が選ばれた時，残余寿命はその中で一様に分布しているので

$$\Pr(y < \widetilde{X} \le y + \Delta y) = \int_y^\infty \frac{xf(x)}{E[X]} \cdot \frac{\Delta y}{x} dx = \frac{1 - F(y)}{E[X]} \Delta y$$

を得る．

**定理 39** 確率変数 $X$ が有限の平均 $E[X]$ ならびに分布関数 $F(x)$ をもつとき，$X$ の残余寿命 $\widetilde{X}$ の密度関数は

$$\frac{1 - F(x)}{E[X]} \tag{62}$$

で与えられる．また，残余寿命 $\widetilde{X}$ の $n$ 次積率は

$$E[\widetilde{X}^n] = \frac{E[X^{n+1}]}{(n+1)E[X]} \tag{63}$$

で与えられる．

特に，平均残余寿命 $E[\widetilde{X}] = E[X^2]/(2E[X])$ が到着間隔の平均のみならず 2 次の積率に依存していることに注意する．これを $X$ の分散 $\mathrm{Var}[X]$ を用いて書き換えると

$$E[\widetilde{X}] = \frac{E[X]}{2} + \frac{\mathrm{Var}[X]}{2E[X]}$$

となる．これより，分散 $\mathrm{Var}[X]$ が 0，すなわち $X$ が確率 1 で一定の値を取るならば，残余寿命の平均は $E[X]/2$ で与えられ，最小となる．また，平均が同じであっても分散に上限はないため，平均残余寿命はいくらでも大きくなる可能性がある．

**例 40** $X$ がパラメタ $\lambda$ の指数分布に従う場合，平均 $1/\lambda$，分布関数 $1 - \exp(-\lambda x)$ をもつので，残余寿命の密度関数は

$$\frac{1 - (1 - e^{-\lambda x})}{\lambda^{-1}} = \lambda e^{-\lambda x}$$

となる．すなわち，指数分布の残余寿命分布は元の指数分布と等しい．[14]

## 6.2 $M/G/1$ の平均値公式

リトルの公式，ポワソン到着の性質ならびに残余寿命の平均を用いると定常な FCFS $M/G/1$ の平均待ち時間を求めることができる．以下では到着率を $\lambda$，平均サービス時間を $b$ とし，利用率 $\rho = \lambda b < 1$ であると仮定する．$E[L_q]$ を平均待ち客数，$E[W_q]$ を平均待ち時間，$b^{(2)}$ をサービス時間の 2 次モーメントとする．

任意に選ばれた客の待ち時間は到着時点でサービス中ならばそのサービスの終了するまでの時間と到着時にサービスを待っていた客のサービス時間の和で与えられる．客の到着はポワソン分布に従うので，任意に選ばれた客の到着時に他の客がサービス中である確率は，定常状態におけるサービス中である時間割合に等しく，利用率 $\rho$ で与えられる．また，到着時点で他の客がサービス中ならば，そのサービスが終了するまでにサービス時間の平均

[14] 無記憶性よりこの結果は明らかである．

残余寿命 $b^{(2)}/2b$ だけ待たなければならない．さらに，客の到着はポワソン分布に従うので，到着時に待っている客の平均数は定常状態における平均待ち客数 $E[L_q]$ に等しく，到着した客はこれらの待っている客一人当たり平均 $b$ のサービス時間分だけ待たなければならない．以上の考察より

$$E[W_q] = \rho\frac{b^{(2)}}{2b} + (1-\rho)\times 0 + bE[L_q] \tag{64}$$

を得る．一方，サーバを除いた部分を単独のシステムとして捉え，リトルの公式を用いると

$$E[L_q] = \lambda E[W_q] \tag{65}$$

を得る．よって，式 (64) ならびに式 (65) より平均待ち客数 $E[L_q]$ ならびに平均待ち時間 $E[W_q]$ はそれぞれ次式で与えられる．

$$E[L_q] = \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)}, \qquad E[W_q] = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)}$$

### 6.3 複数のポワソン流を収容する $M/G/1$ と非割込み優先規律

$N$ 個の独立なポワソン到着流をもつ $M/G/1$ を考える．$j$ 番目の到着流の到着率を $\lambda_j$，平均サービス時間を $b_j$，2 次積率 $b_j^{(2)}$，サービス時間の分布関数を $H_j(x)$ とする．このとき，定理 7 より，独立なポワソン流の重畳はポワソン流となり，到着した客が $j$ 番目の到着流から来た客である確率は到着間隔とは独立に $\lambda_j/\sum_{i=1}^N \lambda_i$ で与えられるので，独立な複数のポワソン到着流をもつ待ち行列は以下のようなパラメタをもつ $M/G/1$ 待ち行列となる．

$$\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i, \qquad b = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\lambda} b_i, \qquad b^{(2)} = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\lambda} b_i^{(2)}, \qquad H(x) = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i}{\lambda} H_i(x)$$

よってサービスが FCFS で行われているならば，上記のパラメタを用いることで単一の到着流をもつ $M/G/1$ の結果が独立な複数の到着流をもつ $M/G/1$ にそのまま適用できる．

以下では FCFS ではなく，異なる到着流から来た客に異なる優先権を与えることを考える．今後，$j$ 番目の到着流から来た客をクラス $j$ の客と呼ぶ．クラス $j$ の客はクラス $j+1,\dots,N$ の客に対して**非割込み優先権**（nonpreemptive priority）を持つと仮定する．すなわち，サービス終了時に複数のクラスの客がサービスを待っている場合は，最も小さなクラスの客が次のサービスを受けることができる．一旦サービスが開始されると，その終了まで他の客がサービスされることはない．このようなサービス規律は非割込み型と呼ばれる．なお，システムが空のときに到着した客のサービスは直ちに行われる．以下ではクラス $j$ の客の利用率を $\rho_j = \lambda_j b_j$ とし，システム全体での総利用率 $\rho = \sum_{i=1}^N \rho_i$ は $\rho < 1$ であると仮定し，定常状態における各クラスの客の平均待ち時間を導出する．

各クラスの客の到着はポワソン過程に従うため，任意に選ばれた客の到着時点においてクラス $j$ の客がサービス中である確率は，任意に選ばれた時点においてサーバがクラス $j$ の客をサービスしている確率 $\rho_j$ に等しい．また，定常状態におけるクラス $j$ の平均待ち客数を $E[L_{q,j}]$ としたとき，客の到着時点においてサービスを受けずに待っているクラス $j$ の平均客数は定常状態における平均待ち客数 $E[L_{q,j}]$ で与えられる．さらに，客の到着時にクラス $j$ の客がサービス中であったとき，客の到着時点からサービス終了時点までの平均長はクラス $j$ のサービス時間の平均残余寿命 $b_j^{(2)}/(2b_j)$ で与えられる．

まず，クラス 1 の客の平均待ち時間 $E[W_{q,1}]$ を考える．$E[W_{q,1}]$ は到着時にサービスを待っているクラス 1 の客のサービス時間の総和の平均 $E[L_{q,1}]b_1$ と，到着時にサービス中ならば，サービス時間の平均残余寿命の和で与えられる．よって

$$E[W_{q,1}] = E[L_{q,1}]b_1 + \sum_{i=1}^N \rho_i \frac{b_i^{(2)}}{2b_i}$$

が成立する．一方，リトルの公式より $E[L_{q,1}] = \lambda_1 E[W_{q,1}]$ なので，$E[L_{q,1}]$ を消去することにより

$$E[W_{q,1}] = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \rho_i \frac{b_i^{(2)}}{2b_i}}{1-\rho_1}$$

を得る．

次にクラス 2 の平均待ち時間 $E[W_{q,2}]$ を考える．もし，注目するクラス 2 の客のサービスが開始されるまで，後続の客が誰も到着しなかったとすれば，この客の平均待ち時間 $E[T_2]$ は到着時に待っているクラス 1 および 2 の客のサービス時間と，もし到着時にサービス中ならば，サービス時間の平均残余寿命の和で与えられる．

$$E[T_2] = E[L_{q,1}]b_1 + E[L_{q,2}]b_2 + \sum_{i=1}^{N} \rho_i \frac{b_i^{(2)}}{2b_i}$$

しかし，注目するクラス 2 の客の待ち時間の間にクラス 1 の客が到着すれば，クラス 2 の客より先にサービスされるため，注目するクラス 2 の客の待ち時間はこれらの客のサービス時間分だけ長くなる．そこで，注目するクラス 2 の客の平均待ち時間が，もし後続の到着がなければ $E[T_2]$ であるという条件の下で，実際にはどれだけ待たなければならないかを考える．

注目する客の到着後，単位時間当たり 平均 $\lambda_1$ 人のクラス 1 の客が到着し，それぞれ平均 $b_1$ のサービスを受けるので，これらの到着によって平均 $\lambda E[T_2] \times b_1 = \rho_1 E[T_2]$ だけ待ち時間が長くなる．さらに，この増加した待ち時間 $\rho_1 E[T_2]$ の間に到着するクラス 1 の客によって，さらに待ち時間が長くなる．この増分の平均は，同様の議論により $\lambda \rho_1 E[T_2] b_1 = \rho^2 E[T_2]$ である．この議論を繰り返すと，結局，注目するクラス 2 の平均待ち時間は $E[T_2](1 + \rho_1 + \rho_1^2 + \cdots) = E[T_2]/(1-\rho_1)$ となる．よって $E[L_{q,j}] = \lambda_j E[W_{q,j}]$（$j = 1, 2$）より

$$E[W_{q,2}] = \frac{E[T_2]}{1-\rho_1} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \rho_i \frac{b_i^{(2)}}{2b_i}}{(1-\rho_1)(1-\rho_1-\rho_2)} \tag{66}$$

を得る．

最後にクラス $j$ ($j = 3, \ldots, N$）の平均待ち時間 $E[W_{q,j}]$ を考える．クラス $j$ の客の視点に立つと，クラス 1 からクラス $j-1$ までの客は高い優先権を持っており，これらの客のサービス順序がどのようなものであろうとも，全てのサービスが終了するまで待たされることになり，その時間は高い優先権をもつ客のサービス順序に依らない．よって，クラス 1 からクラス $j-1$ の客をひとつのクラス $H$ とみなし，クラス $H$, クラス $j, j+1, \ldots, N$ からなるシステムを考える．このとき最も高い優先権をもつクラス $H$ の到着率 $\lambda_H$, 平均サービス時間 $b_H$，サービス時間の 2 次積率 $b_H^{(2)}$ はそれぞれ

$$\lambda_H = \sum_{i=1}^{j-1} \lambda_i, \qquad b_H = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_H} b_i, \qquad b_H^{(2)} = \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_H} b_i^{(2)},$$

となり，利用率 $\rho_H$ は $\rho_H = \rho_1 + \cdots + \rho_{j-1}$ で与えられる．これを式 (66) に適用すると

$$E[W_{q,j}] = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \rho_i \frac{b_i^{(2)}}{2b_i}}{(1-\rho_H)(1-\rho_H-\rho_j)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \rho_i \frac{b_i^{(2)}}{2b_i}}{\left(1-\displaystyle\sum_{i=1}^{j-1}\rho_i\right)\left(1-\displaystyle\sum_{i=1}^{j}\rho_i\right)}$$

を得る．非割込み優先規律を用いれば，異なる種類の客に異なる優先権を与えることでクラス間の性能を差別化することができる．

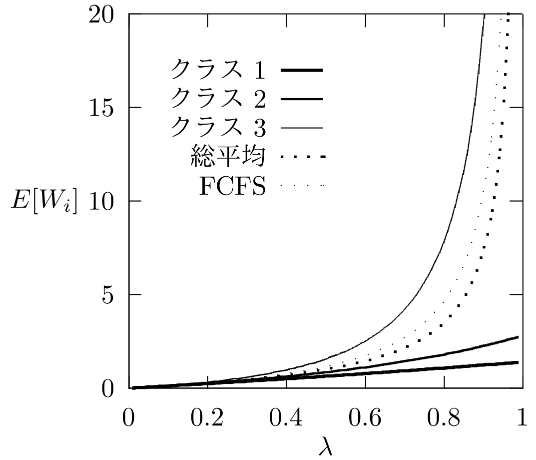



図 31: 非割込み優先規律における平均待ち時間（$\lambda = 3\lambda^*$）

次に，クラス $j$ ($j = 1, \ldots, N$) の客の平均待ち時間に対して，単位時間当たり正のコスト $C_j$ がかかるとし，適当な非割込み型サービス規律を用いて，システム全体でのコスト $C_{\mathrm{total}}$ を最小にするという問題を考える．

$$\text{minimize} \quad C_{\mathrm{total}} = \sum_{j=1}^{R} C_j E[W_{q,j}]$$

このとき

$$\frac{C_{r_1}}{\rho_{r_1}} \geq \frac{C_{r_2}}{\rho_{r_2}} \geq \cdots \geq \frac{C_{r_N}}{\rho_{r_N}} \tag{67}$$

をみたすようなクラスの順序 $r_1, r_2, \ldots, r_N$ を定め，クラス $r_j$ がクラス $r_{j+1}, \ldots, r_N$ に対して優先権をもつ非割込み優先規律を用いると総コスト $C_{\mathrm{total}}$ が最小化されることが知られている (Gelenbe and Mitrani 1980)．

**例 41** 特に $C_j = \lambda_j / \sum_{i=1}^{N} \lambda_i$ とすると，総コスト $C_{\mathrm{total}}$ は任意に選ばれた客の平均待ち時間，すなわち総平均待ち時間となる．このとき $C_j/\rho_j = 1/b_j \times 1/\sum_{i=1}^{N} \lambda_i$ であるので，式 (67) より平均サービス時間が短いクラスに対してより高い優先権を与えることで総平均待ち時間を最小化できることが分かる．

図 31 はクラス $j$（$j = 1, 2, 3$）の客がそれぞれ独立に同じ率 $\lambda^*$ をもつポワソン過程に従い到着し，サービス時間がパラメタ $\mu_j = 2/j$ の指数分布に従う場合に，クラス 1, 2, 3 の順に高い優先権を与えたときの平均待ち時間を示したものである．参考のため，総平均待ち時間と FCFS の場合の平均待ち時間も示されている．この例では，$b_j = j/2$，$b_j^{(2)} = j^2/2$，$\rho_j = j\lambda^*/2$ である．また，FCFS の場合は $\lambda = 3\lambda^*$，$b = 1$，$b^{(2)} = 14/6$，$\rho = 3\lambda^*$，サービス時間の分布関数 $H(x)$ は 3 次の超指数分布 $H(x) = \frac{1}{3}(1 - e^{-2x}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-x}) + \frac{1}{3}(1 - e^{-2x/3})$ で与えられる $M/G/1$ となることに注意する．図よりクラス間で性能に大きな違いがあることが分かる．特にシステムの負荷が 1 に近付くに従ってクラス 3 の平均待ち時間は発散していくが，クラス 1 と 2 の平均待ち時間は有限の値に留まっている．また，総平均待ち時間は FCFS の場合よりも小さくなっているが，これは最も低い優先権をもつクラス 3 の客の性能を犠牲にすることによって得られていることに注意する．

## 6.4 プロセッサシェアリング待ち行列と公平性

以下のような単一サーバ待ち行列を考える．系内に $n$ 人の客がいるとき，サーバはサービス能力を均等に $n$ 分割し，これらの客をそれぞれ $1/n$ の能力で並行してサービスを行う．このようなサービス規律をプロセッサシェアリング（Processor-Sharing: PS）という (Kelly 1979)．

**例 42** ボトルネックとなっている回線を多くのフローが共有している状況を考える．回線速度を $C$ bps としたとき，この回線を流れるフローが $n$ 本であれば，個々のフローはあたかも $C/n$ の回線速度でサービスされている

ように見なせる．そこで，通信ネットワーク内に流れる個々のフローを客とみなし，ボトルネックとなる回線をサーバとみなすと，プロセッサシェアリング規律に従う単一サーバ待ち行列モデルが得られる．

特に，客の到着が率 $\lambda$ のポワソン過程に従い，客のサービスが独立なパラメタ $\mu$ の指数分布に従う場合，PS $M/M/1$ における系内客数は，出生率 $\lambda$，死滅率 $\mu$ をもつ出生死滅過程で表現される．すなわち，定常状態における系内客数分布は FCFS $M/M/1$ と同じになり，式 (25) で与えられる．

プロセッサシェアリング規律は幾つかの興味深い性質をもつことが知られている．まず，客の到着が率 $\lambda$ のポワソン過程に従い，客のサービスが独立で平均 $\mu^{-1}$ をもつ PS $M/G/1$ において，$\rho = \lambda/\mu < 1$ ならば，定常状態における系内客数分布は，サービス時間分布の平均のみで定まり，サービス時間分布そのものには依存しない．すなわち，$M/G/\infty$ や $M/G/c/c$ と同様にサービス時間分布に関して不感性をもっており，平均サービス時間が $\mu^{-1}$ で与えられるならば，定常状態における系内客数分布は式 (25) で与えられる．さらに，サービス時間 $H = x$ をもつ客の平均系内滞在時間 $E[W \mid H = x]$ はサービス時間分布には依存せず，

$$E[W \mid H = x] = \frac{x}{1-\rho} \tag{68}$$

で与えられる．

**例 43** （例 42 の続き）以下では一つのフローが伝送するデータ量の平均を $h$ byte とする．特に，フローの発生が率 $\lambda$ のポワソン過程に従うならば，この回線での遅延（全てのデータを送信し終るまでに必要な時間）は，利用率 $\rho = 8\lambda h/C < 1$ をもつ PS $M/G/1$ でモデル化でき，特に $x$ byte のデータを伝送するのに必要な平均時間 $T[x]$ は式 (68) より

$$T[x] = \frac{8x/C}{1-\rho} \tag{69}$$

で与えられる．

式 (69) より，次のようなことがわかる．平均伝送時間は伝送するデータ量に線形である．例えば，2 倍のデータを送るためには平均 2 倍の時間がかかる．これを言い替えると，1 byte の伝送を行うために必要となる余分な時間は一定ということである．すなわち，データ量が $x$ のフローが被る余分な時間は $(8x/C)/(1-\rho) - 8x/C = 8x/C \times \rho/(1-\rho)$ となるので，1 byte の伝送を行うために必要となる余分な時間は $8\rho/\{C(1-\rho)\}$ で与えられる．この余分な時間は 1 単位のデータの伝送に必要なペナルティーと見なすことができ，そのペナルティーが伝送するデータの総量と独立であるという意味で公平である．これ以外に，例 41 のように，短いデータの伝送に高い優先権を与えるという考え方もある．一方，長いデータの伝送を優先的に扱う場合，短いデータの伝送に対する平均遅延よりも長いデータの伝送に対する平均遅延の方が小さくなる可能性が生じる．もしこのようなことが起きれば，利用者は不必要に長いデータを通信ネットワークに流そうとするかも知れない．プロセッサシェアリングで達成される公平性は利用者のこのような振舞いを防ぐ働きがある．

## 6.5 多呼種 $M/G/c/c$

$M/M/c/c$ あるいは $M/G/c/c$ ではそれぞれの客が一つのサーバを占有すると仮定されているが，このモデルを拡張し，クラス 1 からクラス $N$ まで $N$ 種類の客があり，クラス $j$ の客は $c_j$ 個のサーバを同時に使用する場合を考える．クラス $j$ の客は率 $\lambda_j$ のポワソン過程に従い到着し，到着時に $c$ 個のサーバのうち $c_j$ 個以上のサーバが空であれば，その中から $c_j$ 個のサーバを同時に占有し，サービスを受ける．空のサーバが $c_j$ 個未満の場合は呼損となる．クラス $j$ の客のサービス時間は一般分布に従い，その平均は $b_j$ であるとする．サービスが終了すると占有していた $c_j$ 個のサーバを同時に開放する．

**例 44** 帯域が $C$ bps の回線があり，クラス $j$（$j = 1, \ldots, N$）の利用者は一定の帯域 $c_j$ bps を要求する．もし到着時に空き帯域が $c_j$ bps 未満であるならば，この利用要求は拒否され，呼損となる．クラス $j$ の利用者の回線利

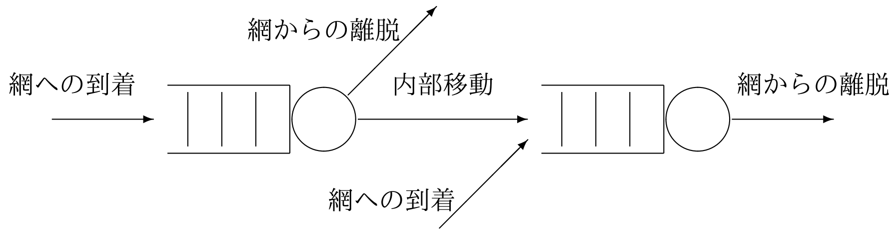



図 32: 待ち行列網

用要求が率 $\lambda_j$ のポワソン過程に従い発生し，回線接続時間が平均 $b_j$ ならば，この回線の利用状況は上記の多呼種 $M/G/c/c$ でモデル化できる．ただし $c = C$ である．

このモデルで最も興味のある量はクラス $j$ の客が呼損となる確率 $B_j$ であり，これは次式で与えられる (Kelly 1979)．

$$B_j = 1 - G(c - c_j)/G(c), \qquad j = 1, \ldots, R$$

ただし $\vec{n} = (n_1, \ldots, n_N)$ $(n_j \geq 0)$ と $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_N)^T$ に対して $\Omega(x) = \{\vec{n}; 0 \leq \vec{n}\vec{c} \leq x\}$ とし，$\rho_j = \lambda_j b_j$ としたとき $G(x)$ は

$$G(x) = \sum_{\vec{n} \in \Omega(x)} \prod_{j=1}^{N} \frac{\rho_j^{n_j}}{n_j!}, \qquad 0 \leq x \leq c$$

で与えられる．$N = 1$ のとき，式 (30) のアーラン呼損式と等価である．

## 6.6 待ち行列網と積形式解

これまで議論してきた待ち行列モデルは全て一つの地点でサービスを要求するものであった．ここでは，ある地点でサービスを受けた客が他の地点に移動し，そこで新たなサービスを受ける待ち行列モデル，すなわち，**待ち行列網**（queueing network）について良く知られている結果を紹介する．図 32 は二つのノードからなる待ち行列網の例である．外部から網への到着は両方のノードにある．1 段目のノードでサービスを終了した客の一部は網を離脱するが，残りは 2 段目のノードへ向かう．2 段目のノードでは 1 段目のノードから来た客と外部から来た客が一つの待ち行列を作り，順次，サービスを受けた後，網を離脱する．

さて，$J$ 個のノードからなる待ち行列網を考える．$j$ 番目のノードには率 $\beta_j$ のポワソン過程に従い外部から客が到着すると仮定する．$j$ 番目のノードでのサービスは以下に示す 3 つのタイプのいずれか一つであるとする．

**$M/M/c$ 型** $c_j$ 個のサーバがあり，サービス時間はパラメタ $\mu_j$ の指数分布に従う．
**$M/G/\infty$ 型** 無限個のサーバがあり，平均サービス時間は $1/\mu_j$ である．便宜上 $c_j = \infty$ とする．
**PS 型** 1 個のサーバがあり，客はプロセッサシェアリングサービス規律に従いサービスを受ける．平均サービス時間は $1/\mu_j$ である．便宜上 $c_j = 1$ とする．

さらに $j$ 番目のノードでのサービスを終了した客は，確率 $r_{j,k}$ で $k$ 番目のノードへ向かうと仮定する．よって，$j$ 番目のノードでのサービスを終了後，網の外部へ離脱する確率 $r_{j,0}$ は

$$r_{j,0} = 1 - \sum_{k=1}^{J} r_{j,k} \geq 0$$

で与えられる．

ここで，単位時間当たりに $j$ 番目のノードに到着する客数の平均を $\lambda_j$ とすると，$\lambda_j$ は次式を満たす．

$$\lambda_j = \beta_j + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i r_{i,j} \tag{70}$$

さらに網に到着した客はいずれ必ず網を離脱すると仮定する．言い替えると，式 (70) を満たす正値 $\lambda_j < \infty$ が存在し，$\rho_j = \lambda_j/\mu_j$ としたとき，全ての $j$ に対して $\rho_j < c_j$ が成立すると仮定する．このとき，この待ち行列網は安定であり，系内客数の結合確率に関して定常状態解が存在することが知られている．

$L_j$ を定常状態における $j$ 番目のノードの系内客数とする．系内客数の結合確率 $p(k_1, \ldots, k_J)$ を

$$p(k_1, \ldots, k_J) = \Pr(L_1 = k_1, \ldots, L_J = k_J)$$

で定義する．

**定理 45** 結合確率 $p(k_1, \ldots, k_J)$ は，以下のように各ノードにおける系内客数分布 $p_j(k_j) = \Pr(L_j = k_j)$ の積で与えられる (Baskett et al. 1975)．

$$p(k_1, \ldots, k_J) = p_1(k_1) \cdots p_J(k_J) \tag{71}$$

ただし $p_j(k_j)$ は $M/M/c$ 型ならば式 (27) で与えられ，$M/G/\infty$ 型ならば式 (28) で与えられ，PS 型ならば式 (25) で与えられる．

このように，系内客数に関する結合確率が個々のノードに関する確率の積で与えられるため，式 (71) は**積形式解**（product-form solution）と呼ばれている．

# A　ポワソン過程の独立増分性について

客の到着間隔が独立同一な指数分布に従う場合，独立増分性をもつことを示す．なお，この章の内容に関しては，九州工業大学の内田真人准教授から多数の貴重なコメントを頂いた．ここに謝意を表します．

**補題 46** 独立同一なパラメタ $\lambda$ をもつ指数分布に従う到着間隔で客が到着すると仮定する．ここで，$A(x, y]$ を時間区間 $(x, y]$ に到着する客数を表す確率変数とする．もし，2 つの時間区間 $(y_1, y_1 + x_1]$ と $(y_2, y_2 + x_2]$ が重なり合わない（$y_1 + x_1 \leq y_2$） ならば，

$$\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) = \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2)$$

が成立する．

**証明**　最初に，客の到着間隔が独立同一な任意の分布に従う場合について

<u>ある客の到着時刻を時刻 0 とし，$y_1 \geq 0$ である</u>

という仮定の下で一般的に成立する性質について述べる．

以下では，$\tau_0 = 0$ とし，$\tau_k$ を $k$ 番目の客の到着時刻とする．このとき，到着間隔を $Y_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ で表すならば，$\tau_k = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k$ である．到着間隔が独立同一な分布に従う場合，

$$\tau_k \leq t \quad \Leftrightarrow \quad A(0, t] \geq k$$

が成立し，一般には，全ての $n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ に対して

$$\tau_{n+k} - \tau_n \leq t \quad \Leftrightarrow \quad A(\tau_n, \tau_n + t] \geq k$$

が成立する．このように，到着間隔が独立同一な分布に従う場合，$n$ 番目の客の到着時刻 $\tau_n$ が与えられるとそれ以降の客の到着時刻は，$n-1$ 番目までの客の到着時刻とは独立となることに注意する．

さて，$\tau_{\text{last}}$ を時刻 $y_2$ 以前の最後の客の到着時刻とし，$\tau_{\text{next}}$ を時刻 $y_2$ 以降の最初の客の到着時刻とする．定義より，$\tau_{\text{last}} \le y_2 < \tau_{\text{next}}$ である．また，時刻 $\tau_{\text{next}}$ に到着する客の到着間隔を $X_1 = \tau_{\text{next}} - \tau_{\text{last}}$ とする．さらに，$\tau_{\text{next}}$ 以降の到着間隔を順に $X_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ と書く．

今，時間区間 $[0, y]$ の間における最後の到着時刻から $y$ までの時間間隔を $T_0(y)$ とする．定義より $T_0(y_2) = y_2 - \tau_{\text{last}}$ となり，$X_1 > T_0(y_2)$ である．$T_0(y)$ の分布関数を $F_y(z)$ と書き，事象 $\chi$ という条件の下での $T_0(y)$ の分布関数を $F_y(z \mid \chi)$ と書く．

**(i)** $A(y_1 + x_1, y_2] > 0$ の場合: このとき，$y_1 + x_1 < \tau_{\text{last}} = y_2 - T_0(y_2) \le y_2$ であるので，このような $T_0(y_2)$ が与えられると，到着間隔が独立同一な分布に従うことより，時刻 $\tau_{\text{last}}$ 以降の到着時刻のみで定まる事象 $A(y_2, y_2 + x_2] = k_2$ は時刻 $\tau_{\text{last}}$ 以前の到着時刻で定まる事象 $A(y_1, y_1 + x_1]$ とは独立となる（このような場合を条件付き独立である（conditionally independent）という）．よって

$$
\begin{aligned}
&\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_1 + x_1, y_2] > 0) \\
&= \int_0^{y_2 - y_1 - x_1} \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z, A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_1 + x_1, y_2] > 0) \\
&\qquad \cdot dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_1 + x_1, y_2] > 0) \\
&= \int_0^{y_2 - y_1 - x_1} \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_1 + x_1, y_2] > 0)
\end{aligned}
$$

**(ii)** $A(y_1, y_1 + x_1] > 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0$ の場合： このとき，$y_1 < \tau_{\text{last}} = y_2 - T_0(y_2) \le y_1 + x_1$ であり，このような $T_0(y_2)$ が与えられたとき

$$
A(y_1, y_1 + x_1] = k_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad A(y_1, y_2 - T_0(y_2)) = k_1 - 1 \ge 0
$$

である．よって

$$
\begin{aligned}
&\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1 > 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0) \\
&= \int_{y_2 - y_1 - x_1}^{y_2 - y_1} \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z, A(y_1, y_1 + x_1] = k_1 > 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0) \\
&\qquad \cdot dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1 > 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0) \\
&= \int_{y_2 - y_1 - x_1}^{y_2 - y_1} \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z, A(y_1, y_2 - z) = k_1 - 1 \ge 0) \\
&\qquad \cdot dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1 > 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0) \\
&= \int_{y_2 - y_1 - x_1}^{y_2 - y_1} \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1 > 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0)
\end{aligned}
$$

**(iii)** $A(y_1, y_1 + x_1) = 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0$ の場合： このとき，$0 \le \tau_{\text{last}} = y_2 - T_0(y_2) \le y_1$ であり，

$$
0 \le y_2 - T_0(y_2) \le y_1 \quad \Rightarrow \quad A(y_1, y_1 + x_1] = 0 \text{ かつ } A(y_1 + x_1, y_2] = 0
$$

である．よって，

$$
\begin{aligned}
&\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0) \\
&= \int_{y_2 - y_1}^{y_2} \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z, A(y_1, y_1 + x_1] = 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0) \\
&\qquad \cdot dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1 + x_1] = 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0) \\
&= \int_{y_2 - y_1}^{y_2} \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1 + x_1] = 0, A(y_1 + x_1, y_2] = 0)
\end{aligned}
$$

よって，(ii), (iii) の場合をまとめて記述すると次式を得る．

$$
\begin{aligned}
&\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \\
&\quad = \Pr(A(y_1 + x_1, y_2] > 0 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \\
&\qquad\qquad \cdot \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_1 + x_1, y_2] > 0) \\
&\qquad + \Pr(A(y_1 + x_1, y_2] = 0 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \\
&\qquad\qquad \cdot \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_1 + x_1, y_2] = 0) \\
&\quad = \Pr(A(y_1 + x_1, y_2] > 0 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \\
&\qquad\qquad \cdot \int_0^{y_2 - y_1 - x_1} \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_1 + x_1, y_2] > 0) \\
&\qquad + \Pr(A(y_1 + x_1, y_2] = 0 \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1) \\
&\qquad\qquad \cdot \int_{y_2 - y_1 - x_1}^{y_2} \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1 + x_1] = k_1, A(y_1 + x_1, y_2] = 0)
\end{aligned}
$$

上記で現れた被積分関数は全て同じ形 $\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z)$ をしており，

$$
\begin{aligned}
&\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) \\
&\quad = \Pr(A(y_2 - z, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2 - z) = 0, A(y_2 - z, y_2] = 0) \\
&\quad = \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_{k_2} \leq z + x_2, X_1 + X_2 + \cdots + X_{k_2} + X_{k_2+1} > z + x_2 \mid X_1 > z)
\end{aligned}
$$

と書くことができる．

特に，$X_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ が独立同一なパラメタ $\lambda$ をもつ指数分布に従う場合，指数分布の無記憶性より $X_1 > z$ という条件下において $X_1' = X_1 - z$ は $X_1$ と同じ分布に従う．

$$
\begin{aligned}
\Pr(X_1 - z \leq x \mid X_1 > z) &= \frac{\Pr(X_1 \leq x + z, X_1 > z)}{\Pr(X_1 > z)} \\
&= \frac{\Pr(z < X_1 \leq x + z)}{\Pr(X_1 > z)} \\
&= \frac{\exp[-\lambda(z)] - \exp[-\lambda(x + z)]}{\exp[-\lambda z]} \\
&= 1 - \exp(-\lambda x) \\
&= \Pr(X_1 \leq x)
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
&\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) \\
&\quad = \Pr(X_1 + X_2 + \cdots + X_{k_2} \leq z + x_2, X_1 + X_2 + \cdots + X_{k_2} + X_{k_2+1} > z + x_2 \mid X_1 > z) \\
&\quad = \Pr(X_1' + X_2 + \cdots + X_{k_2} \leq x_2, X_1' + X_2 + \cdots + X_{k_2} + X_{k_2+1} > x_2) \\
&\quad = \Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = 0)
\end{aligned}
$$

このように，上記で現れた共通の被積分関数 $\Pr(A(y_2, y_2 + x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z)$ は $z$ と独立な量となる．

以上の議論より，

$$
\begin{aligned}
&\Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \\
&\quad = \Pr(A(y_1+x_1, y_2] > 0 \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \\
&\qquad\qquad \cdot \int_0^{y_2-y_1-x_1} \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1, A(y_1+x_1, y_2] > 0) \\
&\qquad\quad + \Pr(A(y_1+x_1, y_2] = 0 \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \\
&\qquad\qquad \cdot \int_{y_2-y_1-x_1}^{y_2} \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1, A(y_1+x_1, y_2] = 0) \\
&\quad = \Pr(A(y_1+x_1, y_2] > 0 \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \\
&\qquad\qquad \cdot \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = 0) \int_0^{y_2-y_1-x_1} dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1, A(y_1+x_1, y_2] > 0) \\
&\qquad\quad + \Pr(A(y_1+x_1, y_2] = 0 \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \\
&\qquad\qquad \cdot \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = 0) \int_{y_2-y_1-x_1}^{y_2} dF_{y_2}(z \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1, A(y_1+x_1, y_2] = 0) \\
&\quad = \Pr(A(y_1+x_1, y_2] > 0 \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = 0) \\
&\qquad\quad + \Pr(A(y_1+x_1, y_2] = 0 \mid A(y_1, y_1+x_1] = k_1) \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = 0) \\
&\quad = \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = 0)
\end{aligned}
$$

を得る．一方，$\Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2)$ に関しても

$$
\begin{aligned}
\Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2) &= \int_0^{\infty} \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = z) dF_{y_2}(z) \\
&= \int_0^{\infty} \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = 0) dF_{y_2}(z) \\
&= \Pr(A(y_2, y_2+x_2] = k_2 \mid T_0(y_2) = 0)
\end{aligned}
$$

となる．よって題意が示された．

# B　最小限暗記すべきこと

講義内容を理解する前提として暗記すべき事を列挙しておく．

- 平均 $a$ のポワソン分布
$$\Pr(N=k)=e^{-a}\frac{a^k}{k!},\qquad k=0,1,\ldots$$
- パラメタ $\mu$ をもつ指数分布（平均 $1/\mu$）
$$\Pr(X\le x)=1-e^{-\mu x},\qquad x\ge 0$$
密度関数は分布関数を微分したもの，パラメタ $\mu$ をもつ指数分布の場合 $\mu e^{-\mu x}$
- $\exp(a)$ のマクローリン展開（0 周りのテーラー展開）
$$e^a=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{k!}$$
- 等比級数の和
$$\sum_{k=m}^{n}a^k=\begin{cases}a^m\cdot\dfrac{1-a^{n-m+1}}{1-a}, & a\ne 1\\ n-m+1, & a=1\end{cases}$$
- 非負離散確率変数 $L$ の確率母関数（確率関数の Z 変換） $L^*(z)$
$$L^*(z)=E\left[z^L\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\Pr(L=k)z^k$$
- 非負確率変数 $X$ のラプラス・スティルチェス変換（密度関数のラプラス変換）$X^*(s)$
$$X^*(s)=E\left[e^{-sX}\right]=\int_0^{\infty}e^{-sx}dF(x)=\int_0^{\infty}e^{-sx}f(x)dx$$
ただし $F(x)$，$f(x)$ はそれぞれ $X$ の分布関数，密度関数

# C　演習問題の略解

**2.1.**　略：(1) 7 ページの定理 1 を参照　(2) 2.2 節の最後の 2 段落（9 ページ）を参照

**2.2.**　略：(1) 10 ページの定義 3 を参照　(2) 11 ページの小さなフォントで書かれた部分の下線部参照　(3) 11 ページの一定到着率の仮定を参照

**2.3.**　略：11 ページの式 (13) を含む段落参照

**2.4.**　略：(1) 10 ページの 2.3.2 節参照　(2) 11 ページの 2.3.3 節参照　(3) 12 ページの 2.3.4 節参照

**2.5.**　略：13 ページの 2.3.5 節参照

**2.6.**
$$\sum_{k=0}^{\infty}\Pr(X>k)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k+1}^{\infty}\Pr(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\Pr(X=n)=\sum_{n=1}^{\infty}n\Pr(X=n)$$
より $\sum_{k=0}^{\infty}\Pr(X>k)=E[X]$.

**2.7.** 分布関数を $F(x) = \Pr(X \le x)$，密度関数を $f(x) = dF(x)/dx$ とする．このとき

$$\int_0^\infty \Pr(X > x)dx = \int_0^\infty (1 - F(x))dx = [x(1 - F(x)]_0^\infty + \int_0^\infty xf(x)dx = [x(1 - F(x)]_0^\infty + E[X]$$

もし $E[X] = \infty$ ならば

$$[x(1 - F(x)]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) \ge 0$$

より題意は成立．一方， $E[X]$ が有限ならば右辺第 1 項は

$$[x(1 - F(x)]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) \ge 0$$

かつ

$$\lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) = \lim_{x\to\infty} x \int_x^\infty f(y)dy = \lim_{x\to\infty} \int_x^\infty xf(y)dy \le \lim_{x\to\infty} \int_x^\infty yf(y)dy$$

である．ここで

$$\int_0^\infty yf(y)dy = \int_0^x yf(y)dy + \int_x^\infty yf(y)dy = E[X] < \infty$$

かつ，

$$\int_0^\infty yf(y)dy = \lim_{x\to\infty} \int_0^x yf(y)dy = E[X] < \infty$$

より，

$$\lim_{x\to\infty} \int_x^\infty yf(y)dy = 0$$

を得る．よって $[x(1 - F(x)]_0^\infty = \lim_{x\to\infty} x(1 - F(x)) = 0$ となり題意が成立．

**2.8.** (1)「$X_{\max} \le x$」は「全ての $n$ に対して $X_n \le x$」と等価．$X_n$ は互いに独立なので $\Pr(X_1 \le x, \ldots X_N \le x) = \Pr(X_1 \le x) \cdot \cdots \cdot \Pr(X_N \le x)$ より $F^N(x)$　(2)「$X_{\min} > x$」は「全ての $n$ に対して $X_n > x$」と等価，(1) と同様に考えて $\Pr(X_{\min} > x) = (1 - F(x))^N$ より $1 - (1 - F(x))^N$

**2.9.** 仮に $X_{\min} = X_j = x$ とすると，各 $i$（$i = 1, 2, \ldots, N,\, i \ne j$）に対して $X_i = X_i' + x$ と書き直すことができる．指数分布の無記憶性から $X_i'$ はパラメタ $\mu$ の指数分布に従う．一方，このとき

$$\begin{aligned}Y &= X_{\max} - X_{\min} = \max(X_1, X_2, \ldots, X_N) - x = \max(X_1 - x, \ldots, X_{j-1} - x, 0, X_{j+1} - x, \ldots, X_N - x)\\ &= \max(X_1', \ldots, X_{j-1}', X_{j+1}', \ldots, X_N')\end{aligned}$$

が $x$ の値に関わらず成立する．よって $Y$ は独立で同一なパラメタ $\mu$ の指数分布に従う $N-1$ 個の確率変数の最大値と等しい．以上より $(1 - \exp(-\mu x))^{N-1}$．

**2.10.** $X_j = x$ ならば「$X_j = \min(X_1, \ldots, X_n))$」$\Leftrightarrow$「$X_i > x$ $(i \ne j)$」を利用する．

$$\begin{aligned}\Pr(X_j = \min(X_1, \ldots, X_n)) &= \int_0^\infty \mu_j e^{-\mu_j x} e^{-\mu_1 x} \cdots e^{-\mu_{j-1} x} e^{-\mu_{j+1} x} \cdots e^{-\mu_n x} dx\\ &= \mu_j \int_0^\infty e^{-(\mu_1 + \cdots + \mu_n)x} dx = \frac{\mu_j}{\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n}\end{aligned}$$

**2.11.** 2 台の機械が処理を続けていくと，やがて 2 台の機械が共にジョブを処理中であり，未処理のジョブが残っていないという状況が起こる．このような時点を一つ選び，時刻 $t = 0$ とする．$t = 0$ において，それぞれの機械が処理中のジョブの処理を完了するまでに必要な時間は，指数分布の無記憶性から，それらが時刻 $t = 0$ においてどれだけ処理を受けていたかにかかわらず，機械 $i$ が処理中のジョブの処理を完了する時間はパラメタ $\mu_i$ の指数分布に従う．よって前問の結果から，機械 $i$ $(i = 1, 2)$ が先に停止する確率は $\mu_i/(\mu_1 + \mu_2)$ で与えられる．

**2.12.** $N=n$ で条件付けを行って計算すれば得られる．

$$\Pr(S_N=k)=\sum_{n=k}^{\infty}\Pr(N=n)\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\cdot\sum_{n=k}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^{n-k}}{(n-k)!}=e^{-\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}\cdot e^{(1-p)\lambda}$$
$$=e^{-p\lambda}\frac{(p\lambda)^k}{k!}$$

**3.1.** 略：(1) 18 ページの式 (20) 参照　(2) 18 ページの式 (21) 参照　(3) 18 ページの式 (22) 参照　(4) 18 ページの式 (23) 参照　(5) 18 ページの式 (24) 参照

**3.2.** 略：19 ページの 3.2.1 節参照

**3.3.** (1) 略：20 ページの 3.2.2 節参照　(2) 到着時に系内客数が $K$ 人であった客は呼損となる．ポワソン過程の性質より，到着客が見るシステムの状態確率は定常状態確率に等しい．よって呼損率は $p_K$ で与えられる．

**3.4.** 略：22 ページの 3.2.3 節参照

**3.5.** 略：25 ページの 3.2.4 節参照

**3.6.** (1) 略　(2) 到着時に系内客数が $c$ 人であった客は呼損となる．ポワソン過程の性質より，到着客が見るシステムの状態確率は定常状態確率に等しい．よって呼損率 $B(c,\rho)$ は $p_c$ に等しい．　(3) 再帰式は (2) の結果を右辺に代入すれば確かめられる

**3.7.** (1)

$$\begin{aligned}
P_0(t+\delta t)&=(1-\lambda\delta t+o(\delta t))P_0(t)+(\mu\delta t+o(\delta t))P_1(t)\\
P_n(t+\delta t)&=(\lambda\delta t+o(\delta t))P_{n-1}(t)+(1-(\lambda+\mu)\delta t+o(\delta t))P_n(t)+(\mu\delta t+o(\delta t))P_{n+1}(t),\quad n=1,\ldots,N-1\\
P_N(t+\delta t)&=(\lambda\delta t+o(\delta t))P_{N-1}(t)+(1-\mu\delta t+o(\delta t))P_N(t)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_0(t)&=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)\\
\frac{d}{dt}P_n(t)&=\lambda P_{n-1}(t)-(\lambda+\mu)P_n(t)+\mu P_{n+1}(t),\quad n=1,\ldots,N-1\\
\frac{d}{dt}P_N(t)&=\lambda P_{N-1}(t)-\mu P_N(t)
\end{aligned}$$

(2) $N=1$ のとき $P_0(t)+P_1(t)=1$ である．よって

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}P_0(t)&=-\lambda P_0(t)+\mu P_1(t)=-(\lambda+\mu)P_0(t)+\mu\\
\frac{d}{dt}P_1(t)&=\lambda P_0(t)-\mu P_1(t)=-(\lambda+\mu)P_1(t)+\lambda
\end{aligned}$$

それぞれ 1 階線形微分方程式なので適当な方法で解くと

$$\begin{aligned}
P_0(t)&=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\left(P_0(0)-\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\exp(-(\lambda+\mu)t)\\
P_1(t)&=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\left(P_1(0)-\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\exp(-(\lambda+\mu)t)
\end{aligned}$$

(3)

$$P_0(0)=\frac{\mu}{\lambda+\mu},\qquad P_1(0)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

(4)

$$P_0(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \left(P_0(0) - \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)\exp(-(\lambda+\mu)t)$$
$$P_1(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \left(P_1(0) - \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)\exp(-(\lambda+\mu)t)$$

において，$\lim_{t\to\infty}\exp(-(\lambda+\mu)t) = 0$ なので $P_i(t)$ の第 2 項は 0 となる．よって

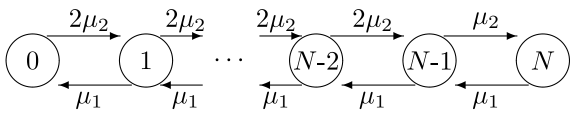
$$P_0 = P_0(\infty) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad P_1 = P_1(\infty) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

であり

$$R_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \qquad R_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$$

なので，これらは同じ確率分布である．

**3.8.** 待ち行列 2 に二人以上の客がいる場合（＝待ち行列 1 にいる客が $N-2$ 以下の場合），サービス中の二人の客がそれぞれに率 $\mu_2$ でサービスを受けることになる．このとき，サービスが終了する率は $2\mu_2$ であり，サービスが終了すると待ち行列 1 の客数が一つ増える．同様に，待ち行列 2 に一人の客がいる場合（待ち行列 1 の客数が $N-1$ の場合），サービスが終了する率は $\mu_2$ であり，サービスが終了すると待ち行列 1 の客数が一つ増える．また，待ち行列 2 に客がいない場合，待ち行列 1 の客数が増えることはない．一方，待ち行列 1 に一人以上の客がいる場合，率 $\mu_1$ でサービスが終了し，このとき待ち行列 1 の客数は一つ減る．よって，待ち行列 1 にいる客の数を状態変数に取ると，これは下記のような $N+1$ 状態をもつ出生死滅過程となる．




(1) $\rho = 2\mu_2/\mu_1$ としたとき，$\rho \neq 1$ ならば $\pi_0 = 2(1-\rho)/[2(1-\rho^N)+\rho^N(1-\rho)]$，$\rho = 1$ ならば $\pi_0 = 1/(N+0.5)$
(2) $\rho \neq 1$ ならば

$$E[L_1] = \frac{2\rho - N\rho^N - 2\rho^{N+1} + N\rho^{N+2}}{(1-\rho)(2-\rho^N-\rho^{N+1})}$$

$\rho = 1$ ならば $E[L_1] = N^2/(2N+1)$． (3) $\rho < 1$ ならば $E[L_2]/E[L_1] \to \infty$，すなわち待ち行列 2 にほとんど全ての客が集まる．逆に $\rho > 1$ なら $E[L_2]/E[L_1] \to 0$, すなわち待ち行列 1 にほとんど全ての客が集まる．$\rho = 1$ の場合，$E[L_2]/E[L_1] \to 1$, すなわち，客はまんべんなく二つの待ち行列に散らばる（どちらか一方に大多数の客が集まる事はない）．

**4.1.** 略 : (1) 29 ページの定義 15 参照 (2) 29 ページの定義 15 の次の文を参照 (3) 32 ページ参照 (4) 33 ページ参照 (5) 34 ページ参照

**4.2.** (1)

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

(2)

$$\pi_0 + \pi_1 = 1, \qquad (\pi_0, \pi_1)\boldsymbol{P} = (\pi_0, \pi_1)$$

より，

$$\pi_0 = \frac{q}{p+q}, \qquad \pi_1 = \frac{p}{p+q}$$

(3) $\boldsymbol{P}^{[n]} = \boldsymbol{P}^n$ である．$\boldsymbol{P}$ を対角化することにより

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{1}{p+q} & \dfrac{-q}{p+q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}^{[n]} &= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{1}{p+q} & \dfrac{-q}{p+q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (1-p-q)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q & p \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \\ \dfrac{q}{p+q} & \dfrac{p}{p+q} \end{pmatrix} + (1-p-q)^n \begin{pmatrix} \dfrac{p}{p+q} & \dfrac{-p}{p+q} \\ \dfrac{-q}{p+q} & \dfrac{q}{p+q} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(4) 確率の和が 1 なので $\Pr(X_0 = 1) = 1 - \alpha$．また，$\boldsymbol{\pi}^{[n]} = (\Pr(X_n = 0), \Pr(X_n = 1))$ とすると $\boldsymbol{\pi}^{[n]} = \boldsymbol{\pi}^{[0]}\boldsymbol{P}^n$ が成立．よって

$$\Pr(X_n = 0) = \frac{q}{p+q} + \frac{p\alpha - q(1-\alpha)}{p+q}(1-p-q)^n, \qquad \Pr(X_n = 1) = \frac{p}{p+q} - \frac{p\alpha - q(1-\alpha)}{p+q}(1-p-q)^n$$

(5)

$$\Pr(X_\infty = 0) = \lim_{n\to\infty} \Pr(X_n = 0) = \frac{q}{p+q}$$

同様に $\Pr(X_n = 1) = p/(p+q)$ なので，定常状態確率と一致する．

**4.3.** (1) 一般に $a_k$ は 36 ページの式 (35) で与えられる．サービス時間がパラメタ $\mu$ の指数分布に従う場合は例 25 を参照．(2)–(7) 略：36 ページの式 (35) 以降の議論を参照

**4.4.** 定義に従って計算する．(1)

$$G^*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\mu e^{-\mu x} dx = \frac{s}{s+\mu}$$

(2)

$$P^*(z) = \sum_{j=0}^\infty e^{-\rho}\frac{\rho^j}{j!}z^j = e^{-\rho}\sum_{j=0}^\infty \frac{(\rho z)^j}{j!} = e^{-\rho}e^{\rho z} = e^{-\rho(1-z)}$$

**4.5.** (1)

$$L^*(z) = \sum_{k=0}^\infty (1-\rho)\rho^k z^k = \frac{1-\rho}{1-\rho z}$$

(2) $E[L] = \lim_{z\to 1} dP^*(z)/dz = \rho/(1-\rho)$ (3) リトルの公式より平均滞在時間は $E[L]/\lambda = 1/\{\mu(1-\rho)\}$．一方，平均滞在時間は平均待ち時間 $E[W_q]$ と平均サービス時間 $1/\mu$ の和で与えられるので $E[W_q] = E[L]/\lambda - 1/\mu = \rho/\{\mu(1-\rho)\}$．

**4.6.** (1) 40 ページの式 (40) に続く議論を参照 (2) 40 ページの式 (40) を参照 (3) $H^*(0) = 1$ なので，$\lim_{z\to 1-} L(z)$ は 0/0 の不定形となる．よって，ロピタルの定理を利用する．

$$\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}H^*(\lambda - \lambda z) = -\lambda \lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}H^*(s) = -\lambda(-b) = \rho$$

に注意．以下略． (4) 母関数ならびにラプラス・スティルチェス変換の性質を活用する．

$$\lim_{z\to 1}\frac{d^2}{dz^2}H^*(\lambda - \lambda z) = \lambda^2 \lim_{s\to 0}\frac{d^2}{ds^2}H^*(s) = \lambda^2 b^{(2)}$$

に注意．分母を払った式

$$L^*(z)[z - H^*(\lambda - \lambda z)] = (1-\rho)(z-1)H^*(\lambda - \lambda z)$$

の両辺を 2 階微分し，

$$\lim_{z\to 1} L(z) = 1, \qquad \lim_{z\to 1} \frac{d}{dz} L^*(z) = E[L]$$

に注意すると

$$2E[L](1-\rho) - \lambda^2 b^{(2)} = 2(1-\rho)\rho$$

を得る．よって

$$E[L] = \frac{\lambda^2 b^{(2)}}{2(1-\rho)} + \rho$$

(5) 平均系内滞在時間 $E[W]$ はリトルの公式から

$$E[W] = E[L]/\lambda = \frac{\lambda b^{(2)}}{2(1-\rho)} + b$$

となる．$E[W] = E[W_q] + b$ であるので答えは上式の右辺第 1 項．(6) $\lim_{z\to 1} d^n H^*(\lambda - \lambda z)/dz^n = \lambda^n b^{(n)}$ に注意．分母を払った後，$n+1$ 階微分を取り，項を整理すれば得られる．

**4.7.** (1)–(11) 略 : 41 ページの 4.2.2 節参照 (12) ポワソン到着なので到着した客が見るシステムの状態は定常分布 $p_j^{(K)}$ に従う．システムに入れないということは，到着時に系内客数が $K$ であるということと等価であり，その確率は $p_K^{(K)}$ で与えられる．

**4.8.** 略 : 43 ページの定理 29 の後に続く議論を参照

**4.9.** 略 : 44 ページの 4.2.3 節を参照

**4.10.** 略 : 47 ページの定理 31 の直前の段落を参照

**4.11.** 一般に

$$\lim_{z\to 1} \frac{d^n}{dz^n} H^*(\lambda - \lambda z) = \lambda^n b^{(n)}$$

となることに注意.

$$L^*(z)[z - H^*(\lambda - \lambda z)] = (1-\rho)(z-1)H^*(\lambda - \lambda z)$$

を $n+1$ 回微分し，$z \to 1$ とすると

$$\binom{n+1}{1} L^{(n)}(1-\lambda b) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} L^{(k)} \lambda^{n+1-k} b^{(n+1-k)} = (1-\rho)\binom{n+1}{1}\lambda^n b^{(n)}$$

となり，これより式 (43) を得る．

**4.12.** (1) $X = k$ で条件付けを行う．

$$\begin{aligned} E[z^Y] &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k) E[z^Y \mid X=k] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k) E[z^{Z_1+\cdots+Z_k}] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k) E[z^{Z_1}] \cdots E[z^{Z_k}] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k)(1-p+pz)^k = F(1-p+pz) \end{aligned}$$

(2)

$$E[z^X \mid Y = X] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k \mid X=Y) E[z^X \mid Y=X, X=k] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k \mid X=Y) z^k$$

また，

$$\Pr(Y=X, X=k) = \Pr(X=k)\Pr(Y=X \mid X=k) = \Pr(X=k)\Pr(Y=k \mid X=k) = \Pr(X=k)p^k$$
$$\Pr(X=Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k)\Pr(X=Y \mid X=k) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k)p^k = F(p)$$

なので $\Pr(X=k \mid X=Y) = \Pr(Y=X, X=k)/\Pr(Y=X) = \Pr(X=k)p^k/F(p)$．よって

$$E[z^X \mid Y=X] = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr(X=k)p^k z^k/F(p) = F(pz)/F(p)$$

(3) まず分布と母関数は 1 対 1 に対応しており，母関数の引数は $|z| \le 1$ で定義されており，現在の設定では，$z$ は $p$ とは独立な変数であることに注意．$F(1-p+pz)F(p) = F(pz)$ に $z=0$ を代入して $F(1-p)F(p) = F(0)$．これを用いて $F(p)$ を消去すると $F(1-p+pz)F(0) = F(1-p)F(pz)$ を得る．ここで $G(z) = F(z)/F(0)$ とおくと $G(1-p+pz) = G(1-p)G(pz)$ が成立．すわわち $G(x+y) = G(x)G(y)$ が成立．$H(x) = \log G(x)$ とおくと $H(x+y) = H(x) + H(y)$, すなわち，ある定数 $a$ を用いて $H(x) = ax$ とかける．よって $G(z) = e^{az}$ であり，$F(z) = F(0)e^{az}$ を得る．母関数の定義より $F(1) = 1$ なので $F(0) = e^{-a}$．よって

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Pr(X=n)z^n = F(z) = e^{-a}e^{az} = e^{-a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \cdot z^n$$

となり $\Pr(X=n)$（$\ge 0$）はある正定数 $a$ を用いて $\Pr(X=n) = e^{-a}a^n/n!$．答えはポワソン分布．

**4.13.**　$N=k$ が与えられれば，$Y = X_1 + \cdots + X_k$ であり，$X_i$ 独立同一な分布に従うので

$$Y_k^*(s) = E[e^{-sY} \mid N=k] = (G^*(s))^k$$

である．よって

$$Y^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}Y_k^*(s) = \exp[-(\lambda - \lambda G^*(s))]$$

**4.14.**　(1) 定義より

$$a_k^{(i)} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}b_i(x)dx$$

であるので

$$A_i(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k^{(i)} = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}e^{\lambda z x}b_i(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-\lambda z)x}b_i(x)dx = B_i^*(\lambda - \lambda z)$$

(2) 離脱直後の系内客数に注目する．密度関数 $b_1(x)$ に従うサービスを受ける客は空のシステムに到着した客である．すなわち，このような客のサービスは，離脱直後の系内客数が 0 である時点に引き続いて起こる（暫くシステムは空の状態となり，その後に到着した最初の客が該当する）．一方，離脱直後に客が系内に残っていた場合，直ちに次のサービスが行われ，この間に到着した客は全て密度関数 $b_2(x)$ に従うサービスを受ける．このように密度関数 $b_1(x)$ に従うサービスは離脱直後の系内客数が 0 の時点後，最初のサービスのみに適用される．この観察から，

$$\pi_n = \pi_0 a_n^{(1)} + \sum_{k=1}^{n+1} \pi_k a_{n+1-k}^{(2)}$$

を得る．左辺は $m+1$ 番目の離脱直後に系内客数が $n$ である確率に相当し，右辺第 1 項は $m$ 番目の離脱直後に系内客数が 0 であり，その後のサービス（密度関数 $b_1(x)$）の間に $n$ 人の到着がある確率となっている．また，右辺第 2 項は $m$ 番目の離脱直後に系内客数が $k$ であり，引き続いて行われるサービス（密度関数 $b_2(x)$）の間に $n+1-k$ 人の到着がある確率となっていることに注意する．両辺に $z^n$ をかけて全ての場合について和をとると

$$\Pi(z) = \pi_0 A_1(z) + \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty} z^k \pi_k \cdot A_2(z) = \pi_0 A_1(z) + \frac{1}{z}(\Pi(z) - \pi_0) \cdot A_2(z)$$

となり，$\Pi(z)$ について解くと

$$\Pi(z) = \pi_0 \cdot \frac{zA_1(z) - A_2(z)}{z - A_2(z)}$$

を得る．$\lim_{z\to 1} \Pi(z) = 1$ より

$$1 = \pi_0 \cdot \lim_{z\to 1} \frac{zA_1(z) - A_2(z)}{z - A_2(z)} = \pi_0 \cdot \lim_{z\to 1} \frac{A_1(z) + zA_1'(z) - A_2'(z)}{1 - A_2'(z)} = \pi_0 \cdot \frac{1 + \lambda b_1 - \lambda b_2}{1 - \lambda b_2}$$

となるので，次式を得る．

$$\Pi(z) = \frac{1 - \lambda b_2}{1 + \lambda b_1 - \lambda b_2} \cdot \frac{zA_1(z) - A_2(z)}{z - A_2(z)}$$

(3) $\Pi(z)$ は定常状態におけるサービス終了直後の客数分布の確率母関数である．客数過程の標本路はステップサイズ 1 の階段関数となるので，定常状態におけるサービス終了直後の客数分布は客の到着直前の客数分布に等しい．さらに客の到着はポワソン過程に従うため，客の到着直前の客数分布，すなわち，到着した客が見る客数分布は定常状態における任意時点での客数分布に等しい．

**4.15.** (1)

$$A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \frac{(\lambda x)^k}{k!} dB(x) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda z x)^k}{k!} dB(x) = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - \lambda z)x} dB(x) = B^*(\lambda - \lambda z)$$

(2) $i = 0$ のとき：

$$p_{0,j} = \begin{cases} 0, & j = 0, 1, \ldots, N-2 \\ a_{j-N+1}, & j = N-1, N, \ldots \end{cases}$$

$i \geq 1$ のとき：

$$p_{i,j} = \begin{cases} 0, & j = 0, 1, \ldots, i-2 \\ a_{j-i+1}, & j = i-1, i, \ldots \end{cases}$$

(3) $0 \leq j \leq N-2$ のとき：

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}$$

$j \geq N-1$ のとき：

$$\pi_j = \pi_0 a_{j-N+1} + \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1}$$

となる．よって

$$\begin{aligned}
\Pi(z) &= \sum_{j=0}^{N-2} z^j \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1} + \sum_{j=N-1}^{\infty} z^j \pi_0 a_{j-N+1} + \sum_{j=N-1}^{\infty} z^j \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} z^j \sum_{i=1}^{j+1} \pi_i a_{j-i+1} + \pi_0 \sum_{j=N-1}^{\infty} z^j a_{j-N+1} \\
&= \frac{1}{z} \sum_{i=1}^{\infty} \pi_i z^i \sum_{j=i-1}^{\infty} z^{j-i+1} a_{j-i+1} + \pi_0 z^{N-1} \sum_{j=N-1}^{\infty} a_{j-N+1} \\
&= \frac{1}{z} (\Pi(z) - \pi_0) A(z) + \pi_0 z^{N-1} A(z)
\end{aligned}$$

$\Pi(z)$ について解き，問 (i) の結果 $A(z) = B^*(\lambda - \lambda z)$ を用いると

$$\Pi(z) = \frac{\pi_0 (z^N - 1) B^*(\lambda - \lambda z)}{z - B^*(\lambda - \lambda z)}$$

(4) 定常状態確率が存在するならば

$$\lim_{z\to 1} \Pi(z) = 1$$

より，ロピタルの定理を用いて

$$\frac{\pi_0 N}{1-\lambda b} = 1$$

を得る．よって $\pi_0 = (1-\lambda b)/N$．(5) $\Pi(z)$ は定常状態におけるサービス終了直後の客数分布の確率母関数である．客数過程の標本路はステップサイズ 1 の階段関数となるので，定常状態におめるサービス終了直後の客数分布は客の到着直前の客数分布に等しい．さらに客の到着はポワソン過程に従うため，客の到着直前の客数分布，すなわち，到着した客が見る客数分布は定常状態における任意時点での客数分布に等しい．

**4.16.** (1)

$$a_k = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}h(x)dx, \qquad b_k = \int_0^\infty e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}v(x)dx$$

(2)

$$A(z) = H^*(\lambda - \lambda z), \qquad B(z) = V^*(\lambda - \lambda z)$$

(3) 休暇開始後，連続して休暇が $n$ 回取られたとすると，最初の $n-1$ 回の間は客が到着せず，$n$ 回目の休暇で一人以上（$i$ 人とする）の客が到着したことになる．さらに休暇終了後に行われるサービス中に $k+1-i$ 人到着すれば，サービス終了後に $k$ 人の客が系内に残る．このような事象が起こる確率は $b_0^{n-1}b_i a_{k+1-i}$ である．よって求める答えは

$$c_k = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{k+1} b_0^{n-1}b_i a_{k+1-i} = \sum_{i=1}^{k+1}\frac{b_i}{1-b_0}a_{k+1-i}$$

(4) 休暇は離脱直後の系内客数が 0 の場合にのみ取られることに注意する．

$$\pi_k = \pi_0 c_k + \sum_{i=1}^{k+1}\pi_i a_{k+1-i}$$

(5) 前問の両辺に $z^k$ をかけて和をとる．丁寧に計算すると次式を得る．

$$\Pi(z) = \pi_0\frac{(B(z)-1)A(z)}{(1-b_0)(z-A(z))}$$

(6) $\Pi(1) = 1$ を利用せよ．

$$\pi_0 = \frac{(1-b_0)(1-\rho)}{\lambda E[V]}$$

(7) $\Pi(z)$ は定常状態におけるサービス終了直後の客数分布の確率母関数である．客数過程の標本路はステップサイズ 1 の階段関数となるので，定常状態におめるサービス終了直後の客数分布は客の到着直前の客数分布に等しい．さらに客の到着はポワソン過程に従うため，客の到着直前の客数分布，すなわち，到着した客が見る客数分布は定常状態における任意時点での客数分布に等しい．よって $\Pi(z)$ は時間平均システム内客数分布の確率母関数と等しい．よって

$$E[L] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\Pi(z) = \rho + \frac{\lambda^2 E[H^2]}{2(1-\rho)} + \lambda\frac{E[V^2]}{2E[V]}$$

**5.1.** (1) 略：50 ページの 5.1 節の最初を参照 (2) パラメタ $\mu$ の指数分布に従う確率変数 $X$ の平均と 2 次積率は

$$E[X] = \int_0^\infty x\mu e^{-\mu x}dx = \frac{1}{\mu}, \qquad E[X^2] = \int_0^\infty x^2\mu e^{-\mu x}dx = \frac{2}{\mu^2},$$

である．よって，分散は $(1/\mu)^2$ で与えられる．一方，定義より

$$E[F_k] = E[X_1] + E[X_2] + \cdots + E[X_k] = k \times \frac{1}{\mu}$$

$X_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ は互いに独立なので

$$V[F_k] = V[X_1] + V[X_2] + \cdots + V[X_k] = k \times \left(\frac{1}{\mu}\right)^2 = \left(\frac{k}{\mu}\right)^2/k$$

**5.2.** (1) 定義より

$$
\begin{aligned}
F_k(x) &= \int_{y_1=0}^{x}\int_{y_2=0}^{x-y_1}\cdots\int_{y_k=0}^{x-y_1-\cdots-y_{k-1}} \mu e^{-\mu y_1}\cdot\mu e^{-\mu y_2}\cdots\mu e^{-\mu y_k} dy_1 dy_2\ldots dy_k \\
&= \int_{y_1=0}^{x}\int_{y_2=0}^{x-y_1}\cdots\int_{y_{k-1}=0}^{x-y_1-\cdots-y_{k-2}} \mu e^{-\mu y_1}\cdot\mu e^{-\mu y_2}\cdots\mu e^{-\mu y_{k-1}}\left[-e^{-\mu y_k}\right]_0^{x-y_1-\cdots-y_{k-1}} dy_1 dy_2\ldots dy_{k-1} \\
&= \int_{y_1=0}^{x}\int_{y_2=0}^{x-y_1}\cdots\int_{y_{k-1}=0}^{x-y_1-\cdots-y_{k-2}} \mu e^{-\mu y_1}\cdot\mu e^{-\mu y_2}\cdots\mu e^{-\mu y_{k-1}}\left(1-e^{-\mu(x-y_1-\cdots-y_{k-1})}\right) dy_1 dy_2\ldots dy_{k-1} \\
&= \int_{y_1=0}^{x}\int_{y_2=0}^{x-y_1}\cdots\int_{y_{k-1}=0}^{x-y_1-\cdots-y_{k-2}} \mu e^{-\mu y_1}\cdot\mu e^{-\mu y_2}\cdots\mu e^{-\mu y_{k-1}} dy_1 dy_2\ldots dy_{k-1} \\
&\qquad\qquad - e^{-\mu x}\int_{y_1=0}^{x}\int_{y_2=0}^{x-y_1}\cdots\int_{y_{k-1}=0}^{x-y_1-\cdots-y_{k-2}} dy_1 dy_2\ldots dy_{k-1} \\
&= F_{k-1}(x) - \mu^{k-1}e^{-\mu x}\int_{y_1=0}^{x}\int_{y_2=0}^{x-y_1}\cdots\int_{y_{k-1}=0}^{x-y_1-\cdots-y_{k-2}} dy_1 dy_2\ldots dy_{k-1}
\end{aligned}
$$

(2) ここで

$$
I_k(x) = \mu^k e^{-\mu x}\int_{y_1=0}^{x}\int_{y_2=0}^{x-y_1}\cdots\int_{y_k=0}^{x-y_1-\cdots-y_{k-1}} dy_1 dy_2\ldots dy_k
$$

とすると，$I_1(x) = e^{-\mu x}\mu x$ であり，

$$
I_2(x) = \mu^2 e^{-\mu x}\int_{y_1=0}^{x}\int_{y_2=0}^{x-y_1} dy_1 dy_2 = \mu\int_{y_1=0}^{x} I_1(x-y_1)dy_1 = \mu\int_{y_1=0}^{x} I_1(y)dy = e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^2}{2}
$$

そこで，ある $k=n$ に対して $I_n(x) = e^{-\mu x}(\mu x)^n/n!$ と仮定すると

$$
I_{n+1}(x) = \mu\int_0^x I_n(x-y)dy = \mu\int_0^x I_n(y)dy = \mu e^{-\mu x}\left[\frac{\mu^n y^{n+1}}{n!(n+1)}\right]_0^x = e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^{n+1}}{(n+1)!}
$$

となり，$k=n+1$ でも成立．よって

$$
\begin{aligned}
F_k(x) &= F_{k-1}(x) - I_{k-1}(x) = F_{k-2}(x) - I_{k-2}(x) - I_{k-1}(x) \\
&= \cdots \\
&= F_1(x) - I_1(x) - I_2(x) - \cdots - I_{k-1}(x) \\
&= F_1(x) - e^{-\mu x}\frac{\mu x}{1!} - e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^2}{2!} - \cdots - e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^{k-2}}{(k-2)!} - e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}
\end{aligned}
$$

となり，定義より $F_1(x) = 1 - e^{-\mu x}$ なので与式を得る．

**5.3.** 平均 $k/\mu$ をもつ $k$ 次のアーラン分布（確率変数を $F_k$ とする）は平均 $1/\mu$ の指数分布に従う独立同一な $k$ 個の確率変数の和の分布に等しい．ここで時刻 0 から始まる率 $\mu$ のポワソン過程を考えると，事象 $F_k \le x$ は $k$ 番目に到着する時刻 $A_k$ が $x$ 以下であるという事象と等価である．

$$
F_k \le x \;\Leftrightarrow\; A_k \le x
$$

さらに後者は，時刻 $x$ において $k$ 人以上の到着があるという事象と等価である．すなわち，$A(0,x]$ を時間区間 $(0,x]$ の間に到着した客数とすると

$$
A_k \le x \;\Leftrightarrow\; A(0,x] \ge k
$$

よって

$$
\Pr(F_k \le x) = \Pr(A(0,x] \ge k) = \sum_{n=k}^{\infty}\Pr(A(0,x]=n) = 1 - \sum_{n=0}^{k-1}\Pr(A(0,x]=n)
$$

となり，これから与式が導かれる．

**5.4.**　密度関数の一般的な性質から，$f_k(x)\Delta x$ は時刻 0 から始まる率 $\mu$ のポワソン過程において，ちょうど $(x, x+\Delta x]$ に $k$ 番目の客が到着する確率と解釈できる．

$$f_k(x)\Delta x = \Pr(A_k \in (x, x+\Delta x]) + o(\Delta x)$$

これが起こるためには $(0,x]$ の間に $k-1$ 人の到着が起こり，かつ，$(x, x+\Delta x]$ に $k$ 番目の客が到着すればよい．

$$\Pr(A_k \in (x, x+\Delta x]) = \Pr(A(0,x] = k-1,\ A(x, x+\Delta x] = 1)$$

ポワソン過程は独立増分の性質があるため，交わらない区間に到着する客数は独立である．よって

$$\begin{aligned}\Pr(A(0,x] = k-1,\ A(x, x+\Delta x] = 1) &= \Pr(A(0,x] = k-1)\Pr(A(x, x+\Delta x] = 1)\\ &= e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\{\mu\Delta x + o(\Delta x)\}\end{aligned}$$

以上より

$$f_k(x)\Delta x = e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^{k-1}}{(k-1)!}\cdot\mu\Delta x + o(\Delta x)$$

を得る．両辺を $\Delta x$ で割り，$\Delta x \to 0$ の極限を考えることにより与式を得る．

**5.5.**　略：51 ページの 5.1.1 節前半を参照

**5.6.**　(1) 略：51 ページの 5.1.1 節後半を参照　(2) 平均待ち時間 $E[W_q]$ は

$$E[W_q] = \int_0^\infty (1 - W_q(x))dx$$

で与えられる．積分を計算して式 (58) の次に示されている結果と一致することを確認せよ．

**5.7.**　略：52 ページの 5.1.2 節を参照

**5.8.**　略：54 ページの 5.1.3 節を参照

**5.9.**　略：55 ページの 5.1.4 節を参照

**5.10.**　(1)–(4) 略：55 ページの 5.2 節を参照　(5) $W_q^*(s)$ を微分し $s \to 0$ とすればよい．分数の形のまま微分しても良いが，分母を払った

$$W_q^*(s)(s - \lambda + \lambda H^*(s)) = (1-\rho)s$$

の両辺を 2 回微分し，$s = 0$ とした方が遙かに計算は楽．実際に両者を行ってみよ．

**5.11.**　系内滞在時間を $W$，客が到着したとき系内に見いだす客数を $L^A$ とする．このとき

$$W(x) = \Pr(W \le x) = \sum_{k=0}^{\infty}\Pr(L^A = k)\Pr(W \le x \mid L^A = k), \quad x \ge 0$$

となる．ポワソン到着なので，到着時に見いだす系の状態は定常状態確率（時間平均）に等しい（2.3.6 節参照）．よって，3.2.1 節の結果より

$$\Pr(L^A = k) = (1-\rho)\rho^k, \qquad k = 0, 1, \ldots$$

を得る．一方，到着時にサービス中の客の残りサービス時間は指数分布の無記憶性により，パラメタ $\mu$ の指数分布に従う．よって，$L^A = k$ $(k = 0, 1, \ldots)$ のとき，この客の系内滞在時間は，自身のサービスも含め，合計 $k+1$ 個のパラメタ $\mu$ の指数分布に従うサービスが終了するまでの時間に対応する．よって，この条件付き分布は平均 $(k+1)/\mu$ をもつ $(k+1)$ 次のアーラン分布となる．

$$\Pr(W \le x \mid L^A = k) = 1 - \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^i}{i!}$$

以上より

$$
\begin{aligned}
W(x) &= \sum_{k=0}^{\infty}(1-\rho)\rho^k\left(1-\sum_{i=0}^{k}e^{-\mu x}\frac{(\mu x)^i}{i!}\right) = 1-(1-\rho)e^{-\mu x}\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k\sum_{i=0}^{k}\frac{(\mu x)^i}{i!} \\
&= 1-(1-\rho)e^{-\mu x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mu x)^i}{i!}\sum_{k=i}^{\infty}\rho^k = 1-(1-\rho)e^{-\mu x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\mu x)^i}{i!}\frac{\rho^i}{1-\rho} = 1-e^{-\mu x}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(\lambda x)^i}{i!} \\
&= 1-e^{-\mu x}e^{\lambda x} = 1-e^{-(\mu-\lambda)x}
\end{aligned}
$$

となり，系内滞在時間分布はパラメタ $\mu-\lambda$ の指数分布で与えられる．