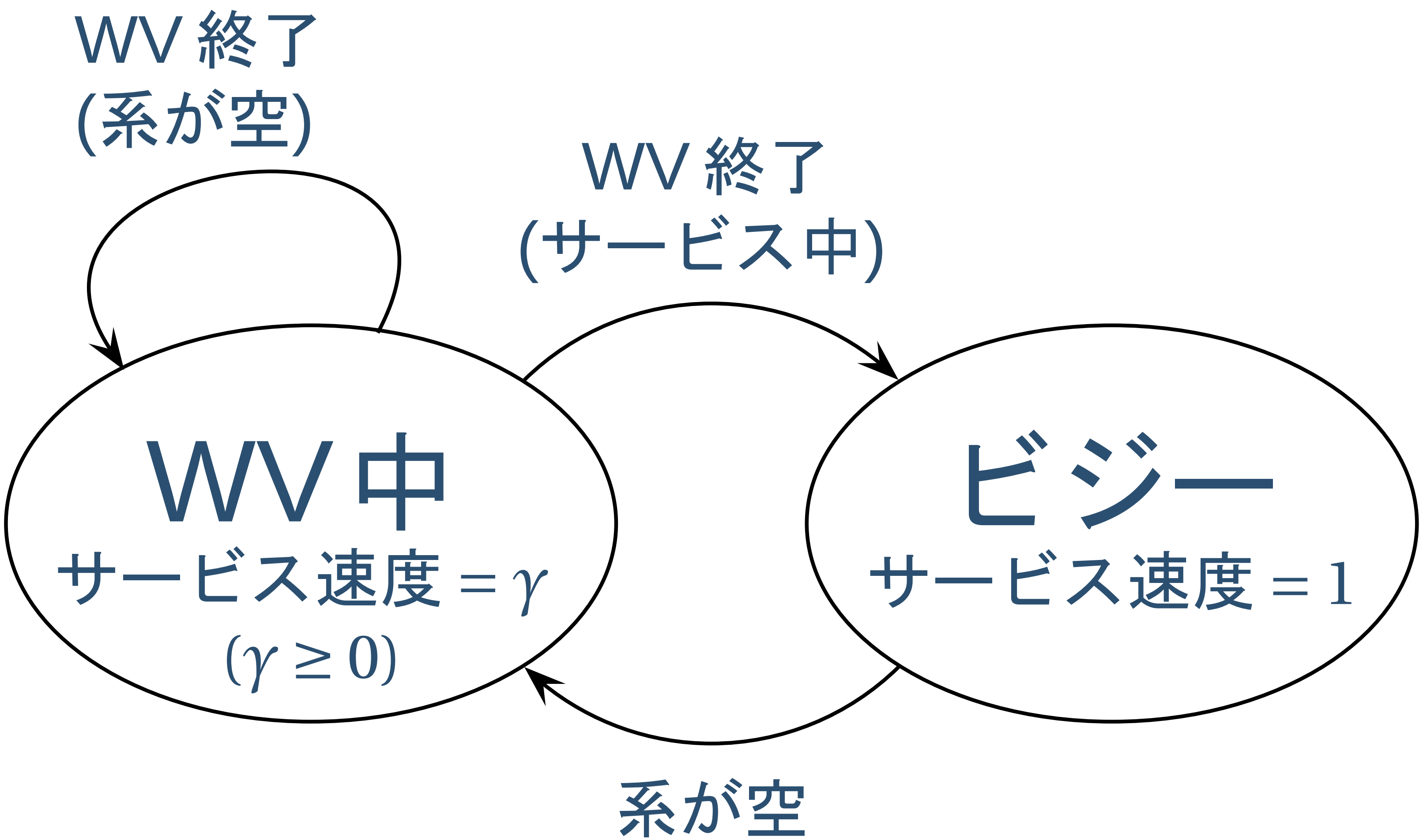
Working Vacation をもつ M/G/1 待ち行列

井上文彰
大阪大学工学部
電子情報工学科

滝根哲哉
大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

考察するモデル

- 2種類のサービス速度をもつ M/G/1



既存研究

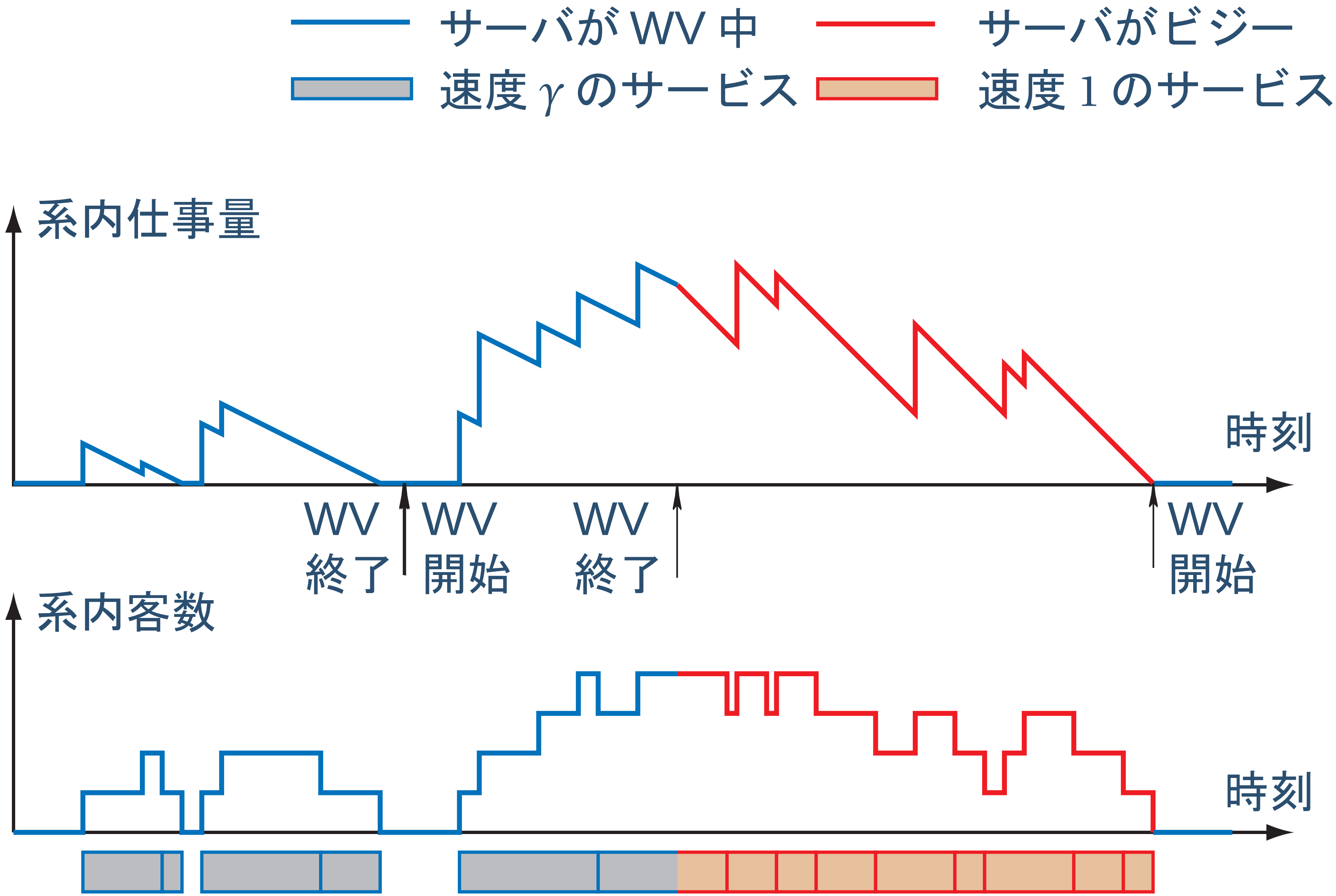
- WV をもつ M/M/1
  - [Servi and Finn, (2002)]
- WV をもつ M/G/1
  - [Kim et al., (2003)]
  - [Li et al., (2009)]
  - [Wu and Takagi, (2006)]

WVをもつM/G/1

- 既存研究
  - [Kim et al., (2003)]
  - [Li et al., (2009)]
  - [Wu and Takagi, (2006)]

  サービス速度切替時に進行中のサービス
  - サービス時間をリサンプリングしてやり直し
- 本研究で考察するモデル
  - サービス速度切替時に サービスを継続

標本路の例



サーバが WV 中
サーバがビジー
速度 γ のサービス
速度 1 のサービス
系内仕事量
時刻
WV 終了
WV 開始
WV 終了
WV 開始
系内客数
時刻

WV の長さに関する仮定 (仮定 1)

WV の長さ ⟷ 独立 ⟷ WV 終了以降の

- 客の到着過程
- 到着客のサービス要求量

(上の仮定を満たす限り)

- 系内客数，仕事量過程に応じて WV の長さが決まっても良い

到着客

- 客の到着過程
  - 率 λ のポアソン過程
- 到着客のサービス要求量
  - WV 中に到着する客
    - i. i. d., 分布関数 $\boxed{h_{WV}(x)}$
  - ビジーであるときに到着する客
    - i. i. d., 分布関数 $\boxed{h_B(x)}$

異なる

- 客は先着順でサービスされる

到着客

- 到着客のサービス要求量
  - WV 中に到着する客
    - i. i. d., 分布関数 $\boxed{h_{WV}(x)}$
  - ビジーであるときに到着する客
    - i. i. d., 分布関数 $\boxed{h_B(x)}$

異なる

- サービス要求量分布の異なる客が混在する期間が存在

➡ 系内客数を直接解析することは煩雑

本発表の概要

定常状態における系を観察

- 系内仕事量の解析方法を提示
- WV の長さが i. i. d. かつ指数分布に従うモデル
  - 系内仕事量分布の LST
    - 既存の結果を用いて即座に導出
  - 系内仕事量の解析結果をもとに
    - 待ち時間分布の LST
    - 系内客数分布の母関数

    を導出

系内仕事量の解析方法

条件付きの系内仕事量

- U_{WV} : サーバが WV 中であるという条件下における系内仕事量 (LST: $u^*_{WV}(s)$)
- U_B : サーバがビジーであるという条件下における系内仕事量 (LST: $u^*_B(s)$)

系内仕事量 U のLST $u^*(s)$

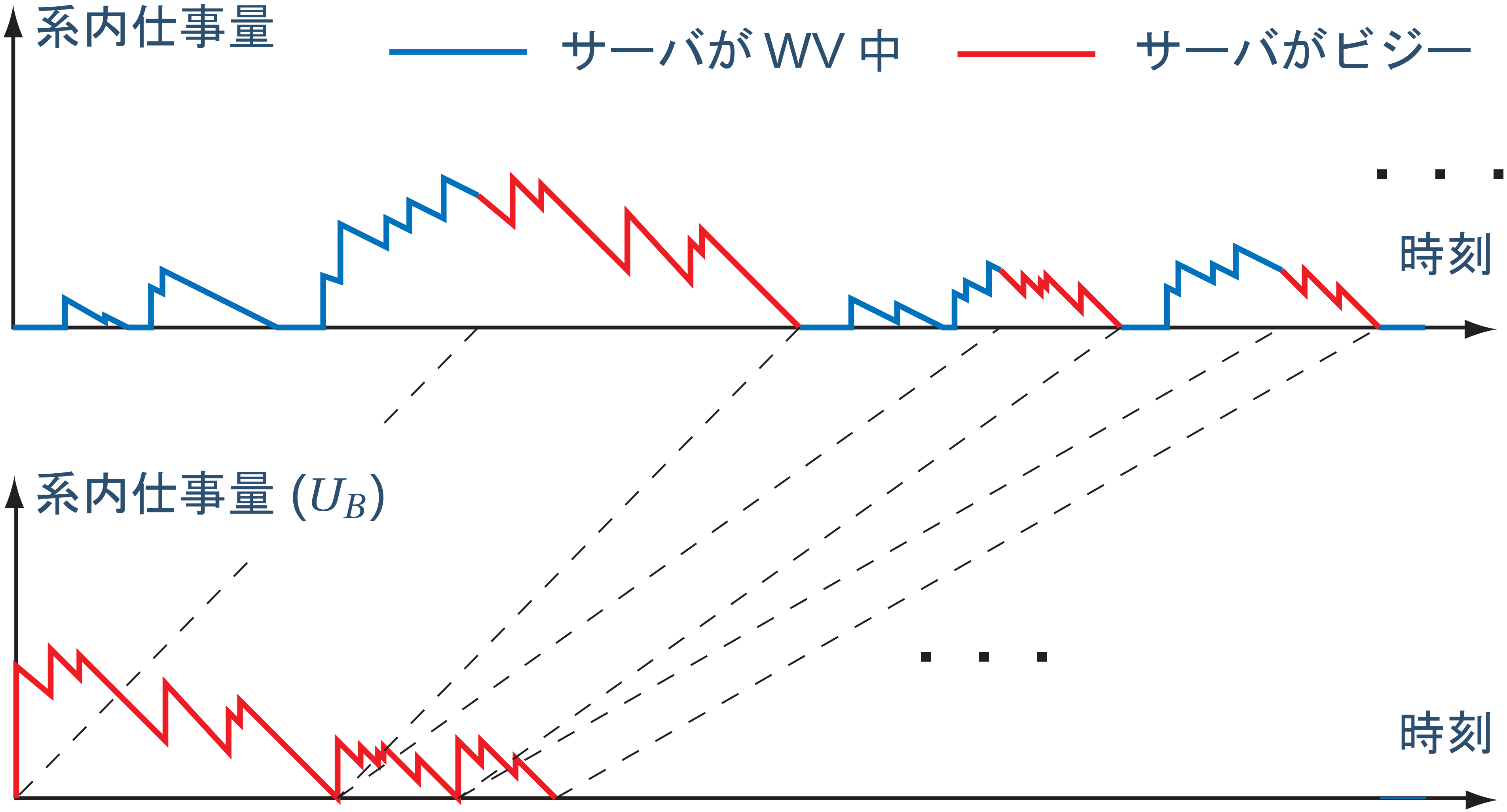
- $u^*(s)$ は次式で表される

$$u^*(s) = P_{WV} \cdot u^*_{WV}(s) + P_B \cdot u^*_B(s) \tag{1}$$

  - P_{WV}：サーバがWV中である確率
  - P_B　：サーバがビジーである確率

サーバがビジーである期間

- WV 中である期間を時間軸から取り除く

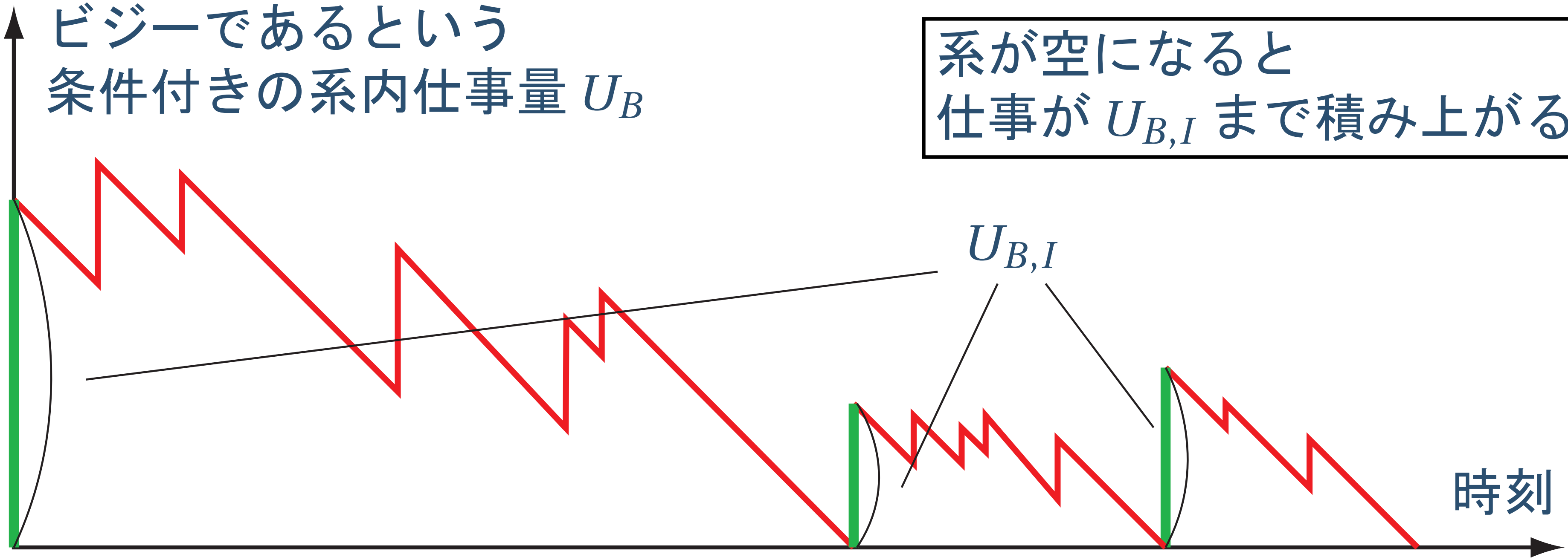


等価な系内仕事量過程

等価

ビジーであるときの系内仕事量過程

バケーションをもつ M/G/1 のサービス中における系内仕事量過程



バケーションをもつM/G/1

- サービス中であるという条件付きの系内仕事量 U_V の LST $u_V^*(s \mid \mathrm{serving})$
  - 下式を満たす [Doshi, 1990]

$U_{B,I}$ の残余寿命分布の LST

$$u_V^*(s \mid \mathrm{serving}) = \frac{1 - u_{B,I}^*(s)}{s\mathrm{E}[U_{B,I}]} \cdot u_{M/G/1}^*(s)$$

- $U_{B,I}$ ：サーバがビジーになった時点における系内仕事量 (LST: $u_{B,I}^*(s)$)
- $U_{M/G/1}$ ：普通の M/G/1 の定常状態における系内仕事量 (LST: $u_{M/G/1}^*(s)$)

条件付きの分解定理

- ビジーであるという条件付きの
  系内仕事量 U_B のLST $u_B^*(s)$ について次式が成立

$$
\begin{aligned}
u_B^*(s) = u_V^*(s \mid \text{serving}) &= \frac{1 - u_{B,I}^*(s)}{s\mathrm{E}[U_{B,I}]} \cdot u_{M/G/1}^*(s) \qquad (3) \\
&= \frac{1 - u_{WV,T}^*(s)}{s\mathrm{E}[U_{WV,T}]} \cdot u_{M/G/1}^*(s)
\end{aligned}
$$

(2) より

- ◆ $U_{B,I}$ ：サーバがビジーになった時点における系内仕事量 (LST: $u_{B,I}^*(s)$)
- ◆ $U_{WV,T}$：WV 終了時点における系内仕事量 (LST: $u_{WV,T}^*(s)$)

系内仕事量の LST $u^*(s)$

$$u^*(s) = P_{WV} \cdot u^*_{WV}(s) + P_B \cdot \frac{1 - u^*_{WV,T}(s)}{s\mathrm{E}[U_{WV,T}]} \cdot u^*_{M/G/1}(s) \tag{6}$$

$$P_{WV} = \frac{\mathrm{E}[D_{WV}]}{\mathrm{E}[D_{WV} + \mathrm{E}[U_{WV,T}/(1-\lambda\mathrm{E}[H_B])]]}$$

$$P_B = 1 - P_{WV}$$

- U_{WV} ：WV 中であるという条件下における系内仕事量 (LST: $u^*_{WV}(s)$)
- $U_{WV,T}$：WV 終了時点における系内仕事量 (LST: $u^*_{WV,T}(s)$)
- D_{WV} ：WV の長さ

系内仕事量の解析方法

- WV 中のみ系を観察し，
  - 系内仕事量の時間平均分布の LST $u^*_{WV}(s)$
  - WV 終了時点の系内仕事量分布の LST $u^*_{WV,T}(s)$
  - WV の長さの平均 $\mathrm{E}[D_{WV}]$

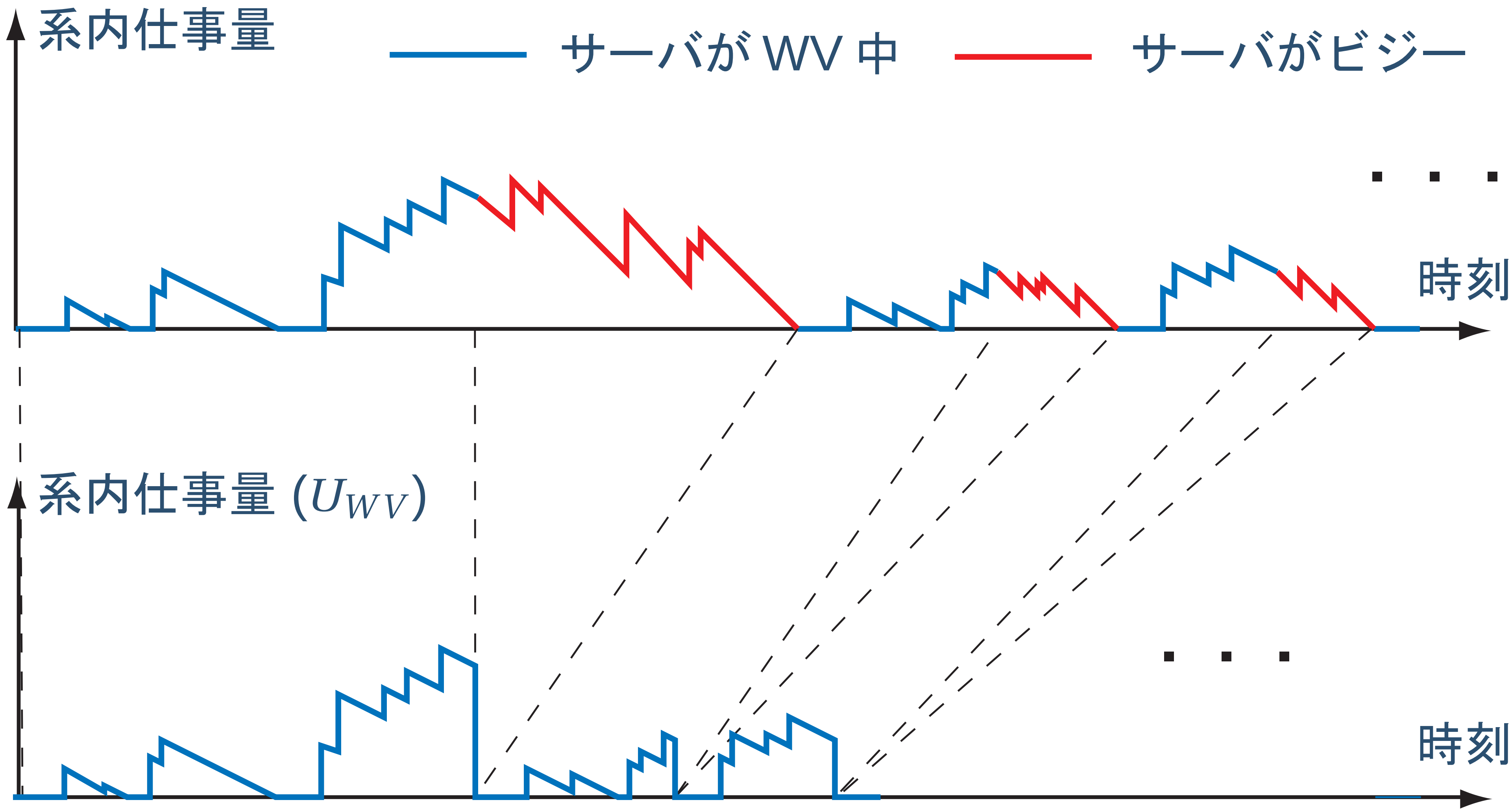
  をそれぞれ求める

⇓

- 式 (6), (7) より定常状態における
  系内仕事量分布の LST $u^*(s)$ が得られる

WVの長さが指数分布に従うモデル

WV 中のみ系を観察



WVの長さが指数分布に従うモデル

- WVの長さの平均 = $1/\eta$
- WVの終了時点における事象平均量
  ＝ WV中の時間平均量

➡ $$\boxed{u^*_{WV,T}(s) = u^*_{WV}(s)} \quad (8)$$

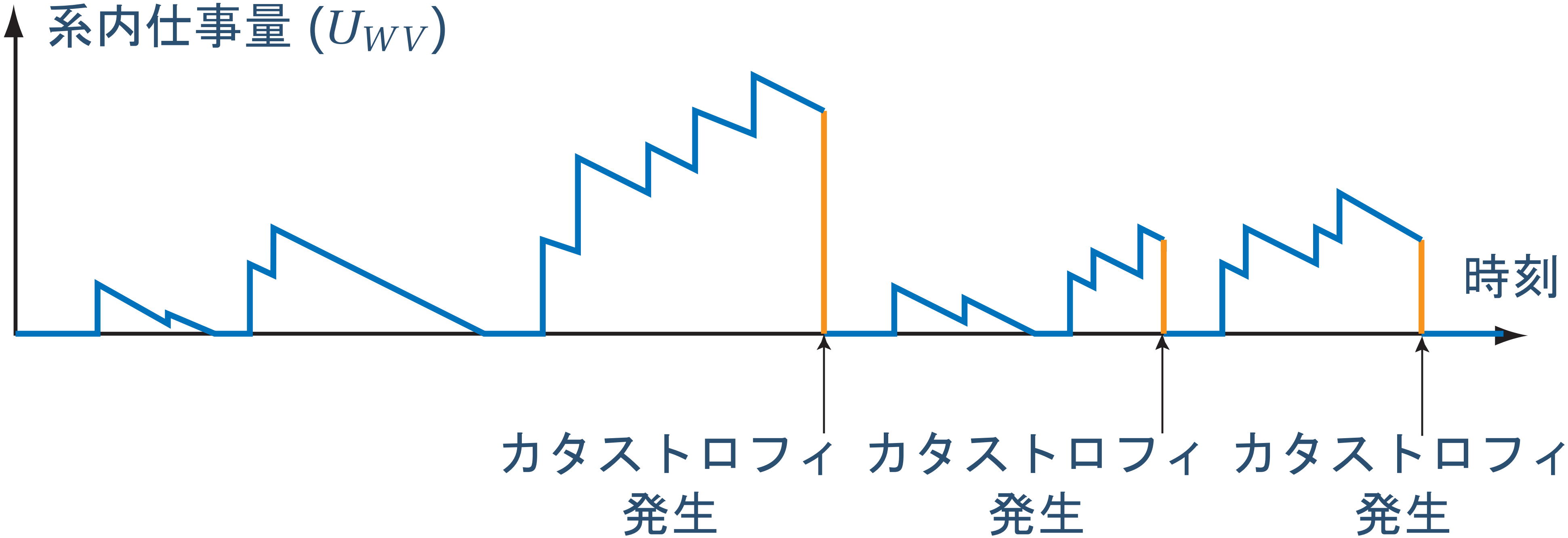
$u^*_{WV,T}(s)$: WV終了時点における系内仕事量分布のLST

$u^*_{WV}(s)$: WV中における系内仕事量の時間平均分布のLST

- $u^*_{WV}(s)$ さえ求められれば $u^*(s)$ が求まる

WV中の系内仕事量過程

- カタストロフィをもつM/G/1
  - カタストロフィが発生 ⟶ 系内の仕事は全て破棄
  - ポアソン過程に従ってカタストロフィが発生



系内仕事量のLST

- カタストロフィをもつM/G/1
  - 既存の解析結果 [Jain and Sigman, 1996] が利用可能

↓

WV中であるという条件下における系内仕事量のLST $u^*_{WV}(s)$ が得られる (式 (9))

↓

定常状態における系内仕事量のLST $u^*(s)$ が求まる (式 (6), (8), (12))

待ち時間

- 先着順サービスを仮定
  - U_A：到着直前の系内仕事量
  - 待ち時間 = U_A の処理時間
- 客はポアソン過程に従って到着
  - WV 中に到着した客
    - U_A の分布 = U_{WV} の分布
  - ビジーであるときに到着した客
    - U_A の分布 = U_B の分布

条件付きの待ち時間

- ビジーであるときに到着した客
  - U_A の処理時間 = $U_A/1$
- WV 中に到着した客
  - U_A の処理時間= $\begin{cases} \dfrac{U_A}{\gamma}, & \dfrac{U_A}{\gamma} \le \tilde{V}_A \\ \tilde{V}_A + (U_A - \gamma \tilde{V}_A), & \dfrac{U_A}{\gamma} > \tilde{V}_A \end{cases}$

  $\tilde{V}_A$: 到着時点における WV の残余時間

待ち時間のLST $w^*(s)$

- 単純な計算により条件付きのLSTが得られる (定理 1)
- 客はポアソン到着し，時間平均量をみる
  - 到着時点においてWV中である確率
    = 任意時点においてWV中である確率

$$w^*(s) = P_{WV} \cdot \left[u^*_{WV}\left(\frac{s+\eta}{\gamma}\right) + \frac{u^*_{WV}(s) - u^*_{WV}\left(\frac{s+\eta}{\gamma}\right)}{(1/\eta)[(1-\gamma)s+\eta]} \right] + P_B \cdot u^*_B(s)$$

(式 (13)–(15))

系内客数 L の母関数 $l(z)$

- 客の離脱直後の系内客数 L_D
  - L_D の分布 = L の分布
  - L_D の母関数 $l_D(z)$

$$\boxed{l_D(z) = l(z)} \tag{17}$$

- $l_D(z)$ が求まれば $l(z)$ が得られる

離脱直後の系内客数 L_D

- 先着順サービスを仮定
  - L_D = 滞在時間 Q の間に到着した客数
- WV の長さは系内客数過程とは無関係に決定
  - 滞在時間の長さは，その間の
    客の到着過程とは無関係に決まる

$$\boxed{l_D(z) = q^*(\lambda - \lambda z)}$$ [Keilson and Servi, 1988]

- $q^*(s)$：Q の LST

滞在時間 Q

- 滞在時間
  = (到着直前の系内仕事量
  + 自分のサービス要求量) の処理時間

- 待ち時間と同じ方法で LST $q^*(s)$ が求められる

- 定常状態における系内客数の母関数 $l(z)$ が

$$l(z) = l_D(z) = q^*(\lambda - \lambda z)$$

より得られる

おわりに

- WV をもつ M/G/1 について考察
  - ◆ 系内仕事量の解析方法を提示
  - ◆ WV の長さが指数分布に従うモデルについて,
    - 系内仕事量を解析 → その結果をもとに
待ち時間と系内客数を解析
- 論文の残りの部分 (4 節, 5 節)
  - ◆ WV 中とビジーであるときで
客の到着率が異なるモデル
  - ◆ 客のサービス要求量が指数分布に従うモデル

について更に考察

WV 中とビジーであるときで客の到着率が異なるモデル (1)

- 到着率が一定のモデルとの比較
  - 系内仕事量は同じ方法で解析可能
  - 待ち時間の解析
    - 条件付きの LST は同じ方法で得られる
    - $\boxed{P_{WV,A} \neq P_{WV}}$
      - $P_{WV,A}$: Pr(客の到着時点において WV 中)
      - P_{WV} : Pr(任意時点において WV 中)
    - 単純な計算により，$P_{WV,A}$ は P_{WV} と
      それぞれの到着率を用いて表される

WV中とビジーであるときで客の到着率が異なるモデル (2)

- 到着率が一定のモデルとの比較
  - 系内容数の解析
    - $\boxed{l(z) \neq l_D(z)}$
      - $l(z)$ ：系内容数の時間平均分布の母関数
      - $l_D(z)$：客の離脱直後における系内容数分布の母関数
    - 滞在時間分布の LST から直接系内容数分布の母関数が求められない

WV 中とビジーであるときで客の到着率が異なるモデル (3)

- 系内客数の解析
  - 到着率に応じて時間軸を引き伸ばして得られる新しいモデル
    - ➡ 到着率が一定であり，前述の方法で解析可能
  - 新しいモデルの解析結果を用いて元のモデルが解析できることを示す