Working Vacation をもつ $M^X/G/1$ 待ち行列

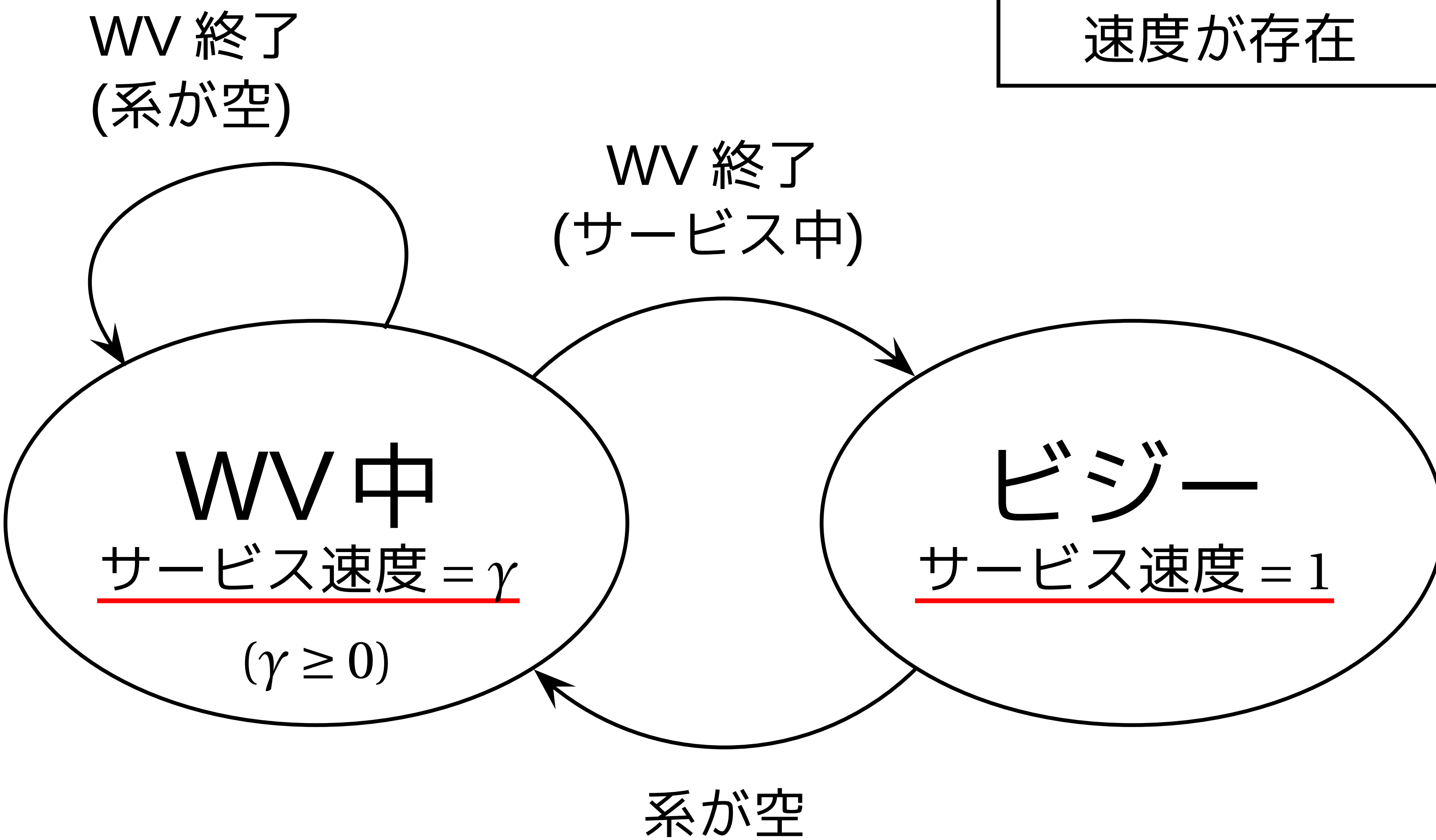
井上文彰
大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

滝根哲哉
大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

Working Vacation (WV)

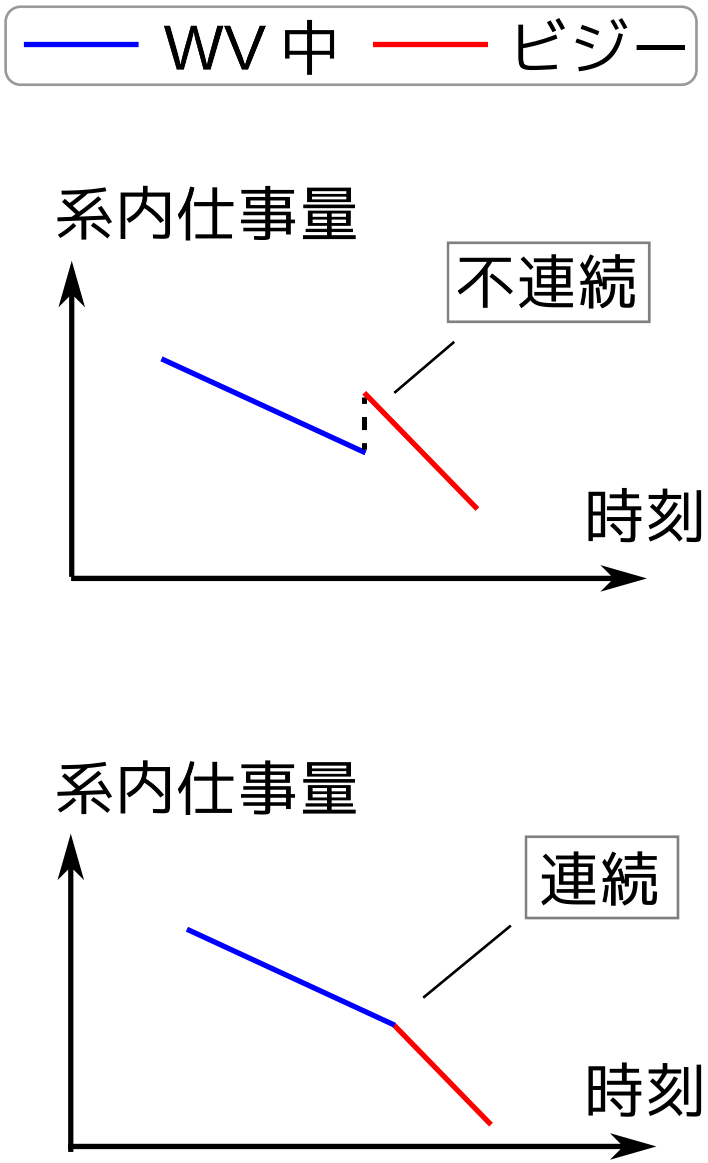
- WV をもつ待ち行列モデル

2 種類のサービス
速度が存在



サービス速度の切替時点

- [Kim et al. (2003)]
- [Li et al. (2009)]
- [Wu and Takagi (2006)]
  - 切替時点で進行中のサービス
    - サービス時間を
      リサンプリング
    - 初めからやり直し



- 本発表で考察するモデル
  - 切替時にサービスを継続

    ([井上, 滝根 (2011)] と同じ)

考察するモデル (WV をもつ $M^X/G/1$)

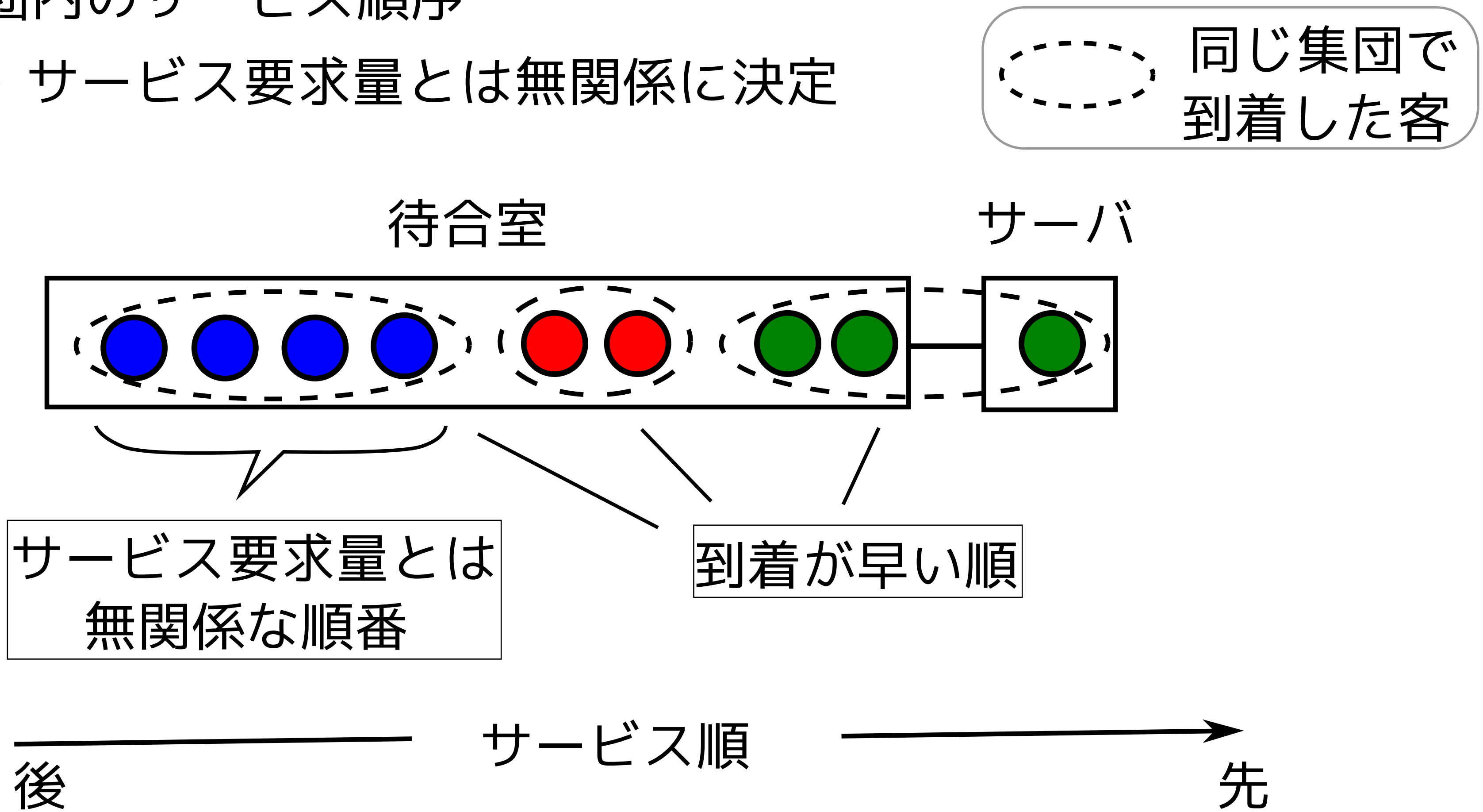
- WV の長さはパラメタ η の指数分布に従って i. i. d.
- 客は集団で到着，集団の到着過程は率 λ のポアソン過程
  - 各集団内の客数 G は i. i. d.
- 到着客のサービス要求量 H

WV 中である期間に到着する客	ビジーである期間に到着する客
H は i. i. d.,	H は i. i. d.,
平均：b_{WV} 分布関数：$H_{\mathrm{WV}}(x)$	平均：b_{B} 分布関数：$H_{\mathrm{B}}(x)$

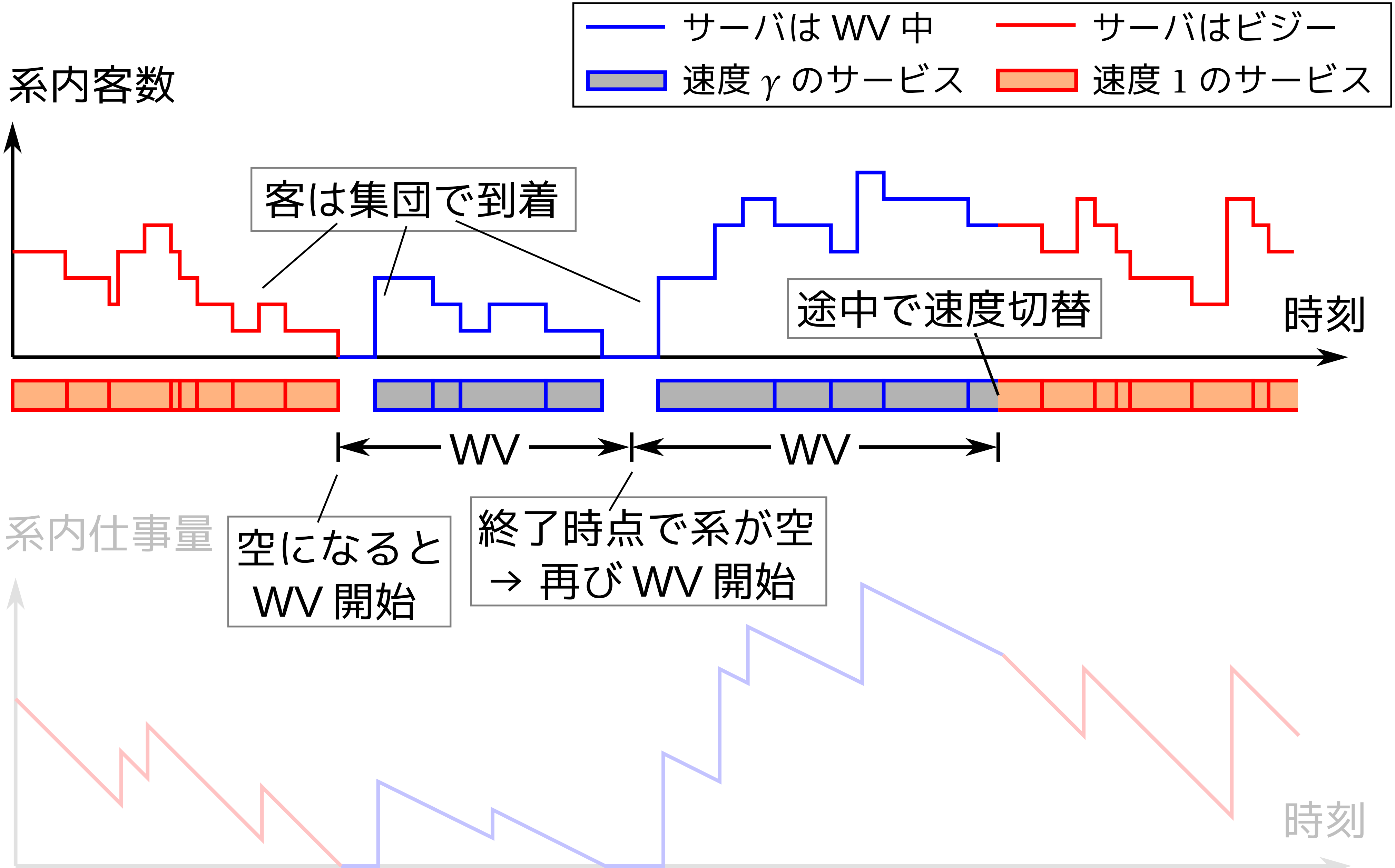
- $\lambda \cdot \mathrm{E}[G] b_{\mathrm{B}} < 1$ を仮定 ➡ 系は安定

サービス順序

- サービスは先着順で行われる
- 集団内のサービス順序
  - サービス要求量とは無関係に決定

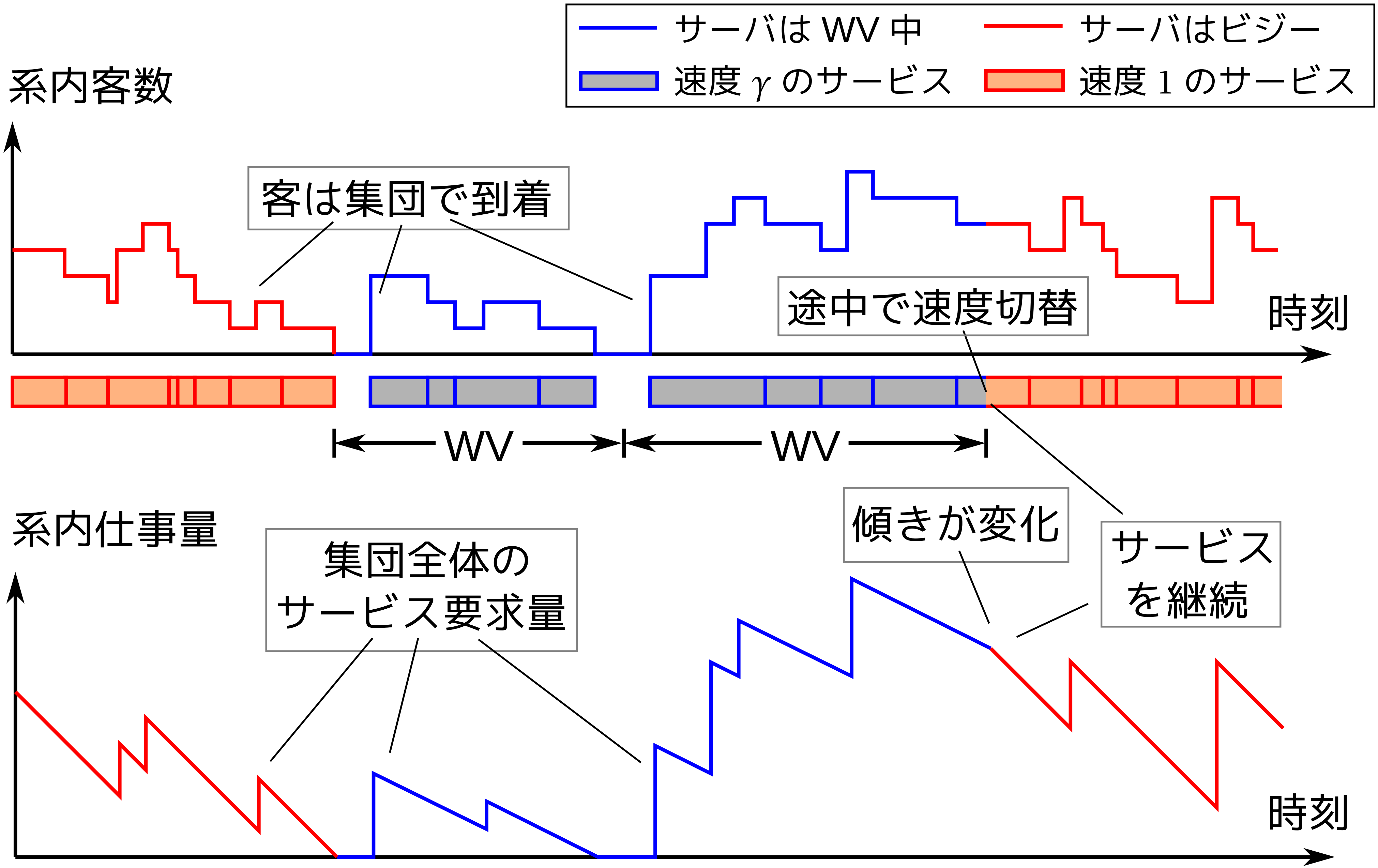


標本路の例



サーバは WV 中
サーバはビジー
速度 γ のサービス
速度 1 のサービス
系内客数
客は集団で到着
途中で速度切替
時刻
WV
WV
空になると
WV 開始
終了時点で系が空
→ 再び WV 開始
系内仕事量
時刻

標本路の例



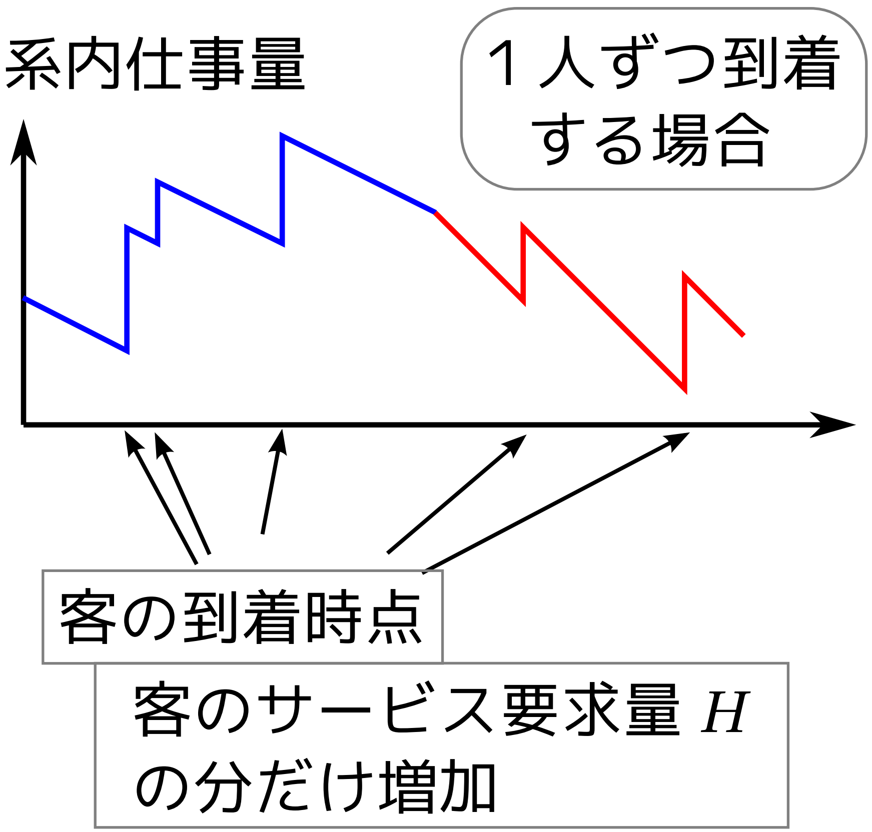
サーバは WV 中
サーバはビジー
速度 γ のサービス
速度 1 のサービス
系内客数
客は集団で到着
途中で速度切替
時刻
WV
WV
系内仕事量
集団全体の
サービス要求量
傾きが変化
サービス
を継続
時刻

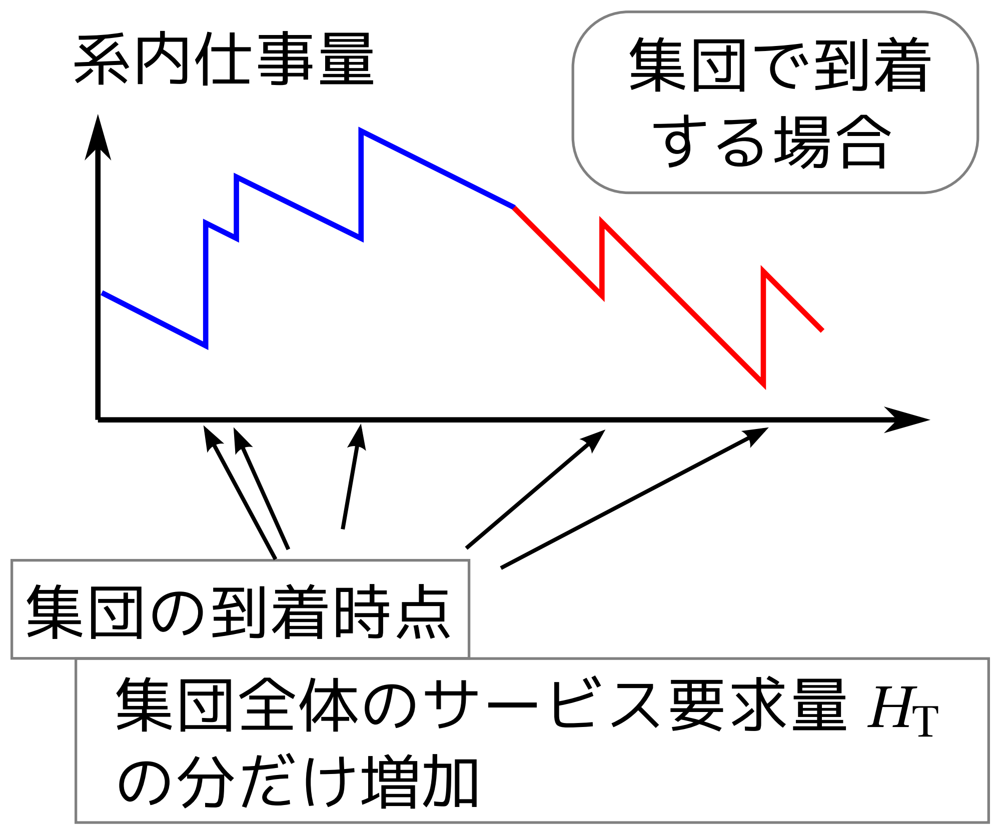
発表の概要

- WV をもつ $M^X/G/1$ 待ち行列を考察
  - 客が 1 人ずつ到着するモデル
    に対して得られている結果　[井上, 滝根 (2011)]
    - ➠ 集団到着を考慮したモデルに拡張
  - 定常状態における系を観察
    - 最初に系内仕事量分布を解析
    - その結果をもとに,
      待ち時間分布，系内客数分布　を導出

系内仕事量過程

サーバはビジー (傾き 1 で減少)　　サーバは WV 中 (傾き γ で減少)





- H と H_{T} の確率的性質が等しいとき，これらの過程は等価

集団内の客の総サービス要求量 H_{T}

- WV 中である期間に到着する集団
  - H_{T} は i. i. d.,

    LST : $g\left(h^*_{\mathrm{WV}}(s)\right)$

    平均 : $\mathrm{E}[G] \cdot \mathrm{E}[H_{\mathrm{WV}}]$

- ビジーである期間に到着する集団
  - H_{T} は i. i. d.,

    LST : $g\left(h^*_{\mathrm{B}}(s)\right)$

    平均 : $\mathrm{E}[G] \cdot \mathrm{E}[H_{\mathrm{B}}]$

- G : 各集団に含まれる客数, $g(z)$: G の母関数
  - H_{WV} : WV 中である期間に到着する客のサービス要求量
  - $h^*_{\mathrm{WV}}(s)$: H_{WV} の LST
  - H_{B} : ビジーである期間に到着する客のサービス要求量
  - $h^*_{\mathrm{B}}(s)$: H_{B} の LST

系内仕事量分布のLST $u^*(s)$

[井上, 滝根 (2011)] の結果より,

- P_{WV} : Pr(サーバが WV 中)
- P_{B} : Pr(サーバがビジー)
- ν : Pr(系が空 | WV 中)

- $\boxed{u^*(s) = P_{\mathrm{WV}} \cdot u^*_{\mathrm{WV}}(s) + P_{\mathrm{B}} \cdot u^*_{\mathrm{B}}(s)}$
  - $$P_{\mathrm{WV}} = \frac{1-\lambda b_{\mathrm{T,B}}}{1-\lambda b_{\mathrm{T,B}} + \lambda b_{\mathrm{T,WV}} - \gamma\nu}, \qquad P_{\mathrm{B}} = 1 - P_{\mathrm{WV}}$$
  - $$u^*_{\mathrm{WV}}(s) = \frac{(1-\nu)s - (\eta/\gamma)}{s - (\lambda/\gamma) + (\lambda/\gamma)h^*_{\mathrm{T,WV}}(s) - (\eta/\gamma)}$$
  - $$u^*_{\mathrm{B}}(s) = \frac{1-u^*_{\mathrm{WV}}(s)}{s\mathrm{E}[U_{\mathrm{WV}}]} \cdot \frac{(1-\lambda b_{\mathrm{T,B}})s}{s-\lambda+\lambda h^*_{\mathrm{T,B}}(s)}, \qquad \mathrm{E}[U_{\mathrm{WV}}] = \frac{\lambda b_{\mathrm{T,WV}} - \gamma\nu}{\eta}$$

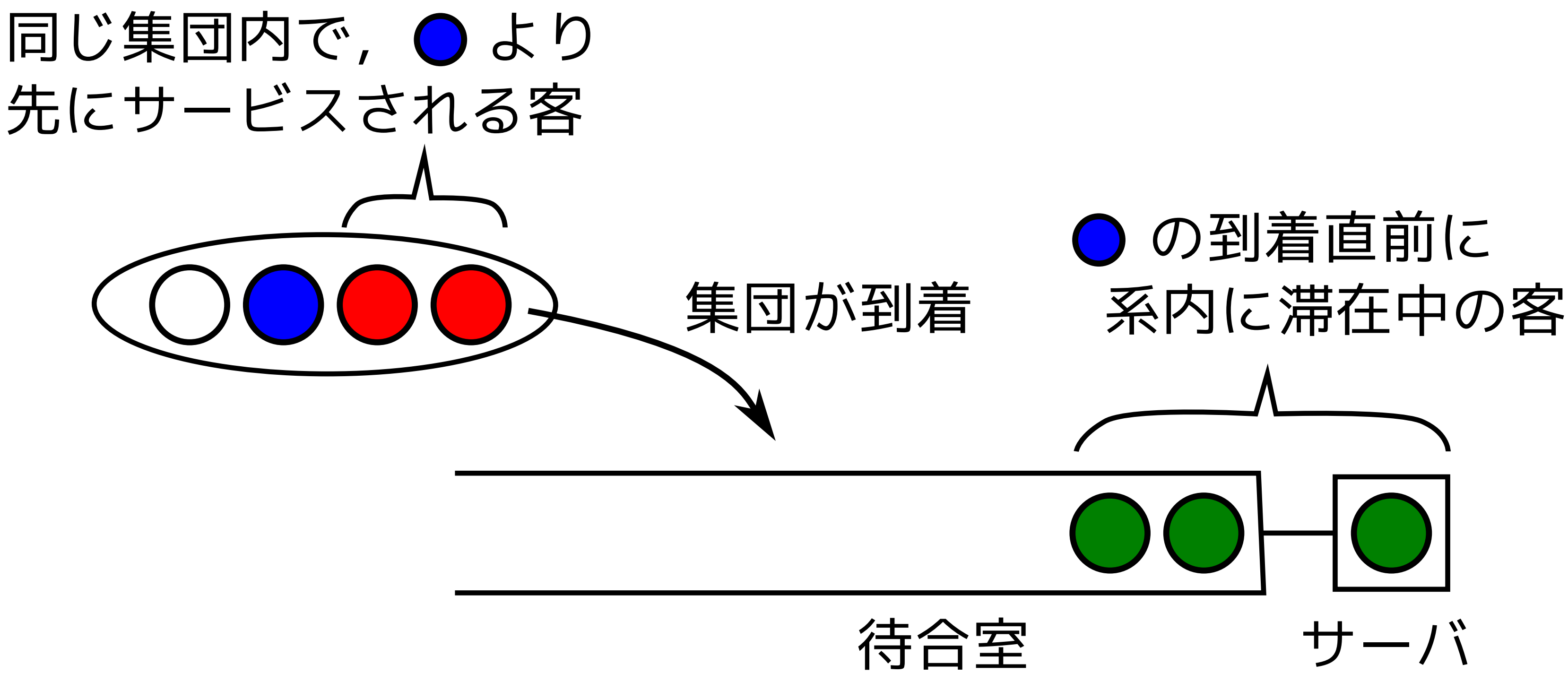
$$h^*_{\mathrm{T,WV}}(s) \triangleq g\big(h^*_{\mathrm{WV}}(s)\big), \qquad h^*_{\mathrm{T,B}}(s) \triangleq g\big(h^*_{\mathrm{B}}(s)\big)$$

$$b_{\mathrm{T,WV}} \triangleq \mathrm{E}[G]\cdot\mathrm{E}[H_{\mathrm{WV}}], \qquad b_{\mathrm{T,B}} \triangleq \mathrm{E}[G]\cdot\mathrm{E}[H_{\mathrm{B}}]$$

発表の概要

- WV をもつ $M^X/G/1$ 待ち行列を考察
  - 客が 1 人ずつ到着するモデル
    に対して得られている結果　[井上, 滝根 (2011)]
    - ➡ 集団到着を考慮したモデルに拡張
  - 定常状態における系を観察
    - 最初に系内仕事量分布を解析
    - その結果をもとに,
      $\boxed{\text{待ち時間分布}}$, 系内客数分布　を導出

待ち時間



● の待ち時間：

● の総残余サービス要求量
(= ● の到着直前の系内仕事量)

● の総サービス要求量

を処理するのに
必要な時間

待ち時間中に処理される仕事量

- 到着時のサーバの状態で条件付けた LST

	到着時に WV 中	到着時にビジー
集団の到着直前における系内仕事量 ↕ $\boxed{\text{独立}}$ 同じ集団内で自分より先にサービスされる客の総サービス要求量	$u^*_{\mathrm{WV}}(s)$ ($\mathrm{E}[e^{-sU}$ | WV 中]) $\dfrac{1-g\left(h^*_{\mathrm{WV}}(s)\right)}{\mathrm{E}[G](1-h^*_{\mathrm{WV}}(s))}$	$u^*_{\mathrm{B}}(s)$ ($\mathrm{E}[e^{-sU}$ | ビジー]) $\dfrac{1-g\left(h^*_{\mathrm{B}}(s)\right)}{\mathrm{E}[G](1-h^*_{\mathrm{B}}(s))}$

U：定常状態における系内仕事量

H：客のサービス要求量

G：集団内の客数

$h^*_{\mathrm{WV}}(s) = \mathrm{E}[e^{-sH}$ | 到着時に WV 中]

$h^*_{\mathrm{B}}(s) = \mathrm{E}[e^{-sH}$ | 到着時にビジー]

$g(z) = \mathrm{E}[z^G]$

待ち時間中に処理される仕事量

- 到着時のサーバの状態で条件付けた LST

	到着時に WV 中	到着時にビジー
集団の到着直前における系内仕事量	$u^*_{\mathrm{WV}}(s)$ $(\mathrm{E}[e^{-sU}$ | WV 中$])$	$u^*_{\mathrm{B}}(s)$ $(\mathrm{E}[e^{-sU}$ | ビジー$])$

集団はポアソン過程に従って到着

U : 定常状態における系内仕事量

待ち時間中に処理される仕事量

- 到着時のサーバの状態で条件付けた LST

	到着時に WV 中	到着時にビジー
集団の到着直前における系内仕事量	$u^*_{\mathrm{WV}}(s)$ $(\mathrm{E}[e^{-sU} \mid \text{WV 中}])$	$u^*_{\mathrm{B}}(s)$ $(\mathrm{E}[e^{-sU} \mid \text{ビジー}])$
$\boxed{\text{独立}}$ $\updownarrow$		
同じ集団内で自分より先にサービスされる客の総サービス要求量	$\dfrac{1-g\big(h^*_{\mathrm{WV}}(s)\big)}{\mathrm{E}[G](1-h^*_{\mathrm{WV}}(s))}$	$\dfrac{1-g\big(h^*_{\mathrm{B}}(s)\big)}{\mathrm{E}[G](1-h^*_{\mathrm{B}}(s))}$

U：定常状態における系内仕事量

H：客のサービス要求量

G：集団内の客数

$$h^*_{\mathrm{WV}}(s) = \mathrm{E}[e^{-sH} \mid \text{到着時に WV 中}]$$

$$h^*_{\mathrm{B}}(s) = \mathrm{E}[e^{-sH} \mid \text{到着時にビジー}]$$

$$g(z) = \mathrm{E}[z^G]$$

仕事量 X の処理時間 $\phi(X)$

- $\phi(X)$ の LST　[井上, 滝根 (2011)]

$\chi^*(s)$: X の LST

- 処理の開始時点で WV 中
  - $\chi^*\left(\frac{s+\eta}{\gamma}\right) + \frac{\chi^*(s) - \chi^*\left(\frac{s+\eta}{\gamma}\right)}{(\gamma/\eta)\{(s+\eta)/\gamma - s\}}$

    $\triangleq \psi^*\left(\chi^*(s)\right)$

途中で WV が終了した場合は，サービス速度が γ から 1 に変化

- 処理の開始時点でビジー
  - $\chi^*(s)$

サービス速度は 1 で一定

待ち時間分布のLST $w^*(s)$

- 集団はポアソン過程に従って到着
  - Pr(客の到着時に WV 中) $=$ Pr(定常状態において WV 中) $= P_{\mathrm{WV}}$
  - Pr(客の到着時にビジー) $=$ Pr(定常状態においてビジー) $= P_{\mathrm{B}}$

- $$\boxed{w^*(s) = P_{\mathrm{WV}} \cdot \psi^*\Big(\underbrace{u^*_{\mathrm{WV}}(s)\,\tilde{g}_{\mathrm{fw}}\big(h^*_{\mathrm{WV}}(s)\big)}_{\text{待ち時間中に処理される仕事量}}\Big) + P_{\mathrm{B}} \cdot \underbrace{u^*_{\mathrm{B}}(s)\,\tilde{g}_{\mathrm{fw}}\big(h^*_{\mathrm{B}}(s)\big)}_{\text{待ち時間中に処理される仕事量}}}$$

$$\tilde{g}_{\mathrm{fw}}(z) \triangleq \frac{1 - g(z)}{\mathrm{E}[G](1 - z)}$$

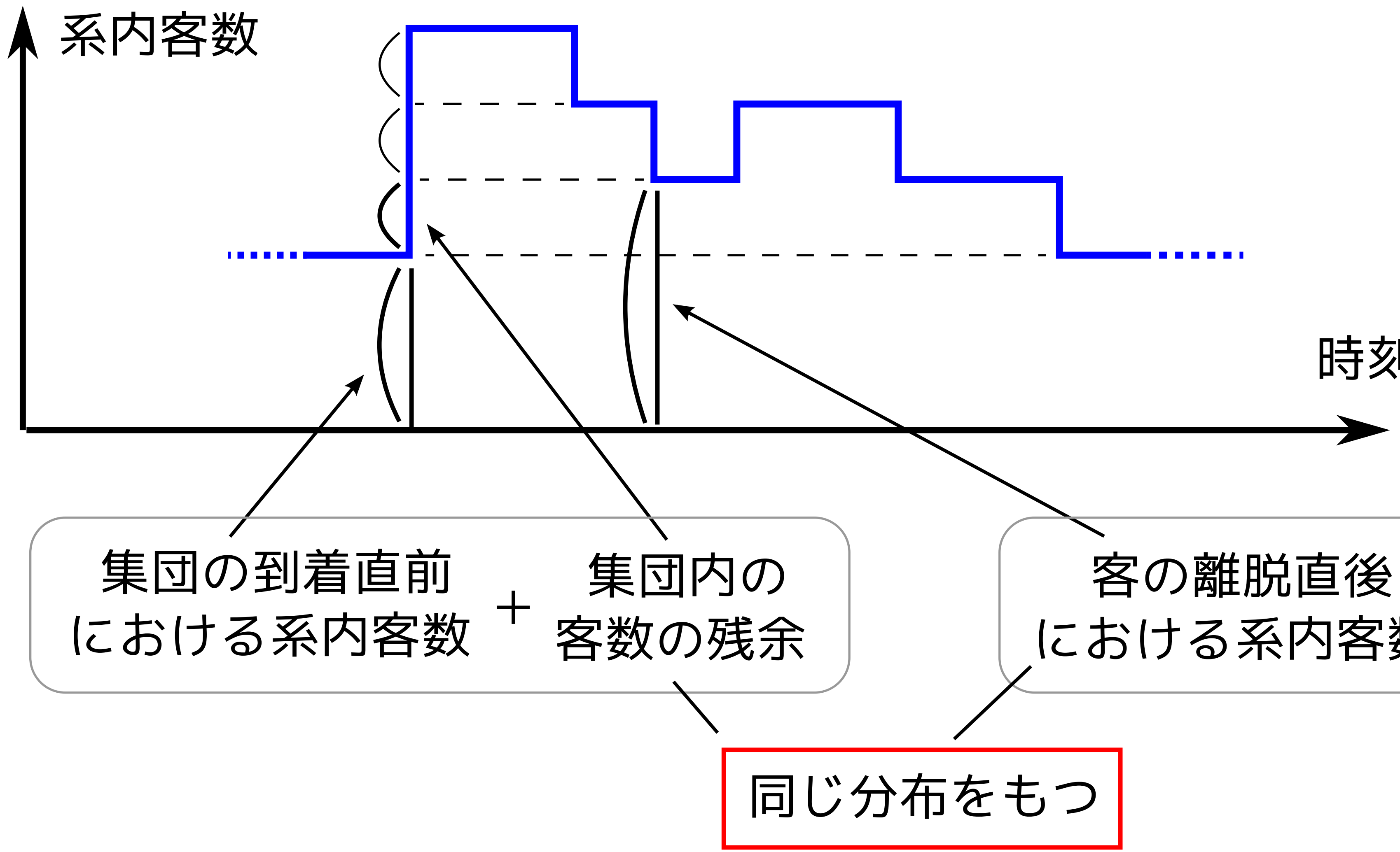
同じ集団内で自分より先にサービスされる客数 $\tilde{G}_{\mathrm{fw}}$ の母関数

待ち時間中に処理される仕事量

発表の概要

- WV をもつ $M^X/G/1$ 待ち行列を考察
  - 客が 1 人ずつ到着するモデル
    に対して得られている結果　[井上, 滝根 (2011)]
    - ➡ 集団到着を考慮したモデルに拡張
  - 定常状態における系を観察
    - 最初に系内仕事量分布を解析
    - その結果をもとに,
      待ち時間分布, $\boxed{\text{系内客数分布}}$ を導出

系内客数過程


系内客数
時刻
集団の到着直前
における系内客数
+
集団内の
客数の残余
客の離脱直後
における系内客数
同じ分布をもつ

定常状態における系内客数 L

- 集団内の客数 G と，その到着直前の系内客数 $L_{\mathrm{A}}^{\mathrm{b}}$ は独立
  - $l_{\mathrm{A}}^{\mathrm{b}}(z) \cdot \tilde{g}_{\mathrm{fw}}(z) = l_{\mathrm{D}}(z)$

$$l_{\mathrm{A}}^{\mathrm{b}}(z) \triangleq \mathrm{E}[z^{L_{\mathrm{A}}^{\mathrm{b}}}], \quad \tilde{g}_{\mathrm{fw}}(z) = \frac{1-g(z)}{\mathrm{E}[G](1-z)}, \quad l_{\mathrm{D}}(z) \triangleq \mathrm{E}[z^{L_{\mathrm{D}}}]$$

(G の残余の母関数)

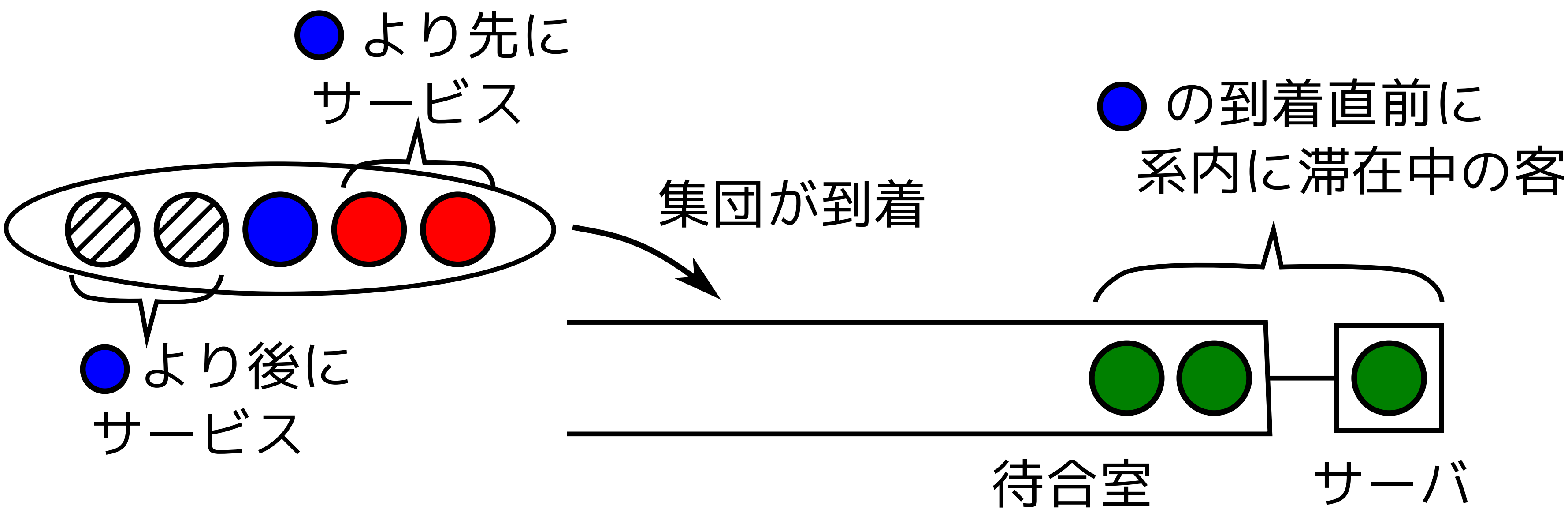
L_{D}：客の離脱直後における系内客数

- 集団はポアソン過程に従って到着
  - $l_{\mathrm{A}}^{\mathrm{b}}(z) = l(z)$

$$\boxed{l(z) = \mathrm{E}[z^{L}]}$$

- $l(z) = l_{\mathrm{D}}(z)/\tilde{g}_{\mathrm{fw}}(z)$
  - $l_{\mathrm{D}}(z)$ が求められれば $l(z)$ が得られる

客の離脱直後における系内客数 L_{D}



の離脱直後における系内客数：

の数 ＋ の滞在時間中に到着する客数

$\boxed{\text{相関をもつ}}$

(の数との数が相関をもつため)

滞在時間 Q と離脱直後の系内客数 L_{D}

- 集団は率 λ のポアソン過程に従い到着
- サービスは先着順で行われる
- Q の長さは，その間の客の到着過程とは無関係に決定

➡ $l_{\mathrm{D}}(z) = \left(\tilde{G}_{\mathrm{bw}} + \text{Q の間に系に到着する客数}\right)$ の母関数

$$= \boxed{q^*(z, \lambda - \lambda g(z))}$$ [Keilson and Servi (1988)]

$q^*(z, s) \triangleq \mathrm{E}[z^{\tilde{G}_{\mathrm{bw}}} \cdot e^{-sQ}]$

$\tilde{G}_{\mathrm{bw}}$：同じ集団内で自分より後にサービスされる客数

$l_{\mathrm{D}}(z) = \mathrm{E}[z^{L_{\mathrm{D}}}]$,　　G：集団内の客数，$g(z) = \mathrm{E}[z^G]$

$\tilde{G}_{\mathrm{bw}}$ と Q の結合変換 $q^*(z,s)$

- $q^*(z,s)$ は待ち時間と同様の観察により得られる

$$q^*(z,s) = P_{\mathrm{WV}} \cdot \psi^*\Big(\underbrace{u^*_{\mathrm{WV}}(s)\,\tilde{g}\big(z, h^*_{\mathrm{WV}}(s)\big)\,h^*_{\mathrm{WV}}(s)}\Big)$$

$$+ P_{\mathrm{B}} \cdot \underbrace{u^*_{\mathrm{B}}(s)\,\tilde{g}\big(z, h^*_{\mathrm{B}}(s)\big)\,h^*_{\mathrm{B}}(s)}$$

滞在時間 Q の間に
処理される仕事量と
$\tilde{G}_{\mathrm{bw}}$ の結合変換

$$\tilde{g}(z,w) \triangleq \frac{g(z)-g(w)}{\mathrm{E}[G](z-w)}$$

：同じ集団内で，自分より
後にサービスされる客数 $\tilde{G}_{\mathrm{bw}}$ と
先にサービスされる客数 $\tilde{G}_{\mathrm{fw}}$ の結合母関数

$$\psi^*\big(\chi^*(z,s)\big) \triangleq \chi^*\left(z, \frac{s+\eta}{\gamma}\right) + \frac{\chi^*(z,s) - \chi^*\left(z, \frac{s+\eta}{\gamma}\right)}{(\gamma/\eta)\{(s+\eta)/\gamma - s\}}$$

$\tilde{G}_{\mathrm{bw}}$ と Q の結合変換 $q^*(z,s)$

- $q^*(z,s)$ は待ち時間と同様の観察により得られる

$$q^*(z,s) = P_{\mathrm{WV}} \cdot \psi^* \Big(u^*_{\mathrm{WV}}(s)\, \tilde{g}\big(z, h^*_{\mathrm{WV}}(s)\big)\, h^*_{\mathrm{WV}}(s) \Big)$$

$$+ P_{\mathrm{B}} \cdot u^*_{\mathrm{B}}(s)\, \tilde{g}\big(z, h^*_{\mathrm{B}}(s)\big)\, h^*_{\mathrm{B}}(s)$$

➡ 定常状態における系内客数分布の母関数 $l(z)$ が

$$l(z) = l_{\mathrm{D}}(z) / \tilde{g}_{\mathrm{fw}}(z) = \boxed{q^*(z, \lambda - \lambda g(z)) / \tilde{g}_{\mathrm{fw}}(z)}$$

から求められる

$l_{\mathrm{D}}(z)$：客の離脱直後における系内客数分布の母関数

まとめ

- 定常状態における，WV をもつ M^{X}/G/1 待ち行列を考察
  - 系内仕事量分布
    - 客が 1 人ずつ到着するモデル [井上, 滝根 (2011)] に対する結果から直接導出
  - 待ち時間分布
    - 待ち時間の間に処理される仕事量の考察から導出
  - 系内客数分布
    - 客の離脱直後の系内客数 L_{D} の分布との関係式を導出
    - 集団内で自分より後にサービスされる客数と滞在時間との結合分布
      - 待ち時間と同様にして解析
      - その結果をもとに L_{D} の分布を導出

系内仕事量分布のLST $u^*(s)$

[井上, 滝根 (2011)] の結果より，

- $\boxed{u^*(s) = P_{\mathrm{WV}} \cdot u^*_{\mathrm{WV}}(s) + P_{\mathrm{B}} \cdot u^*_{\mathrm{B}}(s)}$

■ P_{WV} : Pr(サーバが WV 中)
■ P_{B} : Pr(サーバがビジー)
■ ν : Pr(系が空 | WV 中)

◆ $$P_{\mathrm{WV}} = \frac{1 - \lambda b_{\mathrm{T,B}}}{1 - \lambda b_{\mathrm{T,B}} + \lambda b_{\mathrm{T,WV}} - \gamma \nu}, \qquad P_{\mathrm{B}} = 1 - P_{\mathrm{WV}}$$

◆ $$u^*_{\mathrm{WV}}(s) = \frac{(1-\nu)s - (\eta/\gamma)}{s - (\lambda/\gamma) + (\lambda/\gamma) h^*_{\mathrm{T,WV}}(s) - (\eta/\gamma)}$$

◆ $$u^*_{\mathrm{B}}(s) = \frac{1 - u^*_{\mathrm{WV}}(s)}{s\mathrm{E}[U_{\mathrm{WV}}]} \cdot \frac{(1 - \lambda b_{\mathrm{T,B}})s}{s - \lambda + \lambda h^*_{\mathrm{T,B}}(s)}, \qquad \mathrm{E}[U_{\mathrm{WV}}] = \frac{\lambda b_{\mathrm{T,WV}} - \gamma \nu}{\eta}$$

$$h^*_{\mathrm{T,WV}}(s) \triangleq g\big(h^*_{\mathrm{WV}}(s)\big), \qquad h^*_{\mathrm{T,B}}(s) \triangleq g\big(h^*_{\mathrm{B}}(s)\big)$$

$$b_{\mathrm{T,WV}} \triangleq \mathrm{E}[G] \cdot \mathrm{E}[H_{\mathrm{WV}}], \qquad b_{\mathrm{T,B}} \triangleq \mathrm{E}[G] \cdot \mathrm{E}[H_{\mathrm{B}}]$$

待ち時間分布のLST $w^*(s)$

- 集団はポアソン過程に従って到着
  - ◆ Pr(客の到着時に WV 中) $=$ Pr(定常状態において WV 中) $= P_{\mathrm{WV}}$
  - ◆ Pr(客の到着時にビジー) $=$ Pr(定常状態においてビジー) $= P_{\mathrm{B}}$

- $$\boxed{w^*(s) = P_{\mathrm{WV}} \cdot \psi^*\left(\underbrace{u^*_{\mathrm{WV}}(s)\,\tilde{g}_{\mathrm{fw}}\big(h^*_{\mathrm{WV}}(s)\big)}_{\text{待ち時間中に処理される仕事量}}\right) + P_{\mathrm{B}} \cdot \underbrace{u^*_{\mathrm{B}}(s)\,\tilde{g}_{\mathrm{fw}}\big(h^*_{\mathrm{B}}(s)\big)}_{\text{待ち時間中に処理される仕事量}}}$$

$$\tilde{g}_{\mathrm{fw}}(z) \triangleq \frac{1 - g(z)}{\mathrm{E}[G](1 - z)}$$

同じ集団内で自分より先にサービスされる客数 $\tilde{G}_{\mathrm{fw}}$ の母関数

待ち時間中に処理される仕事量

定常状態における系内客数 L

- 集団内の客数 G と，その到着直前の系内客数 L_A^b は独立
  - $l_A^b(z) \cdot \tilde{g}_{fw}(z) = l_D(z)$

$$l_A^b(z) \triangleq \mathrm{E}[z^{L_A^b}], \quad \tilde{g}_{fw}(z) = \frac{1 - g(z)}{\mathrm{E}[G](1-z)}, \quad l_D(z) \triangleq \mathrm{E}[z^{L_D}]$$

(G の残余の母関数)

L_D：客の離脱直後における系内客数

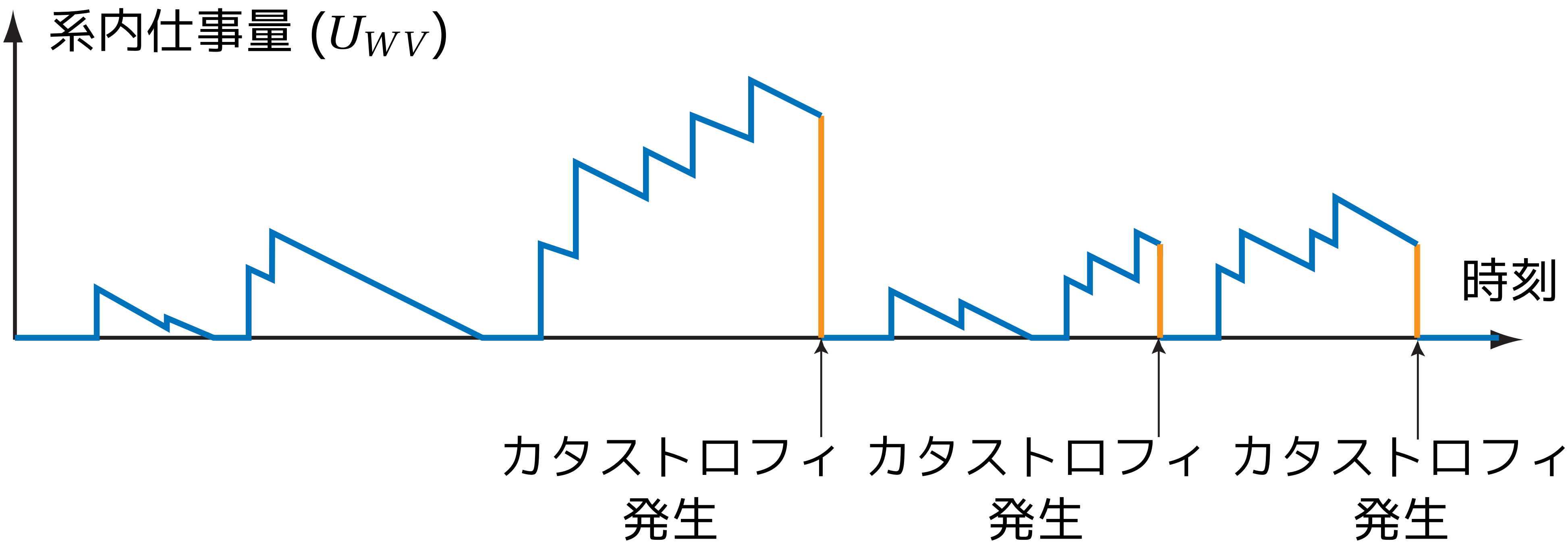
- 集団はポアソン過程に従って到着
  - $l_A^b(z) = l(z)$

$$l(z) = \mathrm{E}[z^L]$$

- $l(z) = l_D(z) / \tilde{g}_{fw}(z)$
  - $l_D(z)$ が求められれば $l(z)$ が得られる

系内仕事量過程 (WV 中)

- カタストロフィをもつ M/G/1 と等価
  - カタストロフィが発生 ➡ 系内の仕事は全て破棄
  - ポアソン過程に従ってカタストロフィが発生



系内仕事量過程 (ビジー)

- バケーションをもつ M/G/1 の，サービス中である期間と等価