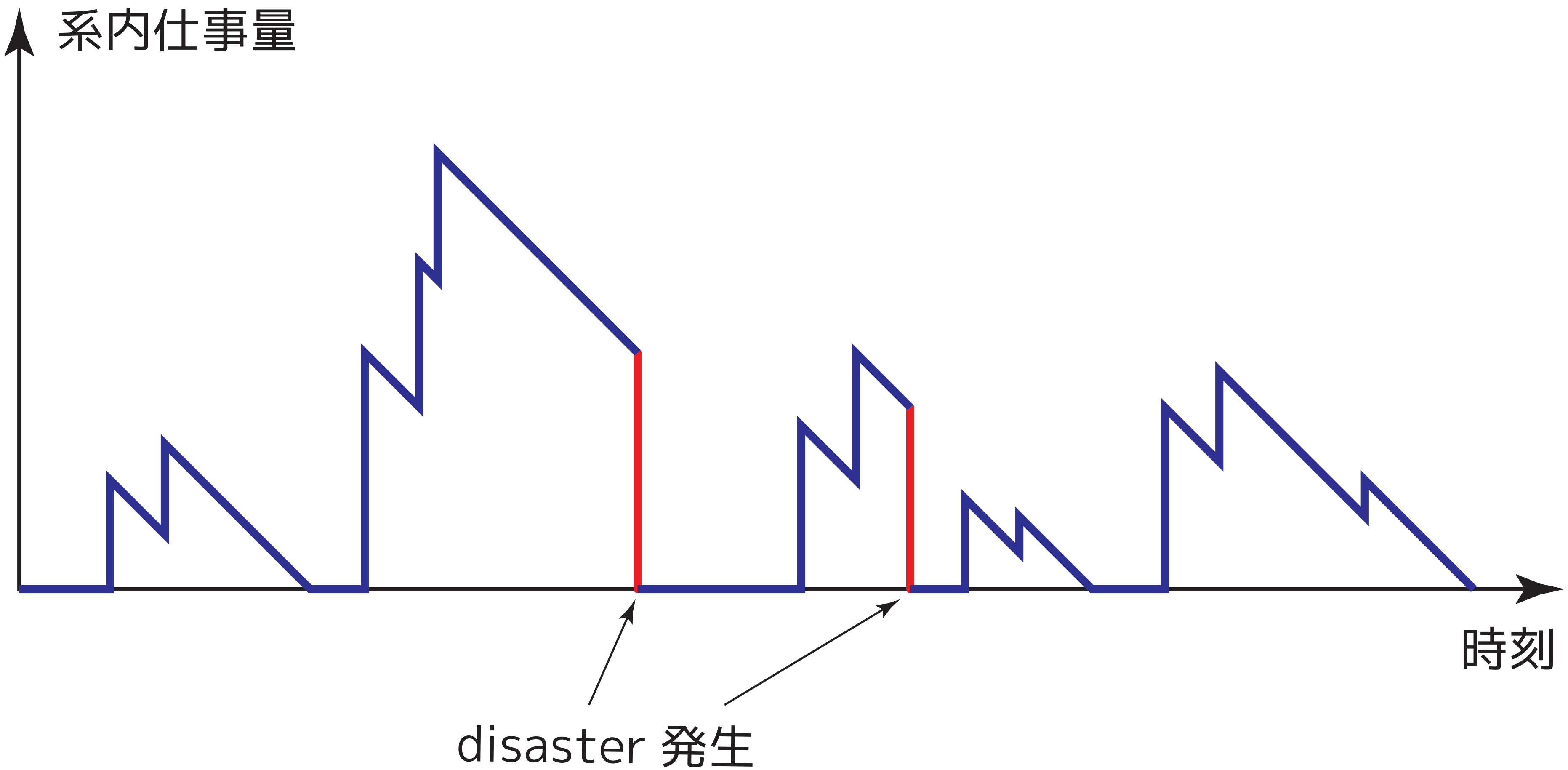
Disaster が起こる MAP/G/1 待ち行列の系内仕事量分布

井上文彰
大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

滝根哲哉
大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

Disaster が起こる待ち行列モデル

- Disaster が発生すると，系内の仕事は全て破棄



先行研究

- Disaster が起こる M/G/1 待ち行列
  [Jain and Sigman (1996)]
  - 客の到着過程　　　　: ポアソン過程
  - Disaster の発生過程 : ポアソン過程

- Disaster が起こる BMAP/SM/1 待ち行列
  [Dudin and Nishimura (1999)]
  - 客の到着過程　　　　: BMAP
  - Disaster の発生過程 : MAP
  - 客のサービス時間　　: セミマルコフ過程の状態遷移間隔

それぞれを，独立なマルコフ連鎖が支配

考察するモデル

Disaster が起こる MAP/G/1 待ち行列

- 共通の背後マルコフ連鎖が
  客の到着，disaster の発生，サービス要求量を支配
  - 客の到着過程と disaster の発生過程
    - 共通の背後マルコフ連鎖が支配する MAP
  - 到着客のサービス要求量分布
    - 到着直前と直後における
      背後マルコフ連鎖の状態に応じて定まる
- 背後マルコフ連鎖は既約
  - Disaster の発生時点で系が空になるため，系は常に安定

背後マルコフ連鎖

- 背後マルコフ連鎖: 既約な連続時間マルコフ連鎖
  - 状態空間 $\mathscr{M} = \{1, 2, \ldots, M\}$
  - 状態 $i \in \mathscr{M}$ にパラメタ σ_i の指数分布に従う時間だけ滞在
  - 状態 i での滞在終了時点に次のいずれかが発生

確率	状態遷移先	客の到着	Disaster の発生
$p_{i,j}$	$j \in \mathscr{M}, \neq i$	×	×
$q_{i,j}$	$j \in \mathscr{M}$	◯	×
$\gamma_{i,j}$	$j \in \mathscr{M}$	×	◯

  - サービス要求量分布は，到着に伴う状態遷移に応じて定まる
    - $B_{i,j}(x)$: 状態 i から j への遷移に伴って到着する客のサービス要求量分布

行列を用いた背後過程の表現

- $M \times M$ 行列 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}(x)$，$\boldsymbol{\Gamma}$ で背後過程を表現
  - それぞれ，次式で表される (i, j) 要素をもつ $(i, j \in \mathscr{M})$

$$[\boldsymbol{C}]_{i,j} = \begin{cases} \sigma_i p_{i,j}, & i \neq j \\ -\sigma_i, & i = j \end{cases}$$

客の到着，disaster の発生を伴わずに $i \to j$ と遷移する率

状態 i から遷移する率

$$[\boldsymbol{D}(x)]_{i,j} = \sigma_i q_{i,j} B_{i,j}(x)$$

サービス要求量が x 以下の客の到着を伴って $i \to j$ と遷移する率

$$[\boldsymbol{\Gamma}]_{i,j} = \sigma_i \gamma_{i,j}$$

Disaster の発生を伴って $i \to j$ と遷移する率

行列を用いた背後過程の表現 (2)

- $M \times M$ 行列 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}(x)$，$\boldsymbol{\Gamma}$ で背後過程を表現

$$[\boldsymbol{D}(x)]_{i,j} = \sigma_i q_{i,j} B_{i,j}(x)$$

サービス要求量が x 以下の客の到着を伴って $i \to j$ と遷移する率

$(\mathrm{Re}(s) > 0)$

$$\boldsymbol{D}^*(s) \triangleq \int_0^\infty \exp(-sx) d\boldsymbol{D}(x), \quad \boldsymbol{D} \triangleq \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{D}(x) = \lim_{s\to 0} \boldsymbol{D}^*(s)$$

- $\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\Gamma}$ は背後マルコフ連鎖の無限小生成作用素

$$(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{e} = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{e} = 1$$

  - $\boldsymbol{e}$ ：要素が全て 1 の列ベクトル
  - $\boldsymbol{\pi}$：背後マルコフ連鎖の定常状態確率ベクトル

発表の概要

Disaster が起こる MAP/G/1 の系内仕事量分布を考察

- 最初に，系が空の状態への初到達時間を解析

その結果をもとに

- 系内仕事量分布の LST に対する二通りの表現を導出
  - Disaster が起こらない MAP/G/1 に対する結果
    - [Takine and Hasegawa (1994)]
    - [Takine (2002)]

  とそれぞれ対応

系が空の状態への初到達時間

系が空の状態への初到達時間

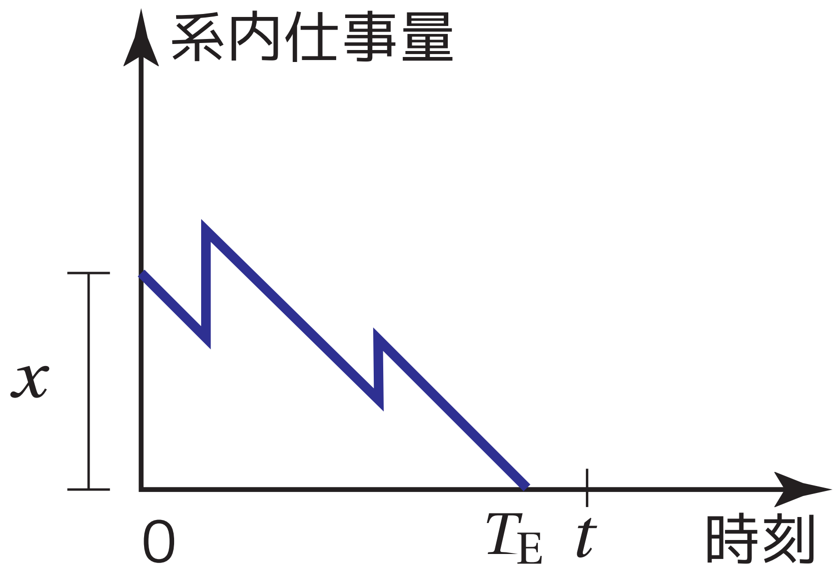
- $M \times M$ 行列 $\boldsymbol{P}(t \mid x)$ を次式で定義

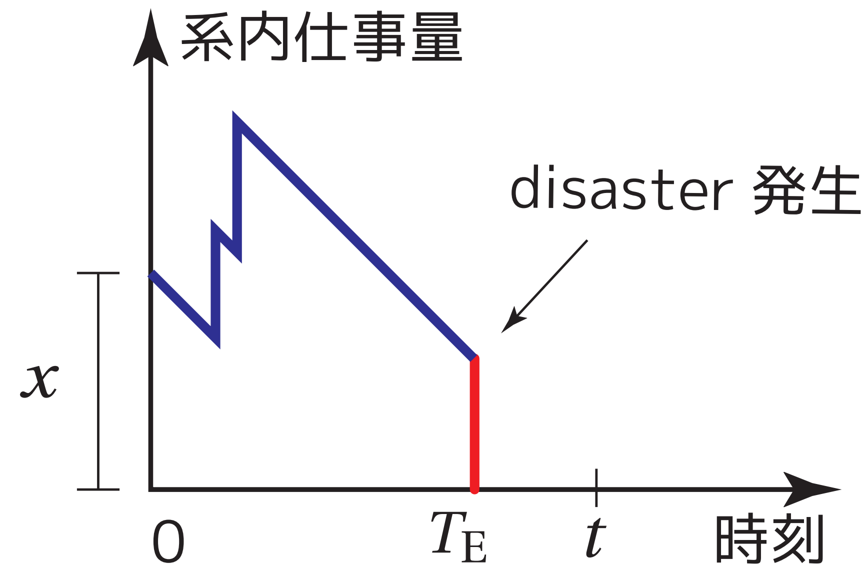
$$\left[\boldsymbol{P}(t \mid x)\right]_{i,j} \triangleq \Pr(T_{\mathrm{E}} \le t, S_{T_{\mathrm{E}}} = j \mid U_0 = x, S_0 = i)$$

U_t : 時刻 t における系内仕事量

S_t : 時刻 t における背後マルコフ連鎖の状態

T_{E} : 時刻 0 以降に初めて系が空になる時刻





初到達時間の場合分け

T_D：時刻 0 以降に初めて disaster が発生する時刻

- $\boldsymbol{P}_\mathrm{N}(t \mid x)$：系が空になるまでに disaster が発生しない

$$\left[\boldsymbol{P}_\mathrm{N}(t \mid x)\right]_{i,j} \triangleq \Pr(T_\mathrm{E} \le t, \underline{T_\mathrm{E} < T_\mathrm{D}}, S_{T_\mathrm{E}} = j \mid U_0 = x, S_0 = i)$$

- $\boldsymbol{P}_\mathrm{D}(t \mid x)$：disaster の発生によって系が空になる

$$\left[\boldsymbol{P}_\mathrm{D}(t \mid x)\right]_{i,j} \triangleq \Pr(T_\mathrm{E} \le t, \underline{T_\mathrm{E} = T_\mathrm{D}}, S_{T_\mathrm{E}} = j \mid U_0 = x, S_0 = i)$$

初到達時間分布の LST

- t に関する LST を考える

$$\boldsymbol{P}^*(s\,|\,x) \;=\; \boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(s\,|\,x) + \boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(s\,|\,x) \tag{2}$$

$(\mathrm{Re}(s) > 0)$

$$\boldsymbol{P}^*(s\,|\,x) \triangleq \int_0^\infty \exp(-st)\boldsymbol{P}(dt\,|\,x)$$

$$\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(s\,|\,x) \triangleq \int_0^\infty \exp(-st)\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}(dt\,|\,x),\ \boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(s\,|\,x) \triangleq \int_0^\infty \exp(-st)\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}(dt\,|\,x)$$

- $x = 0$ の場合，初到達時間は 0
  - $\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(s\,|\,0) = \boldsymbol{I}$ (単位行列), $\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(s\,|\,0) = \boldsymbol{0}$

初到達時間の分解 (1)

- 空になるまでに disaster が発生しない場合

$$P_{\mathrm{N}}^{*}(s \mid x+y) \quad = \quad P_{\mathrm{N}}^{*}(s \mid x) \;\cdot\; P_{\mathrm{N}}^{*}(s \mid y)$$

仕事量が x 減る間に
disaster が発生しない

仕事量が y 減る間に
disaster が発生しない

- Disaster の発生によって空になる場合

$$P_{\mathrm{D}}^{*}(s \mid x+y) \quad = \quad P_{\mathrm{D}}^{*}(s \mid x) \quad + \quad P_{\mathrm{N}}^{*}(s \mid x) \;\cdot\; P_{\mathrm{D}}^{*}(s \mid y)$$

仕事量が x 減るまで
に disaster が発生

仕事量が x 減る間に
disaster が発生しない

仕事量が y 減るまで
に disaster が発生

初到達時間の分解 (2)

- 空になるまでに disaster が発生しない場合

$$\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(s\,|\,x+\Delta x) \;=\; \boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(s\,|\,x)\cdot\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(s\,|\,\Delta x)$$

◆ $$\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(s\,|\,\Delta x) \;=\; \boldsymbol{I}-s\Delta x\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\Delta x \;+\; \int_0^\infty d\boldsymbol{D}(y)\Delta x\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(s\,|\,y) \;+\; \boldsymbol{o}(\Delta x)$$

客の到着，disaster の
いずれも発生しない

客が到着

Disaster が発生せず
に系が空になる

- Disaster の発生によって空になる場合

$$\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(s\,|\,x+\Delta x) \;=\; \boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(s\,|\,x)+\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(s\,|\,x)\cdot\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(s\,|\,\Delta x)$$

◆ $$\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(s\,|\,\Delta x) \;=\; \boldsymbol{\Gamma}\Delta x \;+\; \int_0^\infty d\boldsymbol{D}(y)\Delta x\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(s\,|\,y) \;+\; \boldsymbol{o}(\Delta x)$$

disaster が発生

客が到着

Disaster が発生して
系が空になる

初期仕事量 x に関する偏導関数

- 空になるまでに disaster が発生しない場合

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^{*}(s \mid x)\right] = \boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^{*}(s \mid x)\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{*}(s) \tag{6}$$

- Disaster の発生によって系が空になる場合

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}^{*}(s \mid x)\right] = \boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^{*}(s \mid x)\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}^{*}(s) \tag{7}$$

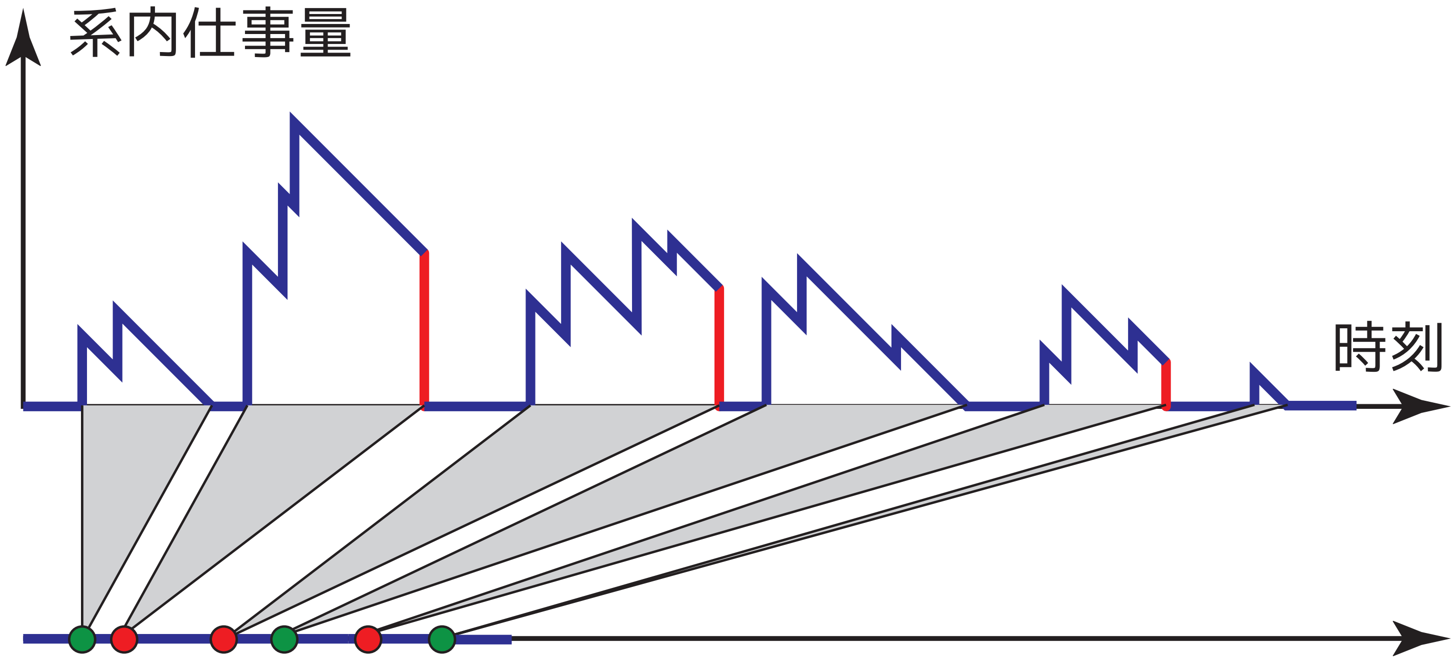
- $$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{*}(s) \triangleq -s\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + \int_0^{\infty} d\boldsymbol{D}(y)\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^{*}(s \mid y) \tag{5}$$

- $$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}^{*}(s) \triangleq \boldsymbol{\Gamma} + \int_0^{\infty} d\boldsymbol{D}(y)\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}^{*}(s \mid y) \tag{5}$$

系が空のときの背後過程 (1)

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} \triangleq \lim_{s\to 0} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{*}(s), \qquad \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}} \triangleq \lim_{s\to 0} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}^{*}(s)$$

➡ $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}$：時間軸から全稼働期間を取り除いて得られる背後マルコフ連鎖の，無限小生成作用素



系が空のときの背後過程 (2)

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} \triangleq \lim_{s\to 0} \boldsymbol{Q}^*_{\mathrm{N}}(s), \qquad \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}} \triangleq \lim_{s\to 0} \boldsymbol{Q}^*_{\mathrm{D}}(s)$$

➡ $\boxed{\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}}$：時間軸から全稼働期間を取り除いて得られる背後マルコフ連鎖の，無限小生成作用素

◆ $$\underbrace{}_{}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{C} + \int_0^\infty d\boldsymbol{D}(y)\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(0 \mid y) \qquad (11)$$

$\boldsymbol{C}$：客の到着，disaster のいずれも発生しない

$d\boldsymbol{D}(y)$：客が到着

$\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{N}}(0 \mid y)$：Disaster が発生せずに系が空になる

◆ $$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}} = \boldsymbol{\Gamma} + \int_0^\infty d\boldsymbol{D}(y)\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(0 \mid y) \qquad (12)$$

$\boldsymbol{\Gamma}$：disaster が発生

$d\boldsymbol{D}(y)$：客が到着

$\boldsymbol{P}^*_{\mathrm{D}}(0 \mid y)$：Disaster が発生して系が空になる

系が空のときの背後過程 (3)

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} \triangleq \lim_{s\to 0} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{*}(s), \qquad \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}} \triangleq \lim_{s\to 0} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}^{*}(s)$$

➡ $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}$: 時間軸から全稼働期間を取り除いて得られる背後マルコフ連鎖の，無限小生成作用素

◆ $$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{C} + \int_0^{\infty} d\boldsymbol{D}(y)\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^{*}(0 \mid y) \tag{11}$$

- 対角要素は負で，非対角要素は非負

$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}$ の行和は全て 0

◆ $$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}} = \boldsymbol{\Gamma} + \int_0^{\infty} d\boldsymbol{D}(y)\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}^{*}(0 \mid y) \tag{12}$$

- 全ての要素は非負

$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}$ と $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}$ の求め方

- $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}$ は要素毎に単調増加する列 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(n)}$ の極限として得られる

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(0)} &= \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(n)} = \boldsymbol{C} + \int_0^{\infty} d\boldsymbol{D}(y) \exp(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(n-1)} y) \\ \boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} &= \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(n)} \end{aligned} \tag{16}$$

- $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}$ は $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}$ を用いて与えられる

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}} = (-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})\left[-(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\right]^{-1}\boldsymbol{\Gamma}$$

  - $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ は disaster を伴わない遷移に対応する生成作用素
    - $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ は逆行列をもつことが示される

平均初到達時間

- $\boldsymbol{f}(x)$: 系が空の状態への平均初到達時間を表す列ベクトル
  - $\left[\boldsymbol{f}(x)\right]_i \triangleq \mathrm{E}[T_{\mathrm{E}} \mid U_0 = x, S_0 = i]$ (17)
  - $\boldsymbol{f}(x) = (-1) \cdot \lim_{s \to 0} \frac{\partial}{\partial s}\left[\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^*(s \mid x) + \boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}^*(s \mid x)\right]\boldsymbol{e}$

➡ $\frac{\partial}{\partial x}\left[\boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^*(s \mid x)\right] = \boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^*(s \mid x)\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^*(s), \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\boldsymbol{P}_{\mathrm{D}}^*(s \mid x)\right] = \boldsymbol{P}_{\mathrm{N}}^*(s \mid x)\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}^*(s)$

を用いて計算すると得られる

$$\boxed{\boldsymbol{f}(x) = \left[\boldsymbol{I} - \exp(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} x)\right]\left[-(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D})\right]^{-1}\boldsymbol{e}} \tag{18}$$

系が空であるときの状態ベクトル

- $\boldsymbol{\kappa}$：系が空であるという条件下における定常状態確率ベクトル
  - 次式から与えられる

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}} + \boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{e} = 1 \tag{15}$$

- ν：サーバが稼働中である確率
  - $\boldsymbol{f}(x) = \left[\boldsymbol{I} - \exp(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}x)\right]\left[-(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\right]^{-1}\boldsymbol{e}$

    をもとに計算すると得られる

$$\boxed{\nu \;=\; 1 - \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}(-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})\left[(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})\right]^{-1}\boldsymbol{e}}} \tag{25}$$

系内仕事量分布の LST に対する二通りの表現

系内仕事量分布

- 時刻 t における系内仕事量分布
  - $\boldsymbol{u}_t(x)$：$1 \times M$ の行ベクトル

$$\left[\boldsymbol{u}_t(x)\right]_j \triangleq \Pr(U_t \le x, S_t = j)$$

- 定常状態における系内仕事量分布

$$\boldsymbol{u}(x) \triangleq \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{u}_t(x), \qquad \boldsymbol{u}^*(s) \triangleq \int_0^\infty \exp(-sx)d\boldsymbol{u}(x)$$

時間依存の系内仕事量分布

- 時刻 t から $t+\Delta t$ への遷移を考える

$$\boldsymbol{u}_{t+\Delta t}(x) \quad = \quad \boldsymbol{u}_t(x+\Delta t)(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}\Delta t) \ + \int_0^x \boldsymbol{u}_t(x-y+\Delta t)\,d\boldsymbol{D}(y)\Delta t$$

客の到着，disaster の
いずれも発生しない

客が到着

$$+ \ \boldsymbol{u}_t(\infty)\boldsymbol{\Gamma}\Delta t \ + \ \boldsymbol{o}(\Delta t)$$

disaster が発生

➡ $$\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{u}_t(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\boldsymbol{u}_t(x)\right] + \boldsymbol{u}_t(x)\boldsymbol{C} + \int_0^x \boldsymbol{u}_t(x-y)\,d\boldsymbol{D}(y) + \boldsymbol{u}_t(\infty)\boldsymbol{\Gamma}$$

系内仕事量分布の LST $\boldsymbol{u}^*(s)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\boldsymbol{u}_t(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\boldsymbol{u}_t(x)\right] + \boldsymbol{u}_t(x)\boldsymbol{C} + \int_0^x \boldsymbol{u}_t(x-y)d\boldsymbol{D}(y) + \boldsymbol{u}_t(\infty)\boldsymbol{\Gamma}$$

$t \to \infty$ とし，x に関する LST をとる

➡ $\boldsymbol{u}^*(s)$ に対する一つ目の表現が得られる

$$\boxed{\boldsymbol{u}^*(s)[s\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}^*(s)] \;=\; s(1-\nu)\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\Gamma}} \qquad (26)$$

系内仕事量と系内客数の結合分布

- 割り込み再開型後着順サービス規律を仮定
  - 仕事量保存型のサービス規律
- 時刻 t における系内仕事量と系内客数の結合分布
  - L_t : 時刻 t における系内客数
  - $\boldsymbol{u}_t(x,k)$: $1 \times M$ の行ベクトル

$$\left[\boldsymbol{u}_t(x,k)\right]_j = \Pr(U_t \le x, L_t = k, S_t = j)$$

- 定常状態における系内仕事量と系内客数の結合分布

$$\boldsymbol{u}(x,k) = \lim_{t\to\infty} \boldsymbol{u}_t(x,k), \quad \boldsymbol{u}^*(s,k) = \int_0^\infty \exp(-sx)\boldsymbol{u}(dx,k)$$

割り込み再開型後着順サービス規律

- 客は，到着後すぐにサービスを受け始める
  - サービス中に客が到着すると，その客が離脱するまで待機
- 系内客数が k $\quad (k \neq 0)$

  $\Leftrightarrow$ 系内客数が $k-1$ のときに到着した客がサービス中

➨ $\left[\boldsymbol{u}(x,k)\right]_j$ $(k \neq 0)$ = 系内客数が $k-1$ のときに到着した客のサービス中において，

- 系内仕事量が x 以下
- 背後マルコフ連鎖の状態が j

である時間割合

系内客数が $k-1$ のときに到着した客

- サービス中における系内仕事量の内訳
  - 自分より先に到着した $k-1$ 人の残余サービス要求量
    - 到着時に見た量から変化しない
  - 自分の残余サービス要求量
    - サービスが進行するにつれて減少
    - 滞在中に disaster が発生した場合，0 になる前に離脱
- サービス中における背後マルコフ連鎖の状態変化
  - ➡ 時間軸から全稼働期間を取り除いた場合と同じ
    - 無限小生成作用素：$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}$
    - $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}$ による遷移が起こると disaster の発生により離脱

$\boldsymbol{u}^*(s)$ に対する二つ目の表現

- $\boldsymbol{u}^*(s,k-1)$ と $\boldsymbol{u}^*(s,k)$ ($k=0,1,\ldots$) は次の関係式を満たす

$$\boxed{\boldsymbol{u}^*(s,k) \;=\; \boldsymbol{u}^*(s,k-1)\boldsymbol{R}^*(s)} \tag{30}$$

$$\boldsymbol{R}^*(s) = \int_0^\infty \exp(-sx)\,dx \int_x^\infty d\boldsymbol{D}(y)\exp\big(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}(y-x)\big) \tag{28}$$

➡ $\boldsymbol{u}^*(s,0) \;=\; (1-\nu)\boldsymbol{\kappa}$ より，$\boldsymbol{u}^*(s,k)$ が得られる．

$$\boldsymbol{u}^*(s,k) \;=\; (1-\nu)\boldsymbol{\kappa}\big[\boldsymbol{R}^*(s)\big]^k \tag{27}$$

➡ $\boldsymbol{u}^*(s)$ に対する二つ目の表現が得られる

$$\boldsymbol{u}^*(s) \;=\; \sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{u}^*(s,k) \;=\; (1-\nu)\boldsymbol{\kappa}\big[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)\big]^{-1} \tag{36}$$

  - $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ で逆行列をもつことが示される

まとめ

Disaster が起こる MAP/G/1 待ち行列を考察

- ◆ 客の到着，disaster の発生，サービス要求量分布が共通の背後マルコフ連鎖によって支配されると仮定

- 最初に，系が空の状態への初到達時間を解析

その結果をもとに，

- 系内仕事量分布の LST に対する二通りの表現を導出

$$\boldsymbol{u}^*(s)[s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s)] = s(1-\nu)\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\Gamma} \tag{26}$$

$$\boldsymbol{u}^*(s) = (1-\nu)\boldsymbol{\kappa}\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)\right]^{-1} \tag{36}$$

$\boldsymbol{u}^*(s)$ に対する二つの表現の関係

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^*(s)[s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s)] &= s(1-\nu)\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\Gamma} &(26)\\ \boldsymbol{u}^*(s) &= (1-\nu)\boldsymbol{\kappa}\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)\right]^{-1} &(36)\end{aligned}$$

- $\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\Gamma}=(1-\nu)\boldsymbol{\kappa}(-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})$ が示される
  - ➨ (26) は 次式と同値

$$\boldsymbol{u}^*(s)[s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s)] = (1-\nu)\boldsymbol{\kappa}(s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})$$

- (36) から (26) は簡単に導出される
  - ◆ (36) より, $\boldsymbol{u}^*(s)\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)\right](s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}) = (1-\nu)\boldsymbol{\kappa}(s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})$
  - ◆ $\boldsymbol{R}^*(s)$ の定義より, $\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)\right](s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}) = s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s)$
- (26) から (36) を導出するためには,
  $\det(s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s))=0$ となる s についての議論が必要

(26) からの (36) の導出

$$\boldsymbol{u}^*(s)[s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s)] = (1-\nu)\boldsymbol{\kappa}(s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}) \quad \text{((26) と同値)}$$

$$\boldsymbol{u}^*(s)\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)\right] = (1-\nu)\boldsymbol{\kappa} \quad \text{((36) と同値)}$$

- $\boldsymbol{R}^*(s)$ の定義より，　$\left[\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)\right](s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}) = s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s)$
  - $\mathrm{Re}(s)>0$ で $\det\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)\right)\neq 0$
    - ➡ $\det(s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})=0$ と $\det(s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s))=0$ の根は重複度を含めて一致
- $s\neq(-1)\cdot[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}$の固有値]　に対して次式が成立

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)=[s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s)](s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})^{-1}$$

  - $s\to(-1)\cdot[\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}$の固有値]　において，
    - $\det\left([s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(s)](s\boldsymbol{I}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})^{-1}\right)$ は収束
    - 右辺の収束先は $\boldsymbol{I}-\boldsymbol{R}^*(s)$ と同じ

三つの独立な背後過程をもつモデル

- 客の到着過程 (MAP) を支配する連続時間マルコフ連鎖
  - 状態での滞在終了時に，確率的に客が到着
- Disaster の発生過程 (MAP) を支配する連続時間マルコフ連鎖
  - 状態での滞在終了時に，確率的に disaster が発生
- 客のサービス要求量分布を決める離散時間マルコフ連鎖
  - 客の到着時に，確率的に状態が遷移
    - 遷移前後の状態に応じて，サービス要求量分布が定まる

背後マルコフ連鎖の重畳

- 三つの独立な背後過程
  - 客の到着，disaster の発生，サービス要求量分布を支配

➡ 重畳し，一つの背後過程として表現

  - 共通の連続時間マルコフ連鎖が三つの背後過程を表現
    - 状態での滞在終了時に，
      確率的に客の到着，disaster が発生
    - 到着前後の状態に応じて，サービス要求量分布が定まる

➡ 共通の連続時間マルコフ連鎖が一般の構造をもつ場合に拡張

  - 三つの背後過程が相関をもつ，
    より一般的な場合を包含する形で改めてモデル化