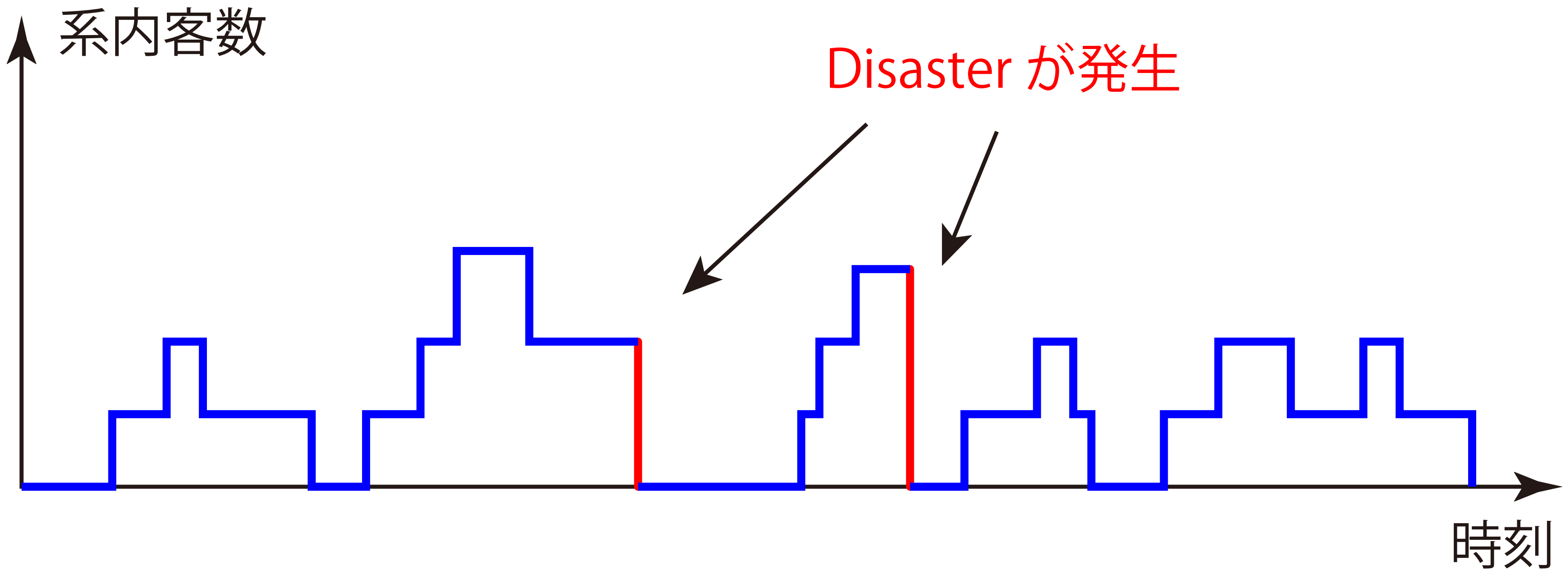
Disaster が起こる多元 MAP/G/1 待ち行列の結合系内客数分布

*井上 文彰， 滝根哲哉

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

Disaster が起こる待ち行列モデル

- Disaster が発生すると，系内の客は全て即座に離脱



関連研究

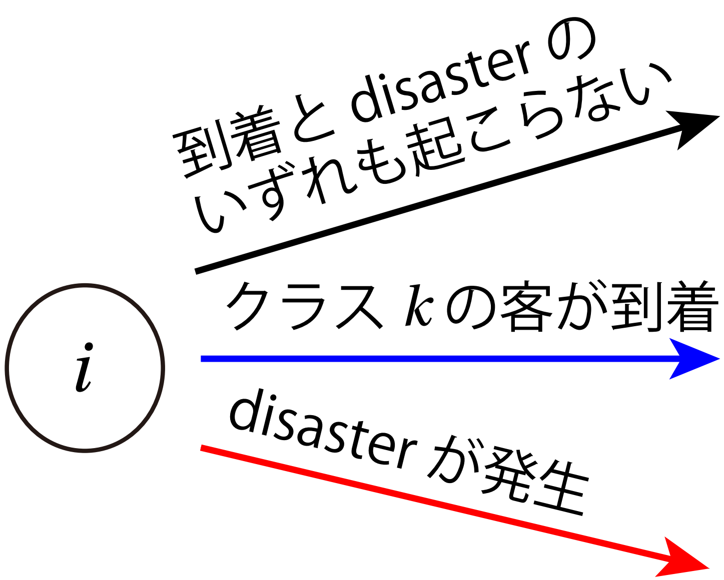
- Disaster が起こる BMAP/SM/1 待ち行列
  [Dudin and Nishimura (1999)]
  - 客の到着過程，disaster の発生過程，サービス時間
    - それぞれ独立な背後マルコフ連鎖が支配
- Disaster が起こる BMAP/G/1 待ち行列 [Shin (2004)]
  - 客の到着過程と disaster の発生過程
    - 共通の背後マルコフ連鎖が支配
  - サービス時間は i.i.d.

考察するモデル

- 客の到着過程と disaster の発生過程
  - 共通の背後マルコフ連鎖が支配
- 到着客に K 種類のクラスが存在
  - 到着客のクラスの集合 $\mathscr{K} = \{1, 2, \ldots, K\}$
  - クラス k ($k \in \mathscr{K}$) に属する客のサービス要求量
    - 分布関数 $B_k(x)$ に従って i.i.d.

背後マルコフ連鎖

- 既約な連続時間有限状態マルコフ連鎖
  - 状態空間 $\mathscr{M} = \{1, 2, \ldots, M\}$
- 状態 i ($i \in \mathscr{M}$) に平均 $1/\sigma_i$ の指数分布に従う時間だけ滞在
  - 状態 i での滞在が終了すると，下図のように遷移



	確率
状態 j ($j \neq i$) に遷移	p_{ij} $(j \in \mathscr{M}, j \neq i)$
状態 j に遷移	$q_{k,i,j}$ $(k \in \mathscr{K}, j \in \mathscr{M})$
状態 j に遷移	γ_{ij} $(j \in \mathscr{M})$

行列を用いた背後過程の表現 (1)

- $M \times M$ 行列 $\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}_k$ $(k \in \mathscr{K})$，$\boldsymbol{\Gamma}$ により背後過程を表現
  ($\mathscr{K}$：到着客が属するクラスの集合)

$$[\boldsymbol{C}]_{i,j} = \begin{cases} \sigma_i p_{i,j}, \ i \neq j \\ -\sigma_i, \quad i = j \end{cases}$$

客の到着，disaster の発生を伴わずに
状態 i から j へ遷移する率

σ_i：状態 i から遷移する率

$$[\boldsymbol{D}_k]_{i,j} = \sigma_i q_{k,i,j}$$

クラス k の客の到着を伴って
状態 i から j へ遷移する率

$$[\boldsymbol{\Gamma}]_{i,j} = \sigma_i \gamma_{i,j}$$

Disaster の発生を伴って
状態 i から j へ遷移する率

行列を用いた背後過程の表現 (2)

$B_k(x)$：クラス k に属する客のサービス要求量の分布関数

- $\boldsymbol{D}(x)$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}^*(s)$ を次式で定義
  - $\boldsymbol{D}(x) \triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}} \boldsymbol{D}_k B_k(x), \quad \boldsymbol{D} \triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}} \boldsymbol{D}_k = \lim_{x \to \infty} \boldsymbol{D}(x)$
  - $\boldsymbol{D}^*(s) \triangleq \int_0^\infty \exp(-sx) d\boldsymbol{D}(x)$
- $\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\Gamma}$：背後マルコフ連鎖の無限小生成作用素
- 以下では $\boldsymbol{D} \neq \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{\Gamma} \neq \boldsymbol{0}$ を仮定
  - Disaster 発生時点において系は空になる
    - ➡ $\boldsymbol{\Gamma} \neq \boldsymbol{0}$ ならびに背後マルコフ連鎖の既約性より系は安定

発表の概要

Disaster が起こる多元 MAP/G/1 待ち行列を考察

- 系内仕事量分布の解析結果 [井上, 滝根 (2012)] を紹介

その結果をもとに,

- サービスが先着順で行われる場合の結合系内客数分布を導出
  - 通常の多元 MAP/G/1 待ち行列 [Takine (2001)] における解析方法と同様のアプローチ

系が空である確率

- $\boldsymbol{\kappa}$：系が空であるという条件下における，
  背後マルコフ連鎖の定常状態確率ベクトル
  - $\boldsymbol{\kappa}$ は次式より一意に定められる

$$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}+\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{e} = 1$$

$\boldsymbol{e}$：要素が全て 1 の列ベクトル

ただし，$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{D}} = (-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})[-(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})]^{-1}\boldsymbol{\Gamma}$ であり，
$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}$ は次式で定義される列 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ の極限 $\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(\infty)}$

$$\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(0)} = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(n)} = \boldsymbol{C} + \int_0^{\infty} d\boldsymbol{D}(y) \exp\left(\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}}^{(n-1)} y\right)$$

- ν：定常状態において系が稼働中である確率

$$\nu = 1 - \frac{1}{\boldsymbol{\kappa}(-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{N}})[-(\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D})]^{-1}\boldsymbol{e}}$$

系内仕事量分布のLST $\boldsymbol{u}^*(s)$

U：定常状態における系内仕事量
S ：定常状態における背後マルコフ連鎖の状態

- $1 \times M$ ベクトル $\boldsymbol{u}(x)$ を次式で定義
  - $[\boldsymbol{u}(x)]_j \triangleq \Pr(U \le x, S = j)$
- $\boldsymbol{u}(x)$ の LST $\boldsymbol{u}^*(s)$ は次式を満たす

$\boxed{\boldsymbol{I}：\text{単位行列}}$

$$\boldsymbol{u}^*(s)[s\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}^*(s)] = s(1-\nu)\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\Gamma} \tag{1}$$

ただし，$[\boldsymbol{\pi}]_j = \Pr(S = j)$ であり，$\boldsymbol{\pi}$ は次式より一意に定まる

$$\boldsymbol{\pi}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D} + \boldsymbol{\Gamma}) = \boldsymbol{0}, \qquad \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{e} = 1$$

結合系内客数分布

L_k : 定常状態において系内に滞留中であるクラス k の客数

- $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n})$: 結合系内客数分布を表す $1 \times M$ ベクトル

$$[\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n})]_j = \Pr(L_1 = n_1, L_2 = n_2, \ldots L_K = n_K, S = j)$$

  - ◆ $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_K), \quad n_1, n_2, \ldots, n_K$ は非負の整数

- $1 \times M$ ベクトル結合母関数 $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z})$ を次式で定義

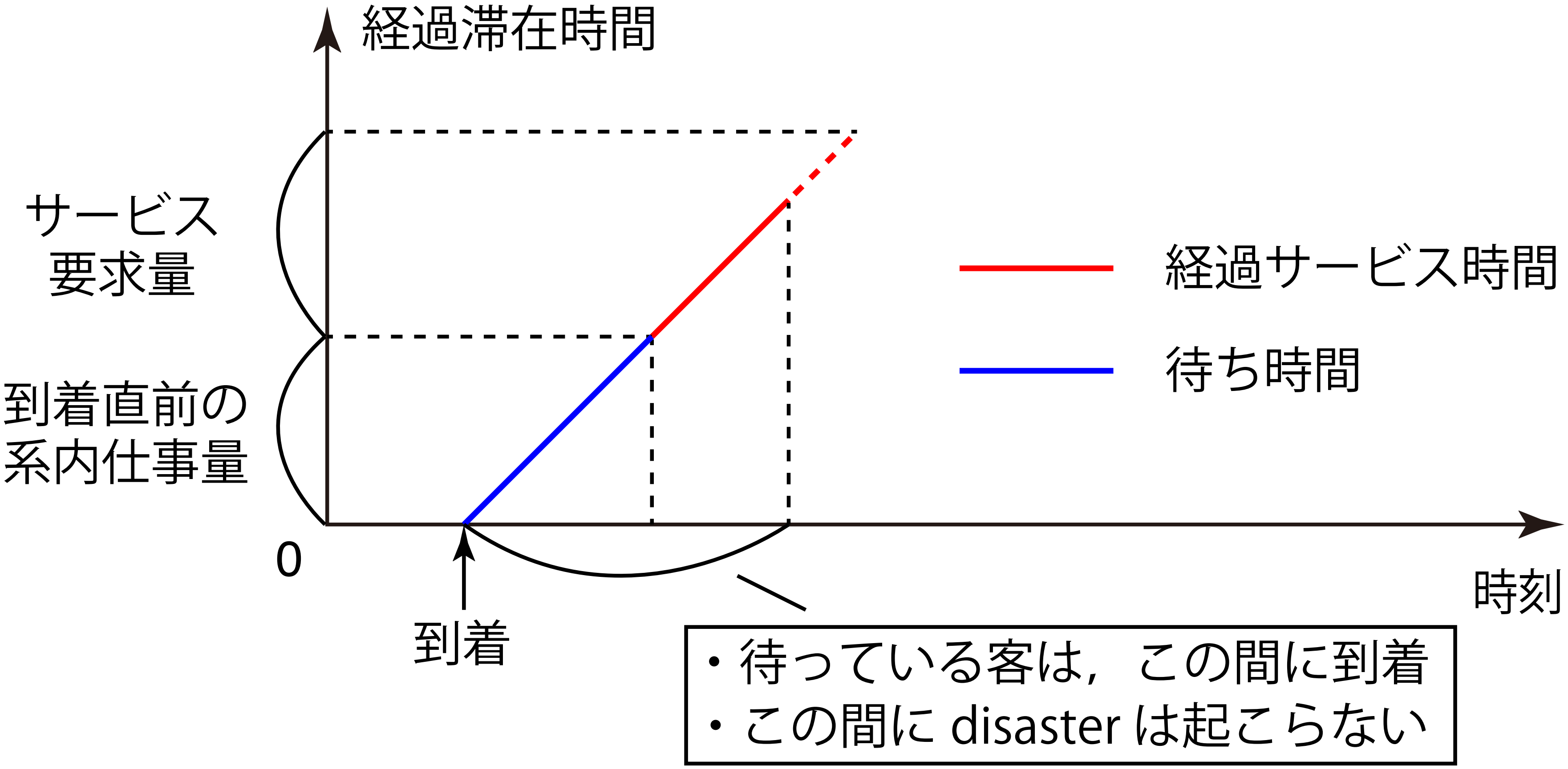
$$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{n} \in \mathcal{N}} \boldsymbol{y}(\boldsymbol{n}) z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_K^{n_K}$$

  - ◆ $\boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_K), \quad z_1, z_2, \ldots, z_K$ は絶対値が 1 未満の複素数
  - ◆ $\mathcal{N}$: 非負の整数 $n_1, n_2, \ldots, n_K$ からなる $\boldsymbol{n}$ 全体の集合

先着順サービス規律

- サーバが稼働中のときに待っている客

  ＝ サービス中の客の経過滞在時間に到着した客



系内客数分布の結合母関数 $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z})$

- 結合母関数 $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z})$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z}) = (1-\nu)\boldsymbol{\kappa} + \sum_{k\in\mathcal{K}} z_k \boldsymbol{y}_k^*(\boldsymbol{z}) \tag{2}$$

ただし，

- $\boldsymbol{y}_k^*(\boldsymbol{z})$：クラス k の客がサービス中であるときの，
  待っている客数の結合母関数

$$\boldsymbol{y}_k^*(\boldsymbol{z}) = \int_0^\infty d\boldsymbol{u}(x) \int_0^\infty dB_k(y)\boldsymbol{D}_k \cdot \int_0^y \exp\left[\left(\boldsymbol{C} + \sum_{l\in\mathcal{K}} z_l \boldsymbol{D}_l\right)(x+t)\right] dt$$

待ち時間 x ＋ 経過サービス時間 t の間に
disaster が起こらなかったときの到着客数

背後マルコフ連鎖の一様化

θ : $\boldsymbol{C}$ の対角要素の最大の絶対値

- 待ち時間 x + 経過サービス時間 t の間に起こる遷移

$$\exp\left[\left(\boldsymbol{C}+\sum_{l\in\mathcal{K}} z_l \boldsymbol{D}_l\right)(x+t)\right]$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \exp\bigl(-\theta(x+t)\bigr)\frac{\bigl(\theta(x+t)\bigr)^m}{m!}\cdot\left[\boldsymbol{I}+\theta^{-1}\left(\boldsymbol{C}+\sum_{l\in\mathcal{K}} z_l \boldsymbol{D}_l\right)\right]^m$$

時間 $x+t$ の間に率 θ の
ポアソン到着が m 個発生

発生したポアソン到着の数
に対応した遷移が起こる

背後マルコフ連鎖の一様化

θ : $\boldsymbol{C}$ の対角要素の最大の絶対値

- 待ち時間 x + 経過サービス時間 t の間に起こる遷移

$$\exp\left[\left(\boldsymbol{C}+\sum_{l\in\mathcal{K}} z_l\boldsymbol{D}_l\right)(x+t)\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\exp\big(-\theta(x+t)\big)\frac{\big(\theta(x+t)\big)^m}{m!}\cdot\left[\boldsymbol{I}+\theta^{-1}\left(\boldsymbol{C}+\sum_{l\in\mathcal{K}} z_l\boldsymbol{D}_l\right)\right]^m$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{m}\exp(-\theta x)\frac{(\theta x)^i}{i!}\cdot\exp(-\theta t)\frac{(\theta t)^{m-i}}{(m-i)!}\cdot\left[\boldsymbol{I}+\theta^{-1}\left(\boldsymbol{C}+\sum_{l\in\mathcal{K}} z_l\boldsymbol{D}_l\right)\right]^m$$

結合系内客数分布の計算

- $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z})$ は次式で書き換えられる

$$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z}) = (1-\nu)\boldsymbol{\kappa} + \sum_{k\in\mathcal{K}} z_k \sum_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{y}_k^{(m)}(\theta)\left[\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\left(\boldsymbol{C} + \sum_{l\in\mathcal{K}} z_l \boldsymbol{D}_l\right)\right]^m$$

  - $\boldsymbol{y}_k^{(m)}(\theta) = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{u}^{(i)}(\theta)\tilde{\boldsymbol{D}}_k^{(m-i)}(\theta)$
    - $\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta) = \int_0^\infty \exp(-\theta x)\frac{(\theta x)^m}{m!} d\boldsymbol{u}(x)$
    - $\tilde{\boldsymbol{D}}_k^{(m)}(\theta) = \int_0^\infty dB_k(y)\boldsymbol{D}_k \int_0^y \exp(-\theta t)\frac{(\theta t)^m}{m!} dt$

- $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n})$ $(\boldsymbol{n} \in \mathcal{N})$ は $\boldsymbol{y}_k^{(m)}(\theta)$ $(k \in \mathcal{K},\ m = 0, 1, \ldots)$ を用いて与えられる

[Masuyama and Takine (2003)]

➡ $\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ を求めれば，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n})$ が得られる

結合系内客数分布の計算

- $\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z})$ は次式で書き換えられる

$$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{z}) = (1-\nu)\boldsymbol{\kappa} + \sum_{k\in\mathcal{K}} z_k \sum_{m=0}^{\infty} \boldsymbol{y}_k^{(m)}(\theta)\left[\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\left(\boldsymbol{C} + \sum_{l\in\mathcal{K}} z_l \boldsymbol{D}_l\right)\right]^m$$

  - $\boldsymbol{y}_k^{(m)}(\theta) = \sum_{i=0}^{m} \boldsymbol{u}^{(i)}(\theta)\tilde{\boldsymbol{D}}_k^{(m-i)}(\theta)$
    - $\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta) = \int_0^\infty \exp(-\theta x)\dfrac{(\theta x)^m}{m!}d\boldsymbol{u}(x)$
    - $\tilde{\boldsymbol{D}}_k^{(m)}(\theta) = \int_0^\infty dB_k(y)\boldsymbol{D}_k \int_0^y \exp(-\theta t)\dfrac{(\theta t)^m}{m!}dt$

- $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n})$ $(n \in \mathcal{N})$ は $\boldsymbol{y}_k^{(m)}(\theta)$ $(k \in \mathcal{K},\ m = 0, 1, \ldots)$ を用いて与えられる

[Masuyama and Takine (2003)]

➡ $\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ を求めれば，$\boldsymbol{y}(\boldsymbol{n})$ が得られる

$\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ の計算

- $\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ は $\boldsymbol{u}^{*}(\theta - \theta z)$ の z^m に対する係数
- $\boldsymbol{u}^{*}(s)$ が満たす関係式より,

$$\boldsymbol{u}^{*}(\theta - \theta z)[(\theta - \theta z)\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}^{*}(\theta - \theta z)] = (\theta - \theta z)(1 - \nu)\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\Gamma}$$

両辺の z^m $(m = 0, 1, \ldots)$ の係数を比較

➡ $\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ は遷移行列 $\boldsymbol{T}$ をもつマルコフ連鎖の定常状態確率に一致することが示される

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \cdots \\ \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_0 &= \boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{C} + \theta^{-1}\boldsymbol{D}^{(0)}(\theta), \\ \boldsymbol{A}_m &= \theta^{-1}\boldsymbol{D}^{(m)}(\theta), \quad m = 1, 2, \ldots, \\ \boldsymbol{E} &= \theta^{-1}\boldsymbol{\Gamma}, \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{D}^{(m)}(\theta) = \int_0^\infty \exp(-\theta x)\frac{(\theta x)^m}{m!}d\boldsymbol{D}(x)$$

$\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ の計算

- $\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ $(m=0,1,\ldots)$ は $\boldsymbol{u}^*(\theta-\theta z)$ の z^m に対する係数
- $\boldsymbol{u}^*(s)$ が満たす関係式より,

$$\boldsymbol{u}^*(\theta-\theta z)[(\theta-\theta z)\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}^*(\theta-\theta z)] = (\theta-\theta z)(1-\nu)\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{\Gamma}$$

両辺の z^m $(m=0,1,\ldots)$ の係数を比較

➡ $\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ は遷移行列 $\boldsymbol{T}$ をもつマルコフ連鎖の定常状態確率に一致することが示される

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \cdots \\ \boldsymbol{A}_0+\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}_0 &= \boldsymbol{I}+\theta^{-1}\boldsymbol{C}+\theta^{-1}\boldsymbol{D}^{(0)}(\theta), \\ \boldsymbol{A}_m &= \theta^{-1}\boldsymbol{D}^{(m)}(\theta), \quad m=1,2,\ldots, \\ \boldsymbol{E} &= \theta^{-1}\boldsymbol{\Gamma}, \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{D}^{(m)}(\theta)=\int_0^\infty \exp(-\theta x)\frac{(\theta x)^m}{m!}d\boldsymbol{D}(x)$$

$\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ の計算

- $\boldsymbol{u}^{(m)}(\theta)$ $(m = 0, 1, \ldots)$ は遷移行列 $\boldsymbol{T}$ をもつマルコフ連鎖の定常状態確率に一致することが示される

$$
\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix}
\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_3 & \cdots \\
\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 & \cdots \\
\boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{A}_1 & \cdots \\
\boldsymbol{E} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_0 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A}_0 &= \boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{C} + \theta^{-1}\boldsymbol{D}^{(0)}(\theta), \\
\boldsymbol{A}_m &= \theta^{-1}\boldsymbol{D}^{(m)}(\theta), \quad m = 1, 2, \ldots, \\
\boldsymbol{E} &= \theta^{-1}\boldsymbol{\Gamma}, \\
\boldsymbol{D}^{(m)}(\theta) &= \int_0^{\infty} \exp(-\theta x)\frac{(\theta x)^m}{m!}\,d\boldsymbol{D}(x)
\end{aligned}
$$

- このマルコフ連鎖の定常状態確率の計算法は，[Dudin and Semenova (2004)] において与えられている

まとめ

Disaster が起こる多元 MAP/G/1 の結合系内客数分布を考察

- 考察したモデル
  - 客の到着と disaster の発生を共通の背後マルコフ連鎖が支配
  - 到着客のクラスによってサービス要求量分布が異なる
- 結合系内客数分布を，通常の多元 MAP/G/1 [Takine (2001)] と同様のアプローチにより導出
  - 系内仕事量分布の解析結果 [井上, 滝根 (2012)] を利用
  - 結合系内客数分布の計算は，[Dudin and Semenova (2004)] で考察されているマルコフ連鎖の定常状態確率の計算に帰着

結合母関数 $y_k^*(z)$ (1)

- $\boldsymbol{y}_k(\boldsymbol{n})$：クラス $1,2,\ldots,K$ の客数が $n_1,n_2,\ldots,n_K$ であり，
  かつ，クラス k の客がサービス中である時間割合
  (時間平均量)
  - $\boldsymbol{y}_k^*(\boldsymbol{z}) = \sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}} \boldsymbol{y}_k(\boldsymbol{n}) z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_K^{n_K}$

- $\widehat{\boldsymbol{y}}_k(\boldsymbol{n})$：ランダムに選ばれたクラス k の客が，
  クラス $1,2,\ldots,K$ の客数が $n_1,n_2,\ldots,n_K$
  のときにサービスを受ける時間の長さの平均
  (客平均量)
  - $\widehat{\boldsymbol{y}}_k(\boldsymbol{n}) = \int_0^\infty \frac{d\boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{D}_k}{\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{e}} \int_0^\infty dB_k(y) \int_0^y \boldsymbol{N}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{n}, x+t)\,dt$

到着直前の系内仕事量 $\approx x$，
かつ，サービス要求量 $\approx y$
である確率

$x+t$ の間に disaster が発生せず，
$\boldsymbol{n}$ で表される組み合わせの客が
到着する確率

結合母関数 $y^*_k(z)$ (2)

$$\hat{\boldsymbol{y}}_k(\boldsymbol{n}) = \int_0^\infty \frac{d\boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{D}_k}{\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{e}} \int_0^\infty dB_k(y) \int_0^y \boldsymbol{N}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{n}, x+t)\,dt$$

- 時間平均量と客平均量の間に成り立つ関係式 $H = \lambda G$

  [Heyman and Stidham (1980)]

  - $\boldsymbol{y}_k(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{e} \cdot \hat{\boldsymbol{y}}_k(\boldsymbol{n})$ ($\boldsymbol{\pi}\boldsymbol{D}_k\boldsymbol{e}$：クラス k の客の到着率)

$$= \int_0^\infty d\boldsymbol{u}(x)\boldsymbol{D}_k \int_0^\infty dB_k(y) \int_0^y \boldsymbol{N}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{n}, x+t)\,dt$$

➡ $\displaystyle\sum_{\boldsymbol{n}\in\mathcal{N}} \boldsymbol{N}_{\mathrm{N}}(\boldsymbol{n}, x+t) z_1^{n_1} z_2^{n_2} \cdots z_K^{n_K} = \exp\left[\left(\boldsymbol{C} + \sum_{l\in\mathcal{K}} z_l \boldsymbol{D}_l\right)(x+t)\right]$ より，

$$\boldsymbol{y}^*_k(\boldsymbol{z}) = \int_0^\infty d\boldsymbol{u}(x) \int_0^\infty dB_k(y)\boldsymbol{D}_k \int_0^y \exp\left[\left(\boldsymbol{C} + \sum_{l\in\mathcal{K}} z_l \boldsymbol{D}_l\right)(x+t)\right] dt$$