

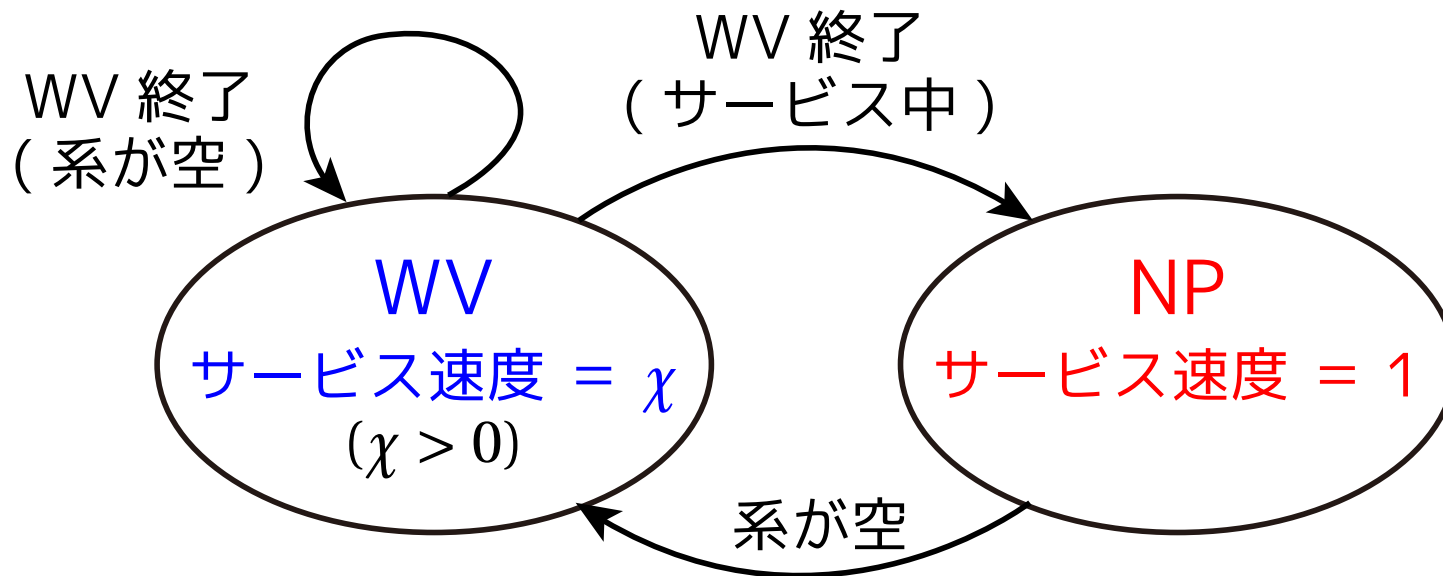
Working Vacation をもつ MAP/G/1 待ち行列の系内仕事量分布

*井上 文彰, 滝根 哲哉

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

考察するモデル

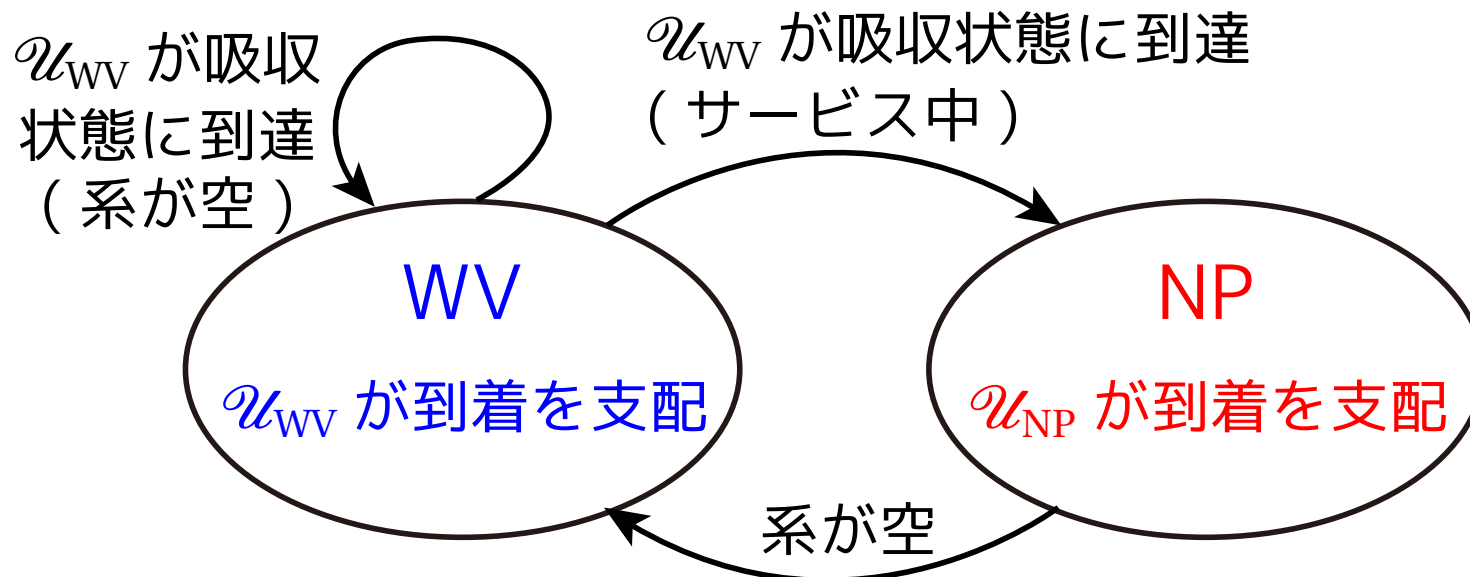
- サーバは χ ($\chi > 0$) と **1** の 2 種類のサービス速度をもつ
 - ◆ Working Vacation (**WV**) : サービス速度が χ である期間
 - ◆ Normal-Service Period (**NP**) : サービス速度が **1** である期間



- 客の到着過程は, **WV** と **NP** で異なる
背後マルコフ連鎖に支配される MAP

背後マルコフ連鎖 \mathcal{U}_{WV} と \mathcal{U}_{NP}

- \mathcal{U}_{WV} : 連続時間有限状態吸収マルコフ連鎖
 - ◆ WV における客の到着過程 と WV の終了 を支配
- \mathcal{U}_{NP} : 既約な連続時間有限状態マルコフ連鎖
 - ◆ NP における客の到着過程 を支配



系の背後状態

$\mathcal{M}_{WV} = \{1, 2, \dots, M_{WV}\}$: \mathcal{U}_{WV} の状態空間から全ての吸収状態を除いて得られる部分状態空間

$\mathcal{M}_{NP} = \{1, 2, \dots, M_{NP}\}$: \mathcal{U}_{NP} の状態空間

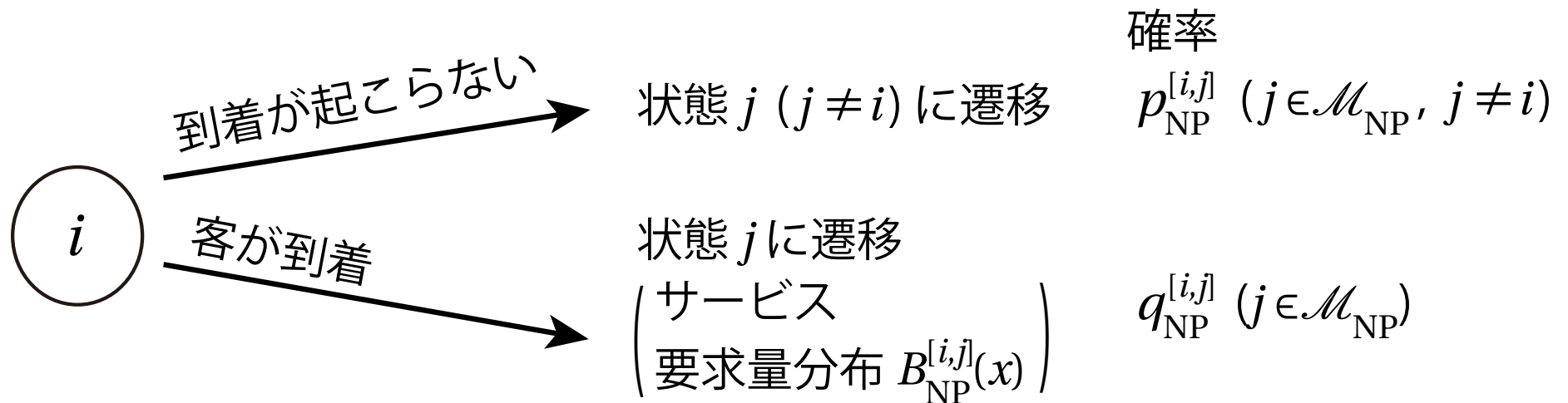
- ある時刻における系の背後状態を, 次の二つ組で定義
 - ◆ その時刻が属する期間 (**WV** または **NP**)
 - ◆ その時刻に到着を支配する背後マルコフ連鎖の状態
- \mathcal{M} : 系の背後状態全体がなす集合

$$\mathcal{M} = \{(\mathbf{WV}, 1), (\mathbf{WV}, 2), \dots, (\mathbf{WV}, M_{WV}), (\mathbf{NP}, 1), (\mathbf{NP}, 2), \dots, (\mathbf{NP}, M_{NP})\}$$

NP における背後マルコフ連鎖 \mathcal{U}_{NP}

- 状態 i ($i \in \mathcal{M}_{NP}$) に平均 $1/\sigma_{NP}^{[i]}$ の指数分布に従う時間だけ滞在

- ◆ 状態 i での滞在が終了すると下図のように遷移



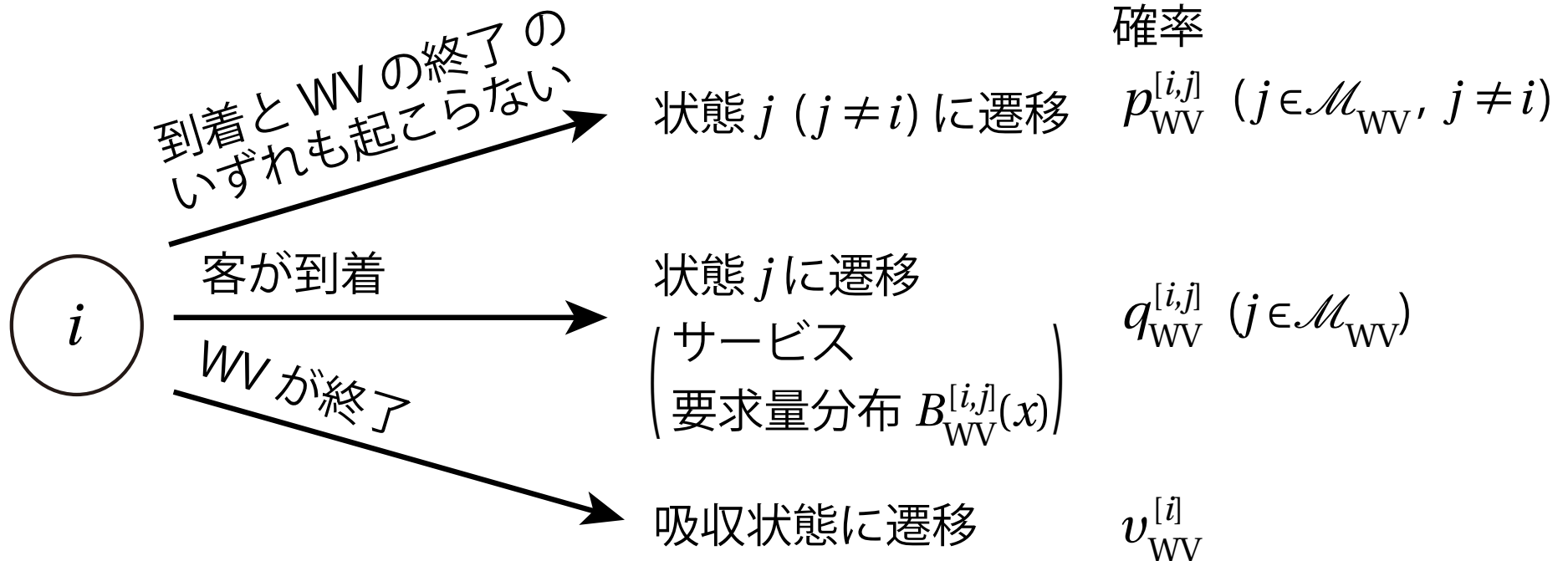
- 系が空になると, **NP** から **WV** への遷移が発生

- ◆ $M_{NP} \times M_{WV}$ の遷移確率行列 $\Psi_{NP,WV}$ に従って背後状態は遷移

$[\Psi_{NP,WV}]_{i,j}$: (**NP**, i) であるときに系が空になったという条件の下で背後状態が (**WV**, j) に遷移する確率

WV における背後マルコフ連鎖 \mathcal{U}_{WV} (1)

- 状態 i ($i \in \mathcal{M}_{WV}$) に平均 $1/\sigma_{WV}^{[i]}$ の指数分布に従う時間だけ滞在
 - ◆ 状態 i での滞在が終了すると下図のように遷移



WV における背後マルコフ連鎖 \mathcal{U}_{WV} (2)

状態 i での滞在終了時に吸収状態に到達すると,

- 客がサービス中のとき

- ◆ 確率 $v_{WV, NP}^{[j|i]}$ ($j \in \mathcal{M}_{NP}$) で系の背後状態は (NP, j) へ遷移

- 系が空であるとき

- ◆ 確率 $\sum_{j' \in \mathcal{M}_{NP}} v_{WV, NP}^{[j'|i]} [\Psi_{NP, WV}]_{j', j}$ ($j \in \mathcal{M}_{WV}$) で

系の背後状態は (WV, j) へ遷移

行列を用いた背後マルコフ連鎖の表現 (1)

- \mathcal{U}_{WV} の挙動を, $M_{WV} \times M_{WV}$ 行列 \mathbf{C}_{WV} と $\mathbf{D}_{WV}(x)$ ($x > 0$)
ならびに $M_{WV} \times M_{NP}$ 行列 $\mathbf{Y}_{WV, NP}$ を用いて表現

$$[\mathbf{C}_{WV}]_{i,j} = \begin{cases} -\sigma_{WV}^{[i]}, & i = j \\ \sigma_{WV}^{[i]} p_{WV}^{[i,j]}, & i \neq j \end{cases}$$

$\sigma_{WV}^{[i]}$: 状態 i から遷移する率
客の到着, WV の終了を伴わずに状態 i から j へ遷移する率

$$[\mathbf{D}_{WV}(x)]_{i,j} = \sigma_{WV}^{[i]} q_{WV}^{[i,j]} B_{WV}^{[i,j]}(x)$$

サービス要求量が x 以下
である客の到着を伴って
状態 i から j へ遷移する率

$$[\mathbf{Y}_{WV, NP}]_{i,j} = \sigma_{WV}^{[i]} v_{WV}^{[i]} v_{WV, NP}^{[j|i]}$$

吸収状態へ到達して WV が終了し
状態 j ($j \in \mathcal{M}_{NP}$) へ遷移する率

行列を用いた背後マルコフ連鎖の表現 (2)

- \mathcal{U}_{NP} の挙動を, $M_{\text{NP}} \times M_{\text{NP}}$ 行列
 \mathbf{C}_{NP} および $\mathbf{D}_{\text{NP}}(x)$ ($x > 0$) を用いて表現

$$[\mathbf{C}_{\text{NP}}]_{i,j} = \begin{cases} -\sigma_{\text{NP}}^{[i]}, & i = j & \sigma_{\text{NP}}^{[i]} : \text{状態 } i \text{ から遷移する率} \\ \sigma_{\text{NP}}^{[i]} p_{\text{NP}}^{[i,j]}, & i \neq j & \begin{array}{l} \text{客の到着を伴わずに} \\ \text{状態 } i \text{ から } j \text{ へ遷移する率} \end{array} \end{cases}$$

$$[\mathbf{D}_{\text{NP}}(x)]_{i,j} = \sigma_{\text{NP}}^{[i]} q_{\text{NP}}^{[i,j]} B_{\text{NP}}^{[i,j]}(x)$$

サービス要求量が x 以下
である客の到着を伴って
状態 i から j へ遷移する率

系の安定性

$$\mathbf{D}_{WV} = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{D}_{WV}(x), \quad \mathbf{D}_{NP} = \lim_{x \rightarrow \infty} \mathbf{D}_{NP}(x)$$

$$\mathbf{D}_{WV}^*(s) : \mathbf{D}_{WV}(x) \text{ の LST}, \quad \mathbf{D}_{NP}^*(s) : \mathbf{D}_{NP}(x) \text{ の LST}$$

- \mathcal{M}_{WV} に属する各状態は互いに到達可能であると仮定
 - ➔ 過渡的なマルコフ連鎖の生成作用素 $\mathbf{C}_{WV} + \mathbf{D}_{WV}$ は既約
- $\mathbf{D}_{WV} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{Y}_{WV, NP} \neq \mathbf{0}$ および $\bar{\boldsymbol{\pi}}_{NP} \int_0^{\infty} x d\mathbf{D}_{NP}(x) \mathbf{e}_{NP} < 1$ を仮定
 - ◆ $\bar{\boldsymbol{\pi}}_{NP} : \mathbf{C}_{NP} + \mathbf{D}_{NP}$ の不変確率ベクトル
 - ◆ $\mathbf{e}_{NP} : \text{全ての要素が } 1 \text{ である } M_{NP} \times 1 \text{ ベクトル}$
(\mathbf{e}_{WV} も同様に定義)
- これらの仮定が満たされるとき、系は安定であることが示される

系内仕事量分布の定義

U_{WV} : 定常状態において WV にあるという条件下での系内仕事量
 S_{WV} : 定常状態において WV にあるという条件下での \mathcal{U}_{WV} の状態
 U_{NP} : 定常状態において NP にあるという条件下での系内仕事量
 S_{NP} : 定常状態において NP にあるという条件下での \mathcal{U}_{NP} の状態

- $\mathbf{u}_{WV}(x)$: WV における系内仕事量分布を表す $1 \times M_{WV}$ ベクトル

$$[\mathbf{u}_{WV}(x)]_j = \Pr(U_{WV} \leq x, S_{WV} = j \mid WV)$$

- $\mathbf{u}_{NP}(x)$: NP における系内仕事量分布を表す $1 \times M_{NP}$ ベクトル

$$[\mathbf{u}_{NP}(x)]_j = \Pr(U_{NP} \leq x, S_{NP} = j \mid NP)$$

- $\mathbf{u}_{WV}^*(s)$: $\mathbf{u}_{WV}(x)$ の LST, $\mathbf{u}_{NP}^*(s)$: $\mathbf{u}_{NP}(x)$ の LST

- $\Pr(WV)$: サーバが WV にある確率, $\Pr(NP) = 1 - \Pr(WV)$

発表の概要

- Working Vacation をもつ MAP/G/1 の系内仕事量分布を考察
 - ◆ $u_{WV}^*(s)$, $u_{NP}^*(s)$, および $\Pr(WV)$ を導出
- 最初に, このモデルの解析はサービス速度が常に一定 ($\chi = 1$) である場合の解析に帰着されることを示す

次に, $\chi = 1$ の場合に対して

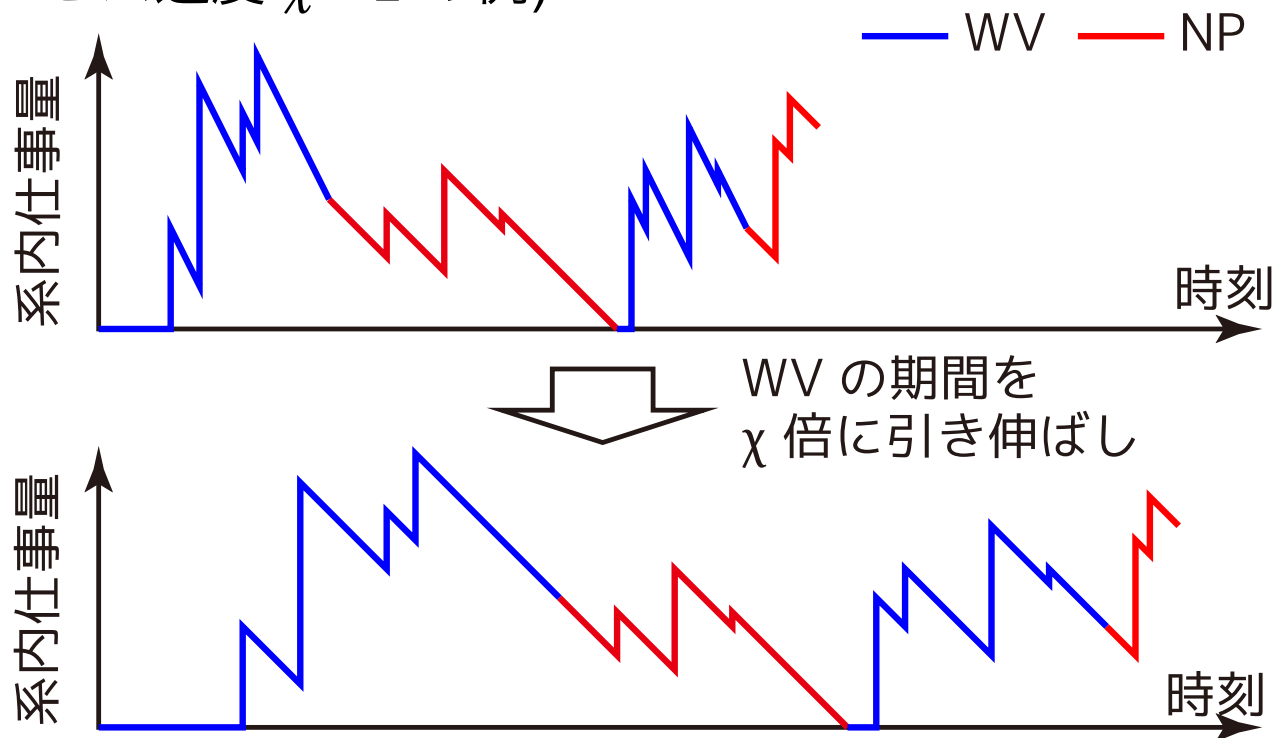
- $u_{WV}^*(s)$ を, Disaster が起こる MAP/G/1 に対する解析結果 [井上, 滝根 (2012)] を用いて導出
 - ◆ その結果をもとに $u_{NP}^*(s)$ と $\Pr(WV)$ を導出

サービス速度が常に一定であるモデルと、
WV と NP で異なるモデルとの関係

時間軸の引き伸ばし

- WV にある期間の時間軸を χ 倍に引き伸ばした新しいモデル
 - ◆ サービス速度は常に 1
 - ◆ u_{WV} が遷移する速さは元のモデルの $1/\chi$

(WV でのサービス速度 $\chi = 2$ の例)



時間軸の引き伸ばし

- WV にある期間の時間軸を χ 倍に引き伸ばした新しいモデル
 - ◆ サービス速度は常に 1
 - ◆ \mathcal{U}_{WV} が遷移する速さは元のモデルの $1/\chi$
 - ➡ 元のモデルの \mathbf{C}_{WV} , $\mathbf{D}_{WV}(x)$, $\mathbf{Y}_{WV, NP}$ をそれぞれ
 - ◆ $\mathbf{C}_{WV}^{\text{new}} = \mathbf{C}_{WV}/\chi$, $\mathbf{D}_{WV}^{\text{new}}(x) = \mathbf{D}_{WV}(x)/\chi$, $\mathbf{Y}_{WV}^{\text{new}} = \mathbf{Y}_{WV}/\chi$で置き換え, $\chi^{\text{new}} = 1$ としたモデルに等しい
- (new をつけることにより, 新しいモデルの量であることを表す)

元のモデルと新しいモデルの関係 [Takine (2005)]

- サーバが WV (あるいは NP) にあるという条件下における時間平均量は一致
 - ◆ 特に, $\mathbf{u}_{WV}(x) = \mathbf{u}_{WV}^{\text{new}}(x)$ および $\mathbf{u}_{NP}(x) = \mathbf{u}_{NP}^{\text{new}}(x)$ が成立
- 何らかの事象が発生する時点での事象平均量は一致 (WV が終了する時点など)
- サーバが WV にある確率に関して次式が成立

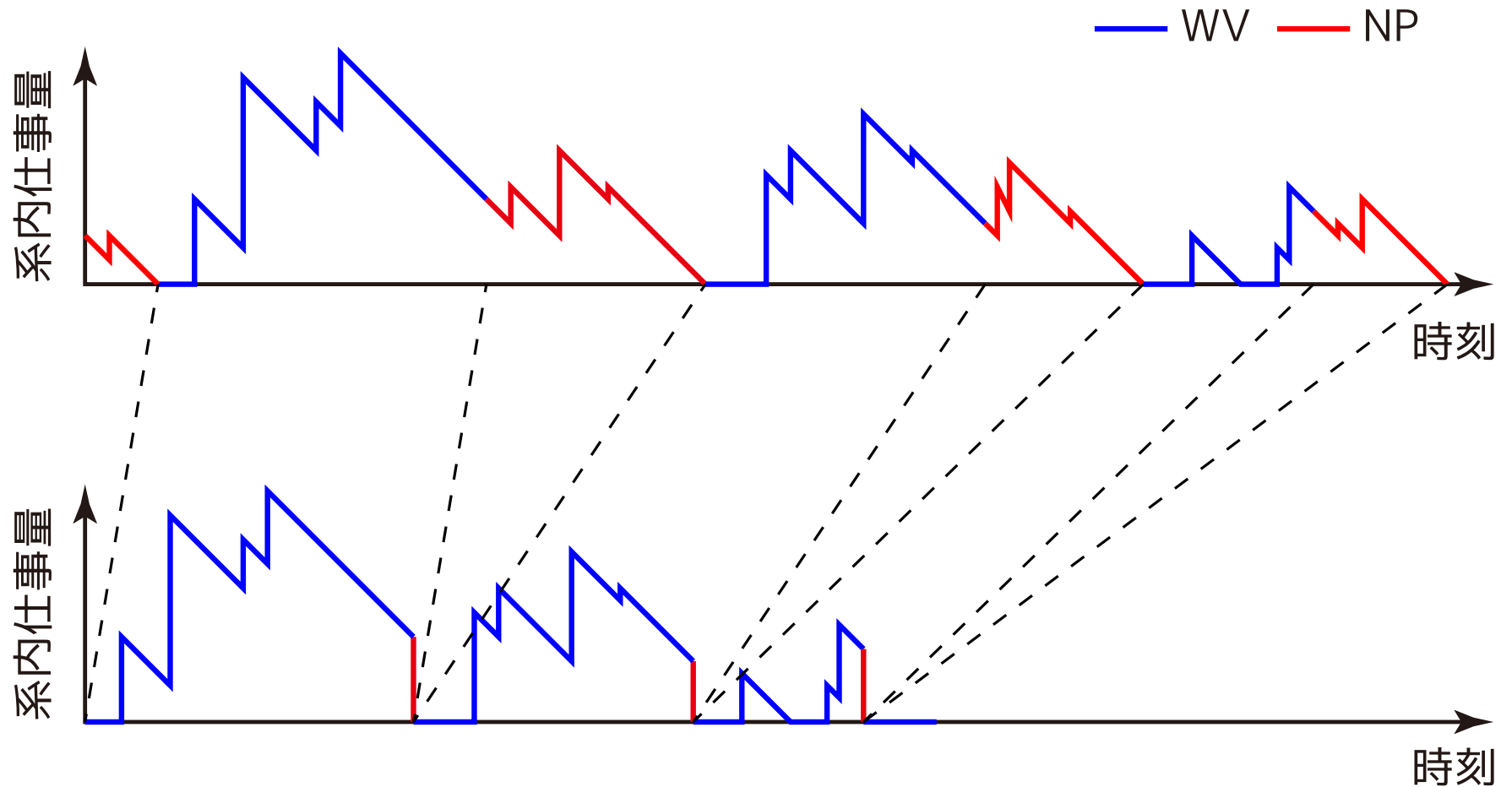
$$\Pr(WV) = \frac{\Pr(WV^{\text{new}})}{\Pr(WV^{\text{new}}) + \chi \Pr(NP^{\text{new}})}$$

- ➡ 系内仕事量分布の解析は, $\chi = 1$ のモデルの解析に帰着される
- 以降では, $\chi = 1$ の場合に限って解析を行う

WVにおける系内仕事量分布

WVにおける系内仕事量過程

- Disaster が起こる待ち行列の系内仕事量過程と等価



WVにおける系内仕事量過程

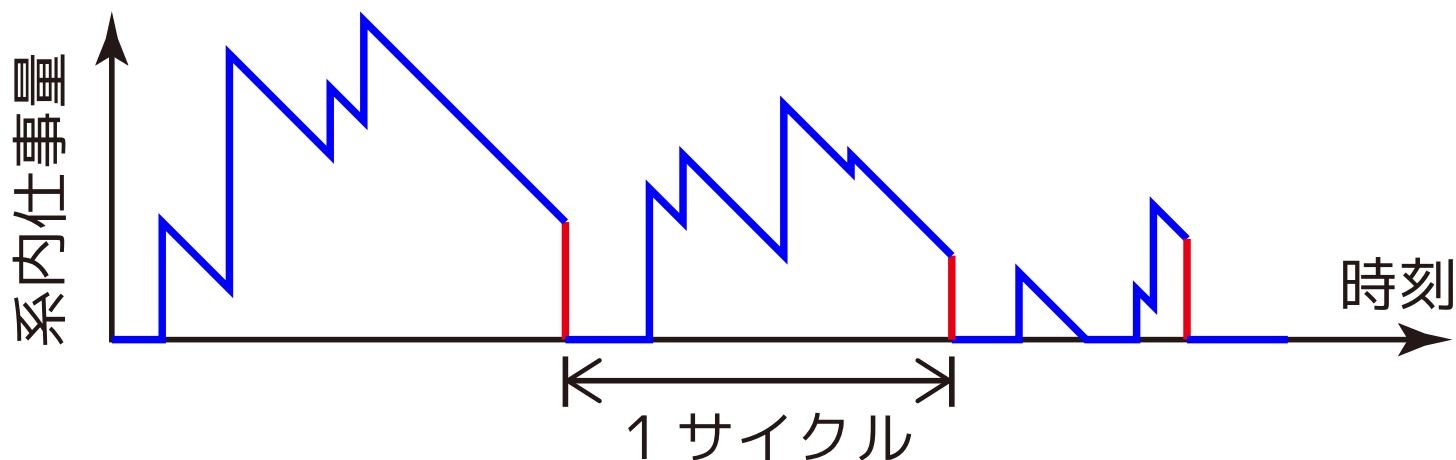
- Disaster が起こる待ち行列の系内仕事量過程と等価
- C_{WV} , $D_{WV}(x)$, $\hat{\Gamma}_{WV}(x)$ によって特徴づけられる
 - ◆ C_{WV} : 客の到着と disaster のいずれも発生しないときの無限小生成作用素
 - ◆ $D_{WV}(x)$: サービス要求量が x 以下の客の到着が発生するときの遷移率行列
 - ◆ $\hat{\Gamma}_{WV}(x) = \Upsilon_{WV, NP} \exp(Q_{NP}x) \Psi_{NP, WV}$
: 系内仕事量が x であるという条件下において disaster が発生するときの遷移率行列

$\exp(Q_{NP}x)$: NP において系内仕事量が x である時点から, その後初めて系が空になるまでの \mathcal{U}_{NP} の状態遷移を表す遷移確率行列

Q_{NP} は数値的に求められる

$\hat{\Gamma}_{WV}(x)$ の置き換え (1)

- [井上, 滝根 (2012)] では, $\hat{\Gamma}_{WV}(x)$ が x によらず一定である場合の解析結果が得られている
 - ◆ 以下のようにして, この結果を今のモデルに適用する
- disaster の発生直後から, 次の disaster の発生直後までの時間間隔として定義されるサイクルを考える



$\hat{\Gamma}_{WV}(x)$ の置き換え (1)

- [井上, 滝根 (2012)] では, $\hat{\Gamma}_{WV}(x)$ が x によらず一定である場合の解析結果が得られている
 - ◆ 以下のようにして, この結果を今のモデルに適用する
 - disaster の発生直後から, 次の disaster の発生直後までの時間間隔として定義されるサイクルを考える
 - 一つのサイクルの間の系内仕事量過程の振る舞い
 - ◆ サイクルの開始時点での \mathcal{U}_{WV} の状態によって完全に定まる
- ➔ η_{WV}^B : Disaster 発生直後 (WV 終了直後) における \mathcal{U}_{WV} の定常状態確率ベクトル
- が等しければ, $\hat{\Gamma}_{WV}(x)$ を置き換えても系内仕事量分布は同じ

$\hat{\Gamma}_{WV}(x)$ の置き換え (2)

- η_{WV}^B : Disaster 発生直後 (WV 終了直後) における \mathcal{U}_{WV} の定常状態確率ベクトル
が等しければ, $\hat{\Gamma}_{WV}(x)$ を置き換えても系内仕事量分布は同じ
- Disaster が発生するときの遷移率行列 Γ_{WV} が x によらず

$$\Gamma_{WV} = \Upsilon_{WV, NP} e_{NP} \eta_{WV}^B$$

となる新しい系内仕事量過程を考える

- ◆ disaster が発生すると状態がリセットされ, 元のモデルの分布 η_{WV}^B に従って状態が決め直される

➔ $u_{WV}(x)$ は C_{WV} , $D_{WV}(x)$, Γ_{WV} で特徴付けられる disaster をもつ MAP/G/1 の系内仕事量分布に等しい

WVにおける系内仕事量分布のLST $\mathbf{u}_{WV}^*(s)$

- 次の二つの式が成り立つ [井上, 滝根 (2012)]

$$\mathbf{u}_{WV}^*(s)[s\mathbf{I}_{WV} + \mathbf{C}_{WV} + \mathbf{D}_{WV}^*(s)] = s\mathbf{u}_{WV}(0) - \boldsymbol{\pi}_{WV}\boldsymbol{\Gamma}_{WV}$$

$$\mathbf{u}_{WV}^*(s) = \mathbf{u}_{WV}(0)[\mathbf{I}_{WV} - \mathbf{R}_{WV}^*(s)]^{-1}$$

ただし, \mathbf{I}_{WV} は $M_{WV} \times M_{WV}$ の単位行列を表し,

◆ $\boldsymbol{\pi}_{WV}$: $\mathbf{C}_{WV} + \mathbf{D}_{WV} + \boldsymbol{\Gamma}_{WV}$ の不変確率ベクトル

◆ $\mathbf{R}^*(s) = \int_0^\infty \exp(-sx) dx \int_x^\infty d\mathbf{D}(x) \exp(\mathbf{Q}_{WV,N}(y-x))$

◆ $\mathbf{Q}_{WV,N}$ は次の漸化式で定義される $\mathbf{Q}_{WV,N}^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots$) の極限

$$\begin{aligned} \blacksquare \mathbf{Q}_{WV,N}^{(0)} &= \mathbf{C}_{WV}, \quad \mathbf{Q}_{WV,N}^{(n)} = \mathbf{C}_{WV} + \int_0^\infty d\mathbf{D}_{WV}(y) \exp(\mathbf{Q}_{WV,N}^{(n-1)}y) \\ &\quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

WVにおける系内仕事量分布のLST $\mathbf{u}_{WV}^*(s)$

- 次の二つの式が成り立つ [井上, 滝根 (2012)]

$$\mathbf{u}_{WV}^*(s)[s\mathbf{I}_{WV} + \mathbf{C}_{WV} + \mathbf{D}_{WV}^*(s)] = s\mathbf{u}_{WV}(0) - \boldsymbol{\pi}_{WV}\boldsymbol{\Gamma}_{WV}$$

$$\mathbf{u}_{WV}^*(s) = \mathbf{u}_{WV}(0)[\mathbf{I}_{WV} - \mathbf{R}_{WV}^*(s)]^{-1}$$

- $\boldsymbol{\pi}_{WV}$ は $\boldsymbol{\eta}_{WV}^B$ を用いて次式で与えられる

$$\boldsymbol{\pi}_{WV} = \frac{\boldsymbol{\eta}_{WV}^B [-(\mathbf{C}_{WV} + \mathbf{D}_{WV})]^{-1}}{\boldsymbol{\eta}_{WV}^B [-(\mathbf{C}_{WV} + \mathbf{D}_{WV})]^{-1} \mathbf{e}_{WV}}$$

- $\mathbf{u}_{WV}(0)$ は次式で与えられる

$$\mathbf{u}_{WV}(0) = \boldsymbol{\pi}_{WV} [-(\mathbf{C}_{WV} + \mathbf{D}_{WV})] (-\mathbf{Q}_{WV,N})^{-1}$$

- ➔ あとは, $\boldsymbol{\eta}_{WV}^B$ が求められれば $\mathbf{u}_{WV}^*(s)$ が得られる

$\eta_{\text{WV}}^{\text{B}}$ の導出

θ : \mathbf{C}_{WV} と \mathbf{C}_{NP} の対角要素の中で最大の絶対値

- $\mathbf{u}_{\text{WV}}^{(m)}(\theta)$ ($m = 0, 1, \dots$) を次式で定義する

- ◆
$$\mathbf{u}_{\text{WV}}^{(m)}(\theta) = \int_0^\infty \exp(-\theta x) \frac{(\theta x)^m}{m!} d\mathbf{u}_{\text{WV}}(x)$$

- $\hat{\mathbf{k}}_{\text{WV}} = \frac{\mathbf{u}_{\text{WV}}^{(0)}(\theta)}{\mathbf{u}_{\text{WV}}^{(0)}(\theta) \mathbf{e}_{\text{WV}}}$ とすると, 次式が成立することが示される

- ◆
$$\eta_{\text{WV}}^{\text{B}} = \frac{\hat{\mathbf{k}}_{\text{WV}}[\mathbf{I} - \mathbf{R}^*(\theta)](-\mathbf{Q}_{\text{WV},\text{N}})}{\hat{\mathbf{k}}_{\text{WV}}[\mathbf{I} - \mathbf{R}^*(\theta)](-\mathbf{Q}_{\text{WV},\text{N}}) \mathbf{e}_{\text{WV}}}$$

$u_{\text{WV}}^{(0)}(\theta)$ の導出

- $u_{\text{WV}}^{(m)}(\theta)$ ($m = 0, 1, \dots$) は遷移確率行列 T をもつマルコフ連鎖の定常分布に等しいことが示される

$$\blacklozenge T = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1 + \mathbf{E}_0 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{A}_3 & \cdots \\ \mathbf{A}_0 + \mathbf{E}_1 & \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots \\ \mathbf{E}_2 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{A}_1 & \cdots \\ \mathbf{E}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{A}_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\blacklozenge \mathbf{A}_0 = \mathbf{I} + \theta^{-1} \mathbf{C} + \theta^{-1} \mathbf{D}_{\text{WV}}^{(0)}(\theta), \quad \mathbf{A}_m = \theta^{-1} \mathbf{D}_{\text{WV}}^{(m)}(\theta), \quad m = 1, 2, \dots$$

$$\blacksquare \mathbf{D}_{\text{WV}}^{(m)}(\theta) = \int_0^\infty \exp(-\theta x) \frac{(\theta x)^m}{m!} d\mathbf{D}_{\text{WV}}(x)$$

$$\blacklozenge \mathbf{E}_m = \theta^{-1} \mathbf{Y}_{\text{WV, NP}} (\mathbf{I}_{\text{NP}} + \theta^{-1} \mathbf{Q}_{\text{NP}})^m \mathbf{\Psi}_{\text{NP, WV}}$$

- このことを利用すると, $u_{\text{WV}}^{(0)}(\theta)$ が求められる

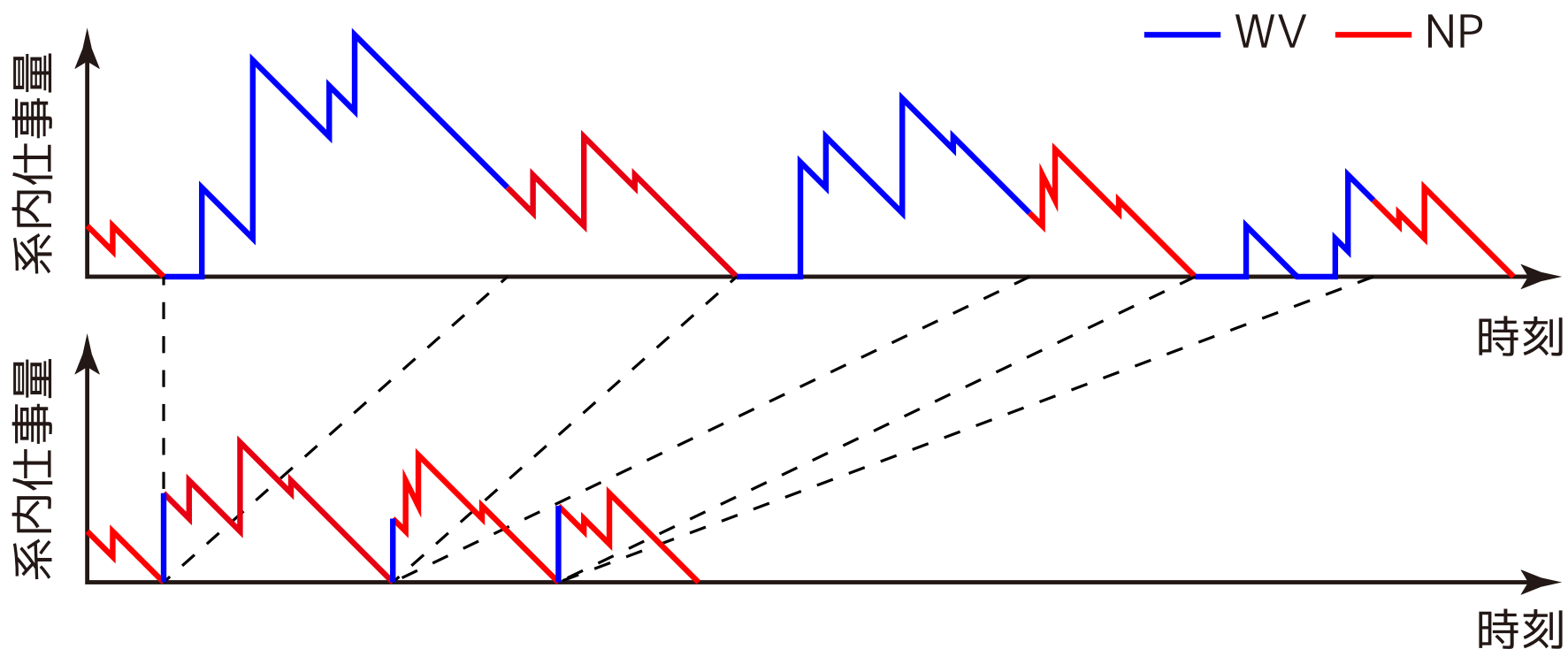
NPにおける系内仕事量分布

NP における系内仕事量過程

U_{NP}^B : NP 開始時点における系内仕事量

S_{NP}^B : NP 開始時点における \mathcal{U}_{NP} の状態

- 系が空になった瞬間, 系内仕事量は U_{NP}^B へ不連続に増加し, \mathcal{U}_{NP} の状態は S_{NP}^B に遷移



NP における系内仕事量過程

- 系が空になった瞬間，系内仕事量は U_{NP}^{B} へ不連続に増加し， \mathcal{U}_{NP} の状態は S_{NP}^{B} に遷移
- $\mathbf{u}_{\text{NP}}^{\text{B}}(x)$: NP 開始時点の系内仕事量分布を表す $1 \times M_{\text{NP}}$ ベクトル
 - $[\mathbf{u}_{\text{NP}}^{\text{B}}(x)]_j = \Pr(U_{\text{NP}}^{\text{B}} \leq x, S_{\text{NP}}^{\text{B}} = j)$
 - ◆ $\mathbf{u}_{\text{NP},\text{B}}^*(s)$: $\mathbf{u}_{\text{NP}}^{\text{B}}(x)$ の LST
- 系が空になると状態がリセットされ， $\mathbf{u}_{\text{NP}}^{\text{B}}(x)$ に従って次の瞬間の系内仕事量と \mathcal{U}_{NP} の状態が決まる新しい過程を考える
 - ◆ WV のときと同様の議論により，新しい過程の定常分布は $\mathbf{u}_{\text{NP}}(x)$ に等しい

NP における系内仕事量分布の LST $\mathbf{u}_{\text{NP}}^*(s)$

- [Takine (1996)] より, $\mathbf{u}_{\text{NP}}^*(s)$ は次式で与えられる

$$\mathbf{u}_{\text{NP}}^*(s)[s\mathbf{I}_{\text{NP}} + \mathbf{C}_{\text{NP}} + \mathbf{D}_{\text{NP}}^*(s)] = c\boldsymbol{\eta}_{\text{NP}}^{\text{E}}[\mathbf{I}_{\text{NP}} - \mathbf{e}_{\text{NP}}\mathbf{u}_{\text{NP,B}}^*(s)]$$

ただし,

$$\blacklozenge \mathbf{u}_{\text{NP,B}}^*(s) = \frac{(\mathbf{u}_{\text{WV}}^*(s) - \mathbf{u}_{\text{WV}}(0))\boldsymbol{\Upsilon}_{\text{WV, NP}}}{(\mathbf{u}_{\text{WV}}^*(s) - \mathbf{u}_{\text{WV}}(0))\boldsymbol{\Upsilon}_{\text{WV, NP}}\mathbf{e}_{\text{NP}}}$$

- ◆ $\boldsymbol{\eta}_{\text{NP}}^{\text{E}}$: NP 終了直前における \mathcal{U}_{NP} の定常状態確率ベクトル
- ◆ c : NP の平均長の逆数

- $\boldsymbol{\eta}_{\text{NP}}^{\text{E}}$ と c は WV における系内仕事量分布の解析結果を用いて求められる

まとめ

Working Vacation をもつ MAP/G/1 の系内仕事量分布を考察

- 最初に, サービス速度が常に一定 ($\chi = 1$) の場合に限って解析を行えば十分であることを示し, 次に $\chi = 1$ の場合に対して
 - ◆ WV における系内仕事量分布の LST を導出
 - disaster が起こるモデルの結果 [井上, 滝根 (2012)] を利用
 - ◆ NP における系内仕事量分布の LST を導出
 - WV での解析結果と [Takine (1996)] を利用
- サーバが WV にある確率 $\Pr(\text{WV})$ は上記の結果をもとに得られる

$$\Pr(\text{WV}) = \frac{c}{(\boldsymbol{\pi}_{\text{WV}} - \boldsymbol{u}_{\text{WV}}(0)) \boldsymbol{\Upsilon}_{\text{WV, NP}} \boldsymbol{e}_{\text{NP}} + c}$$