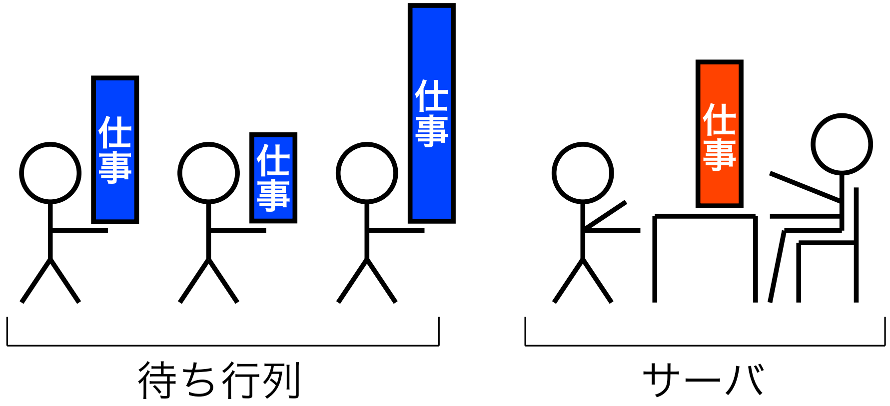
左飛び越しのない連続時間 2 変数マルコフ過程に対する行列解析法の拡張

*井上 文彰，滝根 哲哉

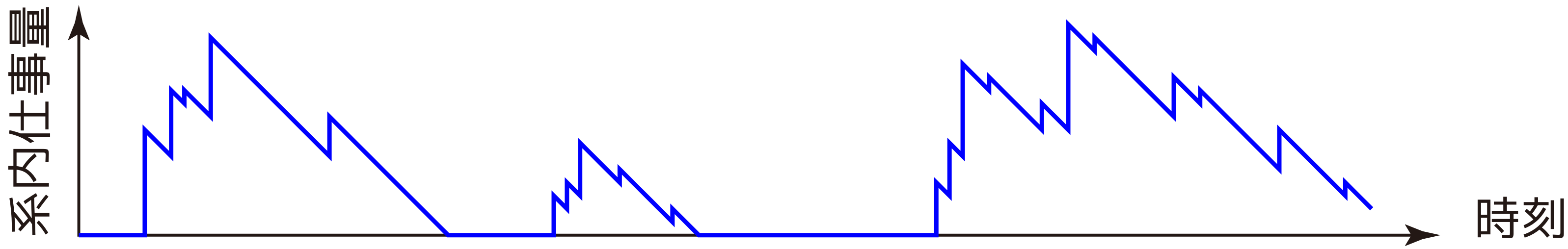
大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

待ち行列の系内仕事量

- 系内仕事量：客の残余サービス要求の総量



- 不連続な変化は上向きジャンプのみ (左飛び越しがない)
  - 客の到着時に，サービス要求量の分だけ増加
  - それ以外の時刻では直線的に減少



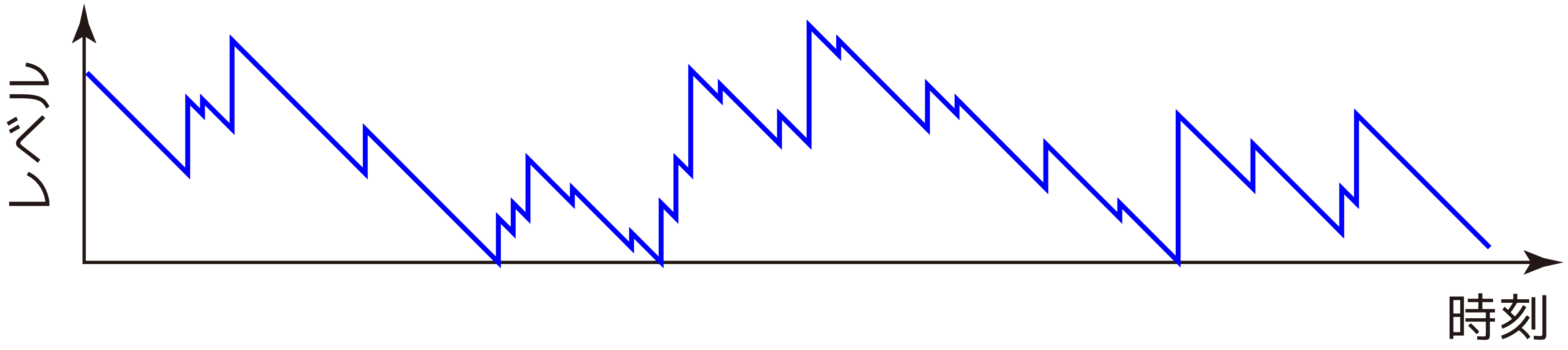
2 変数マルコフ過程によるモデル化

連続時間 2 変数マルコフ過程 $\{(U(t), S(t)); t \ge 0\}$

- $U(t)$: 時刻 t におけるレベル (非負の実数値)
  - 系内仕事量に対応する量
  - $\{U(t); t \ge 0\}$ は左飛び越しのない確率過程
- $S(t)$: 時刻 t における相 (有限の状態空間 $\mathscr{M}$ 上の値)
  - $U(t)$ の挙動を支配する背後状態
    - 上向きジャンプの発生率と大きさ
    - 単位時間当たりの減少速度

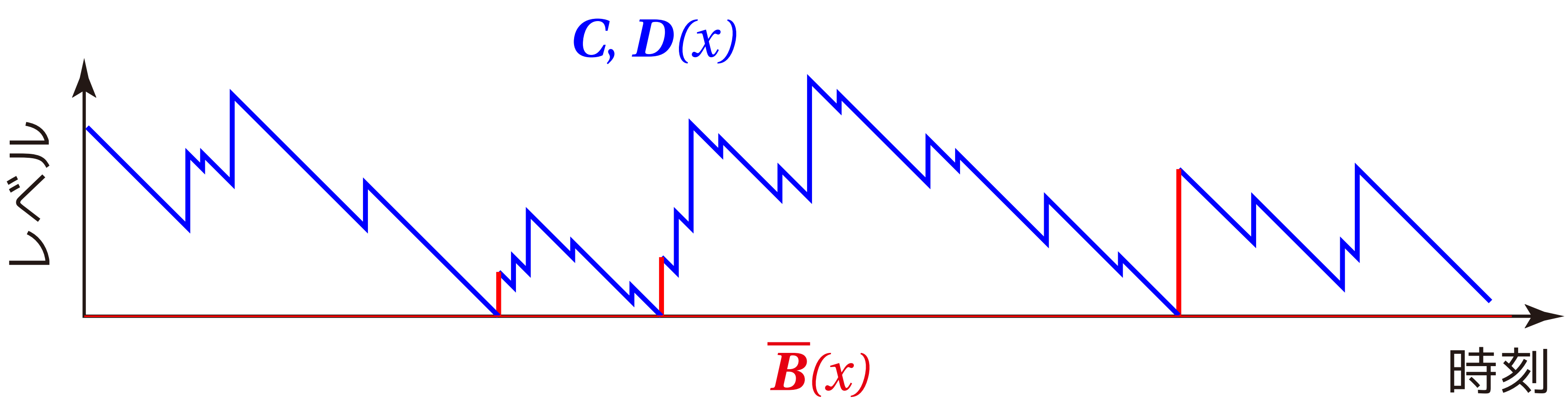
記述の単純化

- 記述を単純にするため，次の 2 点を仮定
  - レベル $U(t)$ が 0 になると即座に上向きジャンプが発生
  - $U(t)$ の減少速度は相 $S(t)$ によらず 1 で一定
    - $S(t)$ によって減少速度が異なるモデルの解析は，
      この単純化されたモデルの解析に帰着可能 [Takine (2005)]



$\{(U(t), S(t));\ t \geq 0\}$ の挙動を表す行列

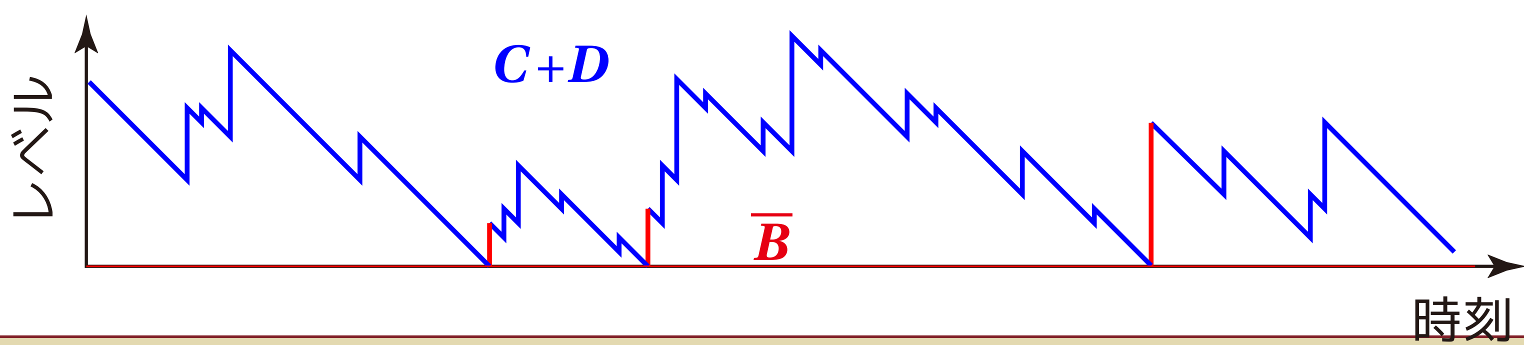
- $U(t) > 0$ における相の遷移
  - 劣無限小生成作用素 $\boldsymbol{C}$ (上向きジャンプを伴わない)
  - 遷移率行列 $\boldsymbol{D}(x)$ (大きさ x 以下の上向きジャンプを伴う)
- $U(t) = 0$ における相の遷移
  - 遷移確率行列 $\overline{\boldsymbol{B}}(x)$ (大きさ x 以下の上向きジャンプを伴う)



本発表の概要

$\boldsymbol{D} \triangleq \lim_{x\to\infty} \boldsymbol{D}(x), \quad \overline{\boldsymbol{B}} \triangleq \lim_{x\to\infty} \overline{\boldsymbol{B}}(x)$ (相の遷移のみに注目)

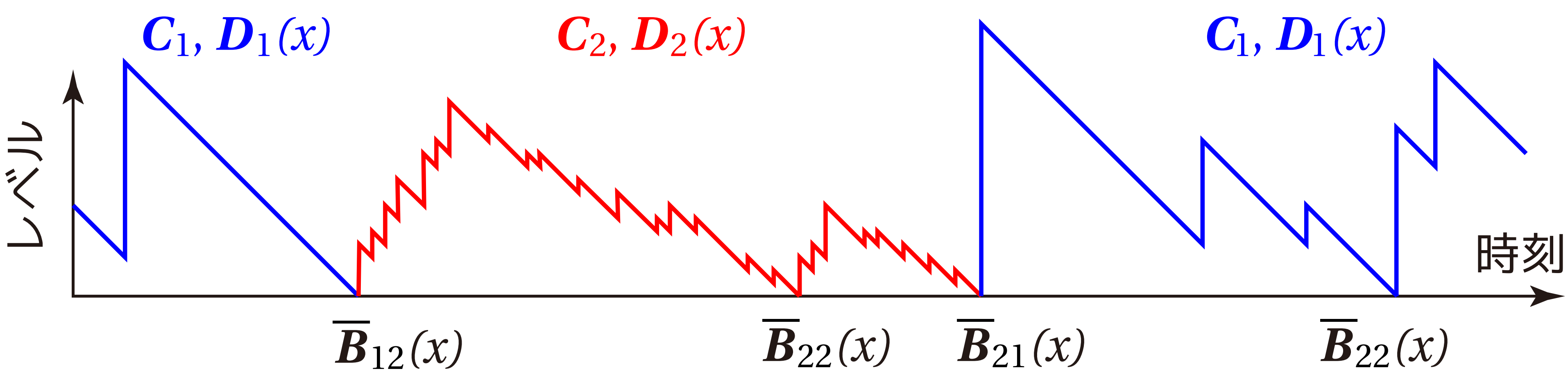
- 先行研究 [Takine (1996)] では， $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ が既約であると仮定
  - $\{(U(t), S(t));\ t \geq 0\}$ が既約であるための必要条件ではない
  - ➡ 解析結果の適用範囲が限定的
- 本発表では， $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ が可約である場合を考察
  - $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ と $\overline{\boldsymbol{B}}$ の遷移によって全ての相が互いに到達可能と仮定
    - $\{(U(t), S(t));\ t \geq 0\}$ が既約となる必要十分条件



$C + D$ が可約な系内仕事量過程の例

- 2 種類の全稼働期間が存在するモデル

$$C + D = \begin{pmatrix} C_1 + D_1 & 0 \\ 0 & C_2 + D_2 \end{pmatrix}, \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{B}_{11} & \overline{B}_{12} \\ \overline{B}_{21} & \overline{B}_{22} \end{pmatrix}$$



モデルの仮定 (1)

- $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ は可約であり，H 種類の既約な状態クラスをもつ

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{C}_{\mathrm{T}} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{T},1} & \boldsymbol{C}_{\mathrm{T},2} & \cdots & \boldsymbol{C}_{\mathrm{T},H} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{C}_H \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{D}_{\mathrm{T}} & \boldsymbol{D}_{\mathrm{T},1} & \boldsymbol{D}_{\mathrm{T},2} & \cdots & \boldsymbol{D}_{\mathrm{T},H} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{D}_H \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{C}_h+\boldsymbol{D}_h$ $(h \in \mathscr{H})$ には不変確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}_h$ が存在
  ($\mathscr{H}=\{1,2,\dots,H\}$: 既約な状態クラスの集合)

以降では，$\boldsymbol{C}$ や $\boldsymbol{D}$ と同様のブロック上三角行列に対し，
各ブロックを下添字 “T”，“T, h”，“h” により表す

モデルの仮定 (2)

$\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{e}_{\mathrm{T},h}$, $\boldsymbol{e}_h$：全ての要素が 1 の列ベクトル

- 無限小生成作用素 $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}+\overline{\boldsymbol{B}}-\boldsymbol{I}$ は既約 ($\boldsymbol{I}$ は単位行列)

  $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ と $\overline{\boldsymbol{B}}$ の遷移によって全ての相が互いに到達可能

- $$\int_0^\infty x d\overline{\boldsymbol{B}}(x)\boldsymbol{e} < \infty, \quad \int_0^\infty x d\boldsymbol{D}_{\mathrm{T}}(x)\boldsymbol{e}_{\mathrm{T}} + \sum_{h\in\mathscr{H}} \int_0^\infty x d\boldsymbol{D}_{\mathrm{T},h}(x)\boldsymbol{e}_{\mathrm{T},h} < \infty$$

  $\Leftrightarrow$ レベル 0 と過渡的な相での平均上向きジャンプサイズは有限

- $$\boldsymbol{\pi}_h \int_0^\infty x d\boldsymbol{D}_h(x) < 1, \quad h \in \mathscr{H}$$

  $\Leftrightarrow$ 既約なクラスに属する相でのドリフトは負

これらは，$\{(U(t), S(t));\, t \geq 0\}$ が既約かつ正再帰的である必要十分条件

$\{(U(t), S(t));\ t \geq 0\}$ の定常分布

定常分布

U : 定常状態におけるレベル，S : 定常状態における相，$\mathbb{1}_{\{\bullet\}}$: 指示関数

- $\boldsymbol{u}^*(s)$: 定常分布の LST を表す行ベクトル

$$[\boldsymbol{u}^*(s)]_j = \mathrm{E}[e^{-sU}\mathbb{1}_{\{S=j\}}]$$

- 確率フローの平衡より，次式が導かれる

$$\boldsymbol{u}^*(s)[s\boldsymbol{I} + \boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}^*(s)] = c\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}[\boldsymbol{I} - \overline{\boldsymbol{B}}^*(s)]$$

  - $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}$: レベルが 0 になる直前の相の定常状態ベクトル
  - c : レベル 0 への平均再帰時間の逆数

この結果は，$\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}$ が既約である場合と変わらない

境界ベクトル $c\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}$

- $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}$ は次式で一意に定められる

$\boxed{\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D} \text{ が既約な場合と同じ}}$

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}} \int_0^\infty d\overline{\boldsymbol{B}}(x) \exp(\boldsymbol{Q}x), \qquad \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{e} = 1$$

  - $\boldsymbol{Q}$：単調増加する行列の列 $\boldsymbol{Q}^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ の極限

$$\boldsymbol{Q}^{(0)} = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{Q}^{(n)} = \boldsymbol{C} + \int_0^\infty d\boldsymbol{D}(x) \exp(\boldsymbol{Q}^{(n-1)}x) \tag{1}$$

- $c = 1\Big/\left(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}} \int_0^\infty d\overline{\boldsymbol{B}}(x) \boldsymbol{f}(x)\right)$ が成立

$\boldsymbol{f}(x)$ の導出において，
既約な $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ との差異
が生じる

  - $\boldsymbol{f}(x)$：レベル 0 への平均初到達時間を表す列ベクトル

$$[\boldsymbol{f}(x)]_i = \mathrm{E}\left[\text{初到達時間} \mid \text{開始時にレベル} = x,\ \text{相} = i\right]$$

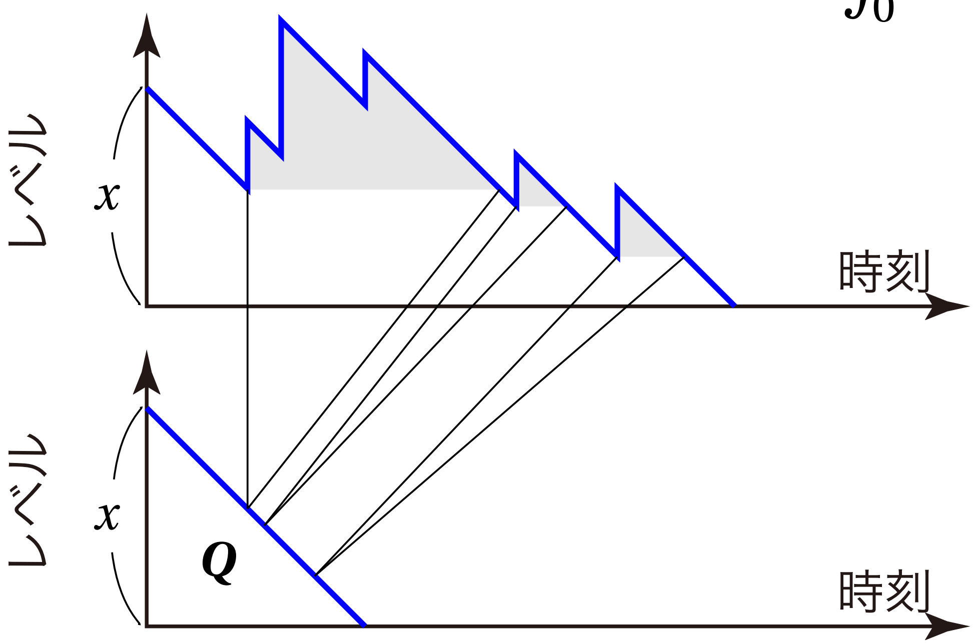
境界ベクトル $c\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}$

- $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}$ は次式で一意に定められる　　$\boxed{\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}\text{ が既約な場合と同じ}}$

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}} \int_0^\infty d\overline{\boldsymbol{B}}(x) \exp(\boldsymbol{Q}x), \qquad \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{e} = 1$$

- $\boldsymbol{Q}$：単調増加する行列の列 $\boldsymbol{Q}^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ の極限

$$\boldsymbol{Q}^{(0)} = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{Q}^{(n)} = \boldsymbol{C} + \int_0^\infty d\boldsymbol{D}(x) \exp(\boldsymbol{Q}^{(n-1)}x) \tag{1}$$



$\boldsymbol{Q}$ は左図のように切り出された過程での相の無限小生成作用素

境界ベクトル $c\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}$

- $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}$ は次式で一意に定められる

$\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ が既約な場合と同じ

$$\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}} = \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}} \int_0^{\infty} d\overline{\boldsymbol{B}}(x) \exp(\boldsymbol{Q}x), \qquad \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}}\boldsymbol{e} = 1$$

  - $\boldsymbol{Q}$: 単調増加する行列の列 $\boldsymbol{Q}^{(n)}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ の極限

$$\boldsymbol{Q}^{(0)} = \boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{Q}^{(n)} = \boldsymbol{C} + \int_0^{\infty} d\boldsymbol{D}(x) \exp(\boldsymbol{Q}^{(n-1)}x) \tag{1}$$

- $c = 1\Big/\left(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{E}} \int_0^{\infty} d\overline{\boldsymbol{B}}(x) \boldsymbol{f}(x)\right)$ が成立

$\boldsymbol{f}(x)$ の導出において，既約な $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ との差異が生じる

  - $\boldsymbol{f}(x)$: レベル 0 への平均初到達時間を表す列ベクトル

$$[\boldsymbol{f}(x)]_i = \mathrm{E}\left[\text{初到達時間} \mid \text{開始時にレベル} = x,\ \text{相} = i\right]$$

平均初到達時間 (1)

- $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ の既約性によらず，$\boldsymbol{f}(x)$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{f}(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\boldsymbol{Q}^{n-1}\right)\left(\boldsymbol{I}-\int_0^{\infty}d\boldsymbol{D}(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\boldsymbol{Q}^{n-1}\right)^{-1}$$

- $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ が既約である場合
  - $\boldsymbol{Q}$ は既約な無限小生成作用素
    - 不変確率ベクトル $\boldsymbol{\kappa}$ が一意に存在
    - 行列 $\boldsymbol{e}\boldsymbol{\kappa}$ は，$\det(\boldsymbol{e}\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{Q})\neq 0$ かつ $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}\boldsymbol{\kappa}=\boldsymbol{0}$ を満たす

➡ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\boldsymbol{Q}^{n-1}=\left[\boldsymbol{I}-\exp(\boldsymbol{Q}x)+x\boldsymbol{e}\boldsymbol{\kappa}\right](\boldsymbol{e}\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{Q})^{-1}$$

$\boldsymbol{\beta}\triangleq\int_0^{\infty}x\,d\boldsymbol{D}(x)\boldsymbol{e}$ とすると

$$\boxed{\boldsymbol{f}(x)=\left[\boldsymbol{I}-\exp(\boldsymbol{Q}x)+x\boldsymbol{e}\boldsymbol{\kappa}\right]\left[(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\right]^{-1}\boldsymbol{e}}$$

平均初到達時間 (1)

- $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ の既約性によらず，$\boldsymbol{f}(x)$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{f}(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\boldsymbol{Q}^{n-1}\right)\left(\boldsymbol{I}-\int_0^{\infty}d\boldsymbol{D}(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\boldsymbol{Q}^{n-1}\right)^{-1}$$

- $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ が既約である場合
  - $\boldsymbol{Q}$ は既約な無限小生成作用素
    - 不変確率ベクトル $\boldsymbol{\kappa}$ が一意に存在
    - 行列 $\boldsymbol{e\kappa}$ は，$\det(\boldsymbol{e\kappa}-\boldsymbol{Q})\neq 0$ かつ $\boldsymbol{Qe\kappa}=\boldsymbol{0}$ を満たす

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\boldsymbol{Q}^{n-1}=\left[\boldsymbol{I}-\exp(\boldsymbol{Q}x)+x\boldsymbol{e\kappa}\right](\boldsymbol{e\kappa}-\boldsymbol{Q})^{-1}$$

$\boldsymbol{\beta}\triangleq\int_0^{\infty}x\,d\boldsymbol{D}(x)\boldsymbol{e}$ とすると

$$\boxed{\boldsymbol{f}(x)=\left[\boldsymbol{I}-\exp(\boldsymbol{Q}x)+x\boldsymbol{e\kappa}\right]\left[(\boldsymbol{e}-\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\right]^{-1}\boldsymbol{e}}$$

平均初到達時間 (2)

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{T},1} & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{T},2} & \cdots & \boldsymbol{Q}_{\mathrm{T},H} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{Q}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{Q}_H \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ が可約である場合
  - $\boldsymbol{Q}$ は可約な無限小生成作用素

$H \ge 2$ のとき,

- 不変確率ベクトルは無数に存在
- $\boldsymbol{e}\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{Q}$ が逆行列をもつような
  不変確率ベクトル $\boldsymbol{\kappa}$ は存在しない

一方，次式で定義される $\check{\boldsymbol{Q}}$ は $\det(\check{\boldsymbol{Q}} - \boldsymbol{Q}) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{Q}\check{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{0}$ を満たす

$$\check{\boldsymbol{Q}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} & (-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T},1}\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{\kappa}_1 & (-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T},2}\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{\kappa}_2 & \cdots & (-\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T}})^{-1}\boldsymbol{Q}_{\mathrm{T},H}\boldsymbol{e}_H\boldsymbol{\kappa}_H \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_1\boldsymbol{\kappa}_1 & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{e}_2\boldsymbol{\kappa}_2 & \cdots & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{e}_H\boldsymbol{\kappa}_H \end{pmatrix}$$

- $\boldsymbol{\kappa}_h$: $\boldsymbol{Q}_h$ の不変確率ベクトル (一意に定められる)

平均初到達時間 (3)

- $\check{\boldsymbol{Q}}$ は $\det(\check{\boldsymbol{Q}} - \boldsymbol{Q}) \neq 0$ かつ $\boldsymbol{Q}\check{\boldsymbol{Q}} = \boldsymbol{0}$ を満たす
  - ➡ $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \boldsymbol{Q}^{n-1} = \left[\boldsymbol{I} - \exp(\boldsymbol{Q}x) + x\check{\boldsymbol{Q}}\right] (\check{\boldsymbol{Q}} - \boldsymbol{Q})^{-1}$$
- よって， $\boldsymbol{f}(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \boldsymbol{Q}^{n-1}\right) \left(\boldsymbol{I} - \int_0^{\infty} d\boldsymbol{D}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \boldsymbol{Q}^{n-1}\right)^{-1}$ より

$$\boxed{\boldsymbol{f}(x) = \left[\boldsymbol{I} - \exp(\boldsymbol{Q}x) + x\check{\boldsymbol{Q}}\right] (\boldsymbol{\Delta} - \boldsymbol{C} - \boldsymbol{D})^{-1} \boldsymbol{e}}$$

  - ◆ $\boldsymbol{\Delta} \triangleq \check{\boldsymbol{Q}} - \int_0^{\infty} x d\boldsymbol{D}(x) \check{\boldsymbol{Q}}$
- 以上より境界ベクトル $\boldsymbol{c\eta}^{\mathrm{E}}$ が求まり，定常分布の LST を得る

まとめ

左飛び越しのない連続時間 2 変数マルコフ過程の定常分布を考察

- レベルが正である期間の相の生成作用素 $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ が可約と仮定
- $\boldsymbol{e}\boldsymbol{\kappa}-\boldsymbol{Q}$ ($\boldsymbol{\kappa}\ge\boldsymbol{0}$) の形の行列が，$H\ge 2$ のとき逆行列をもたない
  - ◆ レベル 0 への平均初到達時間 $\boldsymbol{f}(x)$ について，
    既約な $\boldsymbol{C}+\boldsymbol{D}$ に対する結果をそのまま適用できない
    - ➡ $\det(\check{\boldsymbol{Q}}-\boldsymbol{Q})\neq 0$ かつ $\boldsymbol{Q}\check{\boldsymbol{Q}}=\boldsymbol{0}$ を満たす $\check{\boldsymbol{Q}}$ を導入
  - ◆ 定常分布のモーメントを導出する際も同様の変更が必要
- $\boldsymbol{Q}$ を (1) 式から計算するのは非効率的
  (最も収束の遅いブロックが $\boldsymbol{Q}^{(n)}$ の収束速度を決める)

$$\boldsymbol{Q}^{(0)}=\boldsymbol{C},\quad \boldsymbol{Q}^{(n)}=\boldsymbol{C}+\int_0^\infty d\boldsymbol{D}(x)\exp(\boldsymbol{Q}^{(n-1)}x) \tag{1}$$

➡ 停止判定を別個に行えるブロックごとの漸化式に書き換え