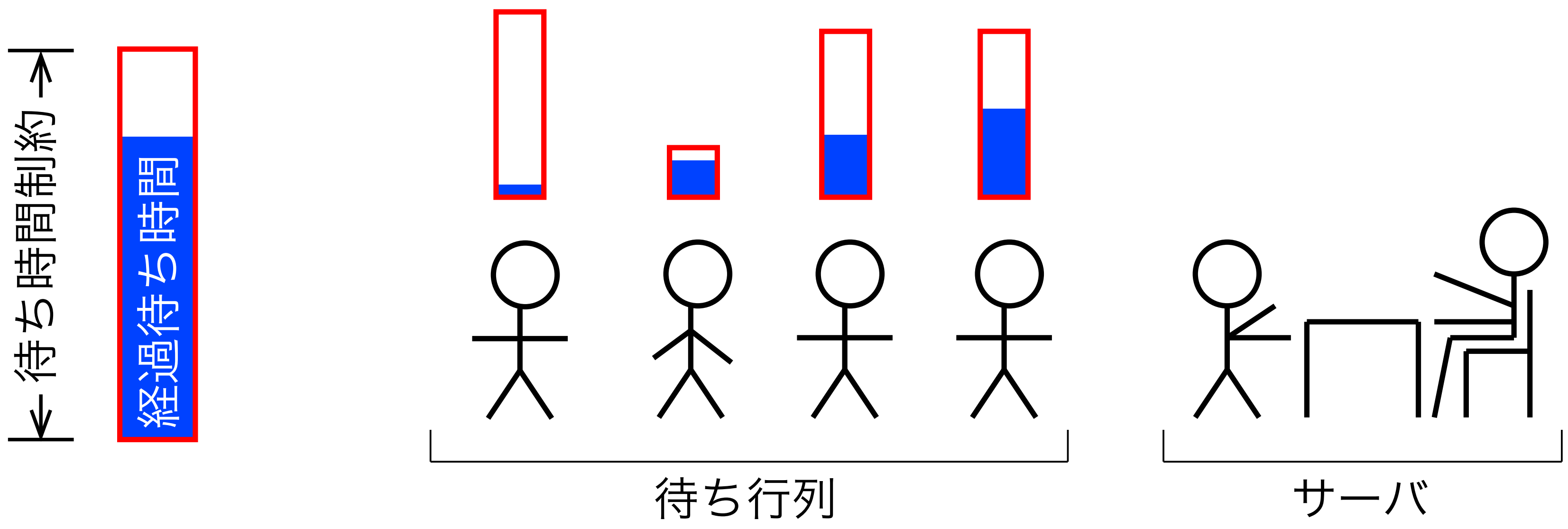
M/G/1+G 待ち行列の仮待ち時間分布について

*井上 文彰, 滝根 哲哉

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

待ち時間制約のある待ち行列モデル

- 待ち時間が長すぎると，客はサービスを受けずに離脱する



- (例) 遅延制約のあるデータ通信，コールセンタ
- ケンドールの記法

A	/	B	/	c	+	W
到着間隔		サービス時間		サーバ数		待ち時間制約

考察するモデル

- 客がポアソン到着する単一サーバモデル (M/G/1+G) を考察
  - 客の到着は率 λ のポアソン過程に従う
  - サービス時間は分布関数 $H(x)$ に従って i.i.d.
  - 待ち時間制約は分布関数 $G(x)$ に従って i.i.d.
    - ただし，確率 $g_\infty \in [0,1)$ で待ち時間制約の無い客が到着

    ➨ $\lim_{x\to\infty} G(x) = 1 - g_\infty$

- 以降では，$\lambda g_\infty \mathrm{E}[H] < 1$ を仮定

  $\boxed{\mathrm{E}[H]\text{：平均サービス時間}}$

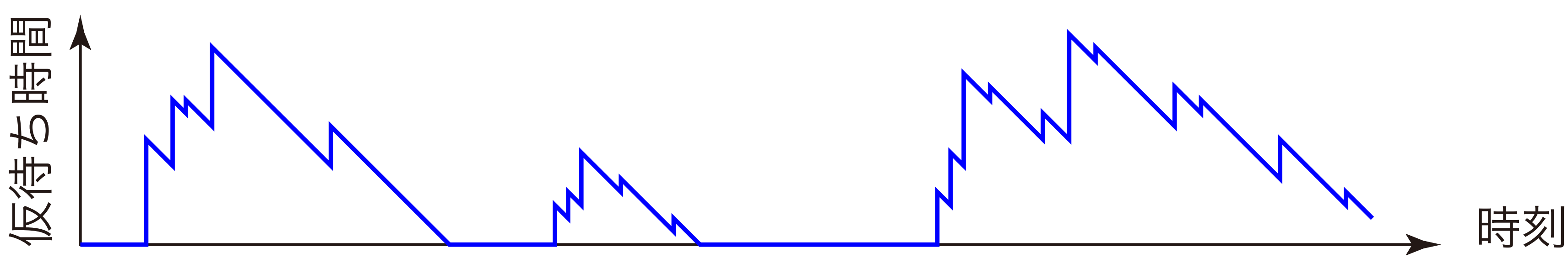
  ➨ 系は安定であり，定常状態が存在 [Baccelli et al. (1984)]

- また，簡単のため $G(0) = 0$，$H(0) = 0$ を仮定

仮待ち時間分布

- 本発表では，M/G/1+G の定常仮待ち時間分布を考察
  - 仮待ち時間：現時点で系内に居る客が，
全て離脱するまでに必要な時間
  - 客の待ち時間は，到着直前における仮待ち時間に等しい

上向きジャンプ発生	⇔	客の到着が発生し，かつ， 待ち時間制約 > 到着直前の仮待ち時間



仮待ち時間分布

- 本発表では，M/G/1+G の定常仮待ち時間分布を考察
  - 仮待ち時間：現時点で系内に居る客が，
全て離脱するまでに必要な時間
  - 客の待ち時間は，到着直前における仮待ち時間に等しい
- 仮待ち時間分布を，π_0 と $v(x)$ $(x > 0)$ により表す
  - π_0 ：系が空である確率
  - $v(x)$: 仮待ち時間分布の密度関数

定義より，$\pi_0 + \int_{0+}^{\infty} v(x)dx = 1$

系が空である確率 π_0

$\rho \triangleq \lambda \mathrm{E}[H]$, P_{loss}：客がサービスを受けずに途中退去する確率

サーバ部分にリトルの公式を適用すると，次のことがわかる

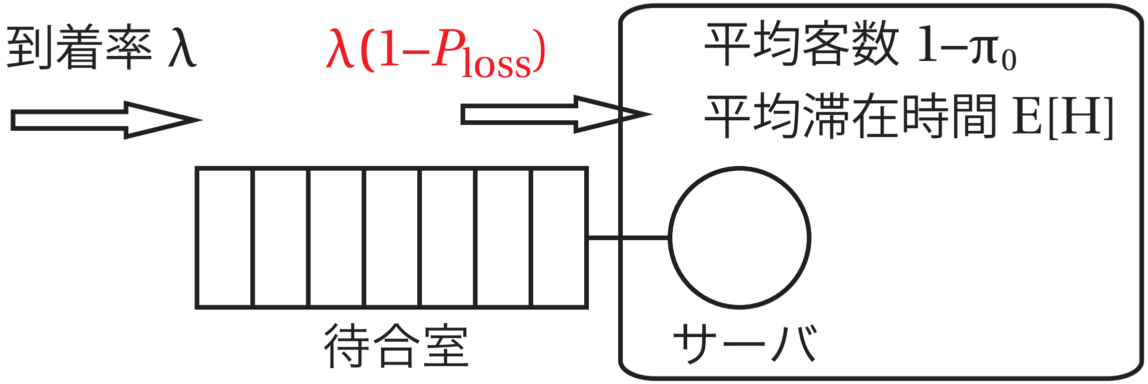
- 普通の M/G/1 ($P_{\mathrm{loss}} = 0$) では，$v(x)$ の形状と無関係に

$$\pi_0 = 1 - \rho$$

- M/G/1+G ($P_{\mathrm{loss}} > 0$) では，$v(x)$ の形状が π_0 に影響

$$\pi_0 = 1 - (1 - P_{\mathrm{loss}})\rho$$

$$P_{\mathrm{loss}} = \int_{0+}^{\infty} v(x) G(x) dx$$



呼損率 P_{loss} と仮待ち時間分布

別の観点から見ると

- 呼損率 P_{loss} は応用上重要な指標
- $v(x)$ ($x > 0$) から，P_{loss} が求められる

$$P_{\mathrm{loss}} = \frac{\rho - (1 - \pi_0)}{\rho}, \qquad \pi_0 = 1 - \int_{0+}^{\infty} v(x)\,dx$$

- このように P_{loss} が得られることが
  仮待ち時間分布を考察する動機の一つ

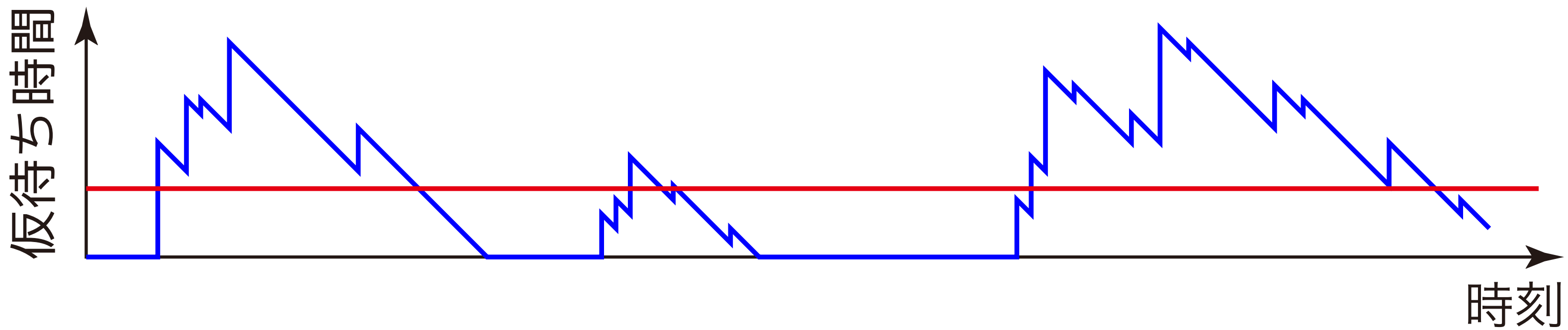
先行研究

- M/G/1+G に含まれる特別なモデルの仮待ち時間分布
  - M/M/1+D [Cohen (1969)]
  - M/M/1+G [Stanford (1979)]
  - M/G/1+D [Daley (1965)], [Kok and Tijms (1985)], [Bae et al. (2001)]
  - M/G/1+M [Daley (1965)]
  - M/G/1+Er [Baccelli et al. (1984)]
- M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]
  - $v(x)$ ($x > 0$) が満たす積分方程式を解き，その級数表現を導出
  - この結果を特別化することで，上記の結果は全て導かれる

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

- 仮待ち時間過程の任意の標本路において，レベル x を

  下向きに通過する遷移の数 ＝ 上向きに通過する遷移の数



$$v(x) = \lambda\pi_0\overline{H}(x) + \lambda\int_{0+}^{x} v(y)\overline{G}(y)\overline{H}(x-y)\,dy$$

下向き	レベル 0 から上向き	レベル y から上向き

$\overline{H}(x)$: サービス時間の補分布，$\overline{G}(x)$: 待ち時間制約の補分布

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

- $$v(x) = \lambda\pi_0\overline{H}(x) + \lambda\int_{0+}^{x} v(y)\overline{G}(y)\overline{H}(x-y)\,dy \qquad (1)$$
  - これはヴォルテラ積分方程式の一種であり，$v(x)$ ($x > 0$) は次式で一意に定められる

$$v(x) = \pi_0\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\phi_n(x) \qquad (2)$$

$$\phi_0(x) = \lambda\overline{H}(x),\ \phi_n(x) = \int_{0+}^{x}\phi_{n-1}(y)\overline{G}(y)\overline{H}(x-y)\,dy, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

- さらに，π_0 は次式で与えられる

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\int_{0+}^{\infty}\phi_n(x)\,dx\right)^{-1} \qquad (4)$$

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

- [Baccelli et al. (1984)] で導出された $v(x)$ の級数表現

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(x) \tag{2}$$

$$\phi_0(x) = \lambda \overline{H}(x), \ \phi_n(x) = \int_{0+}^{x} \phi_{n-1}(y)\overline{G}(y)\overline{H}(x-y)dy, \ \ n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

- 発表者らの知る限り，この級数を構成する各項が有する確率的意味を論じた研究は過去に存在しない

発表の概要

- M/G/1+G の仮待ち時間過程と等価な系内仕事量過程をもつ，割り込み再開型後着順サービス (LCFS-PR) M/G/1 を考察
  - それを通じて $\nu(x)$ の級数表現の確率的解釈を明らかにする

さらに，

- サービス時間や待ち時間制約の分布を特別化したモデル群
  - $\nu(x)$ のより単純な表現が過去に得られている

本発表の結果から，それら特別な分布が有するどのような性質が $\nu(x)$ の単純化を引き起こすのかを統一的に捉えることができる

到着直前の系内仕事量に依存した呼損が起こる LCFS-PR M/G/1 待ち行列

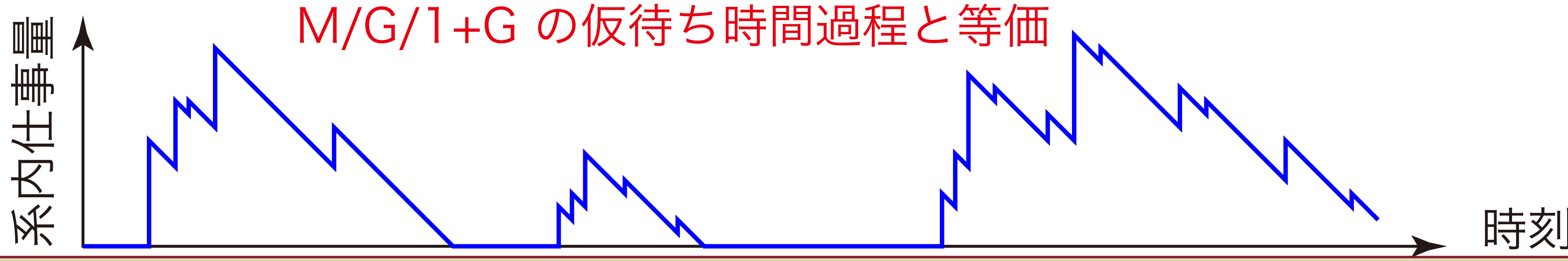
モデル

系内仕事量: 滞在中の客の残余サービス時間の総和

- 客は率 λ のポアソン過程に従って到着
  - サービス時間は分布関数 $H(x)$ に従って i.i.d
- 到着直前における系内仕事量が x である場合
  - 確率 $G(x)$ $(= 1 - \overline{G}(x))$ で呼損し，即座に離脱
  - 確率 $\overline{G}(x)$ で系に受け入れられる

上向きジャンプ発生 $\Leftrightarrow$ 客の到着が発生し，かつ，呼損しない

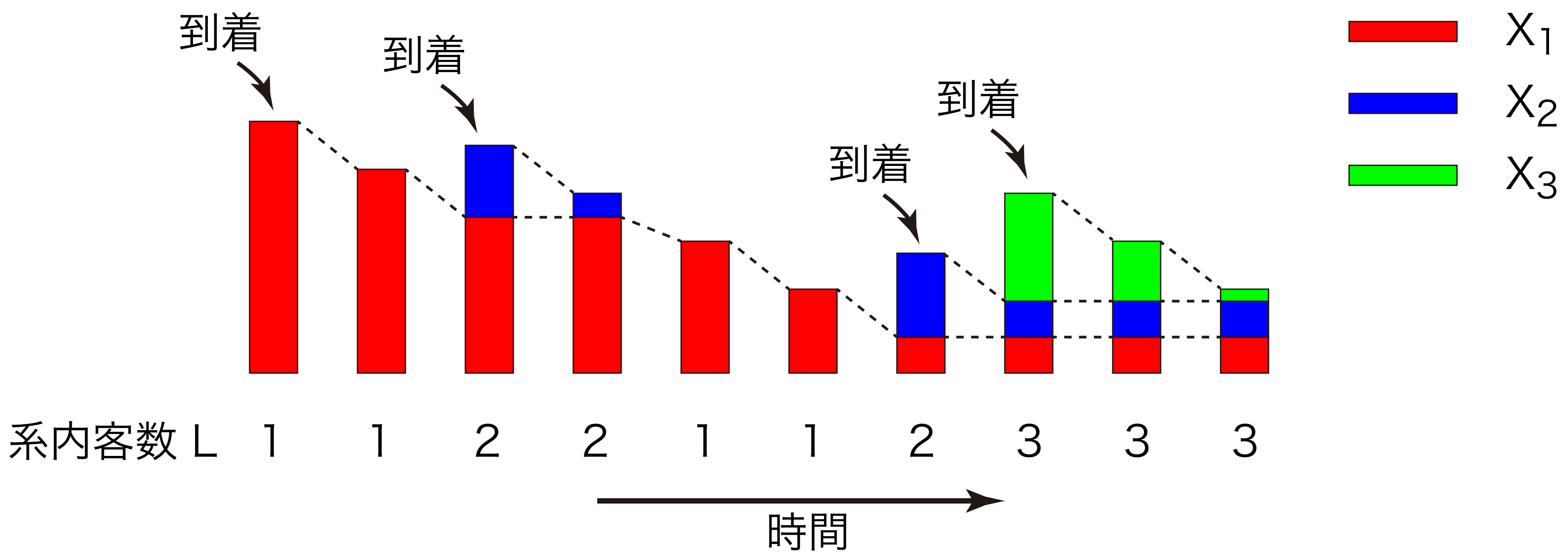
M/G/1+G の仮待ち時間過程と等価



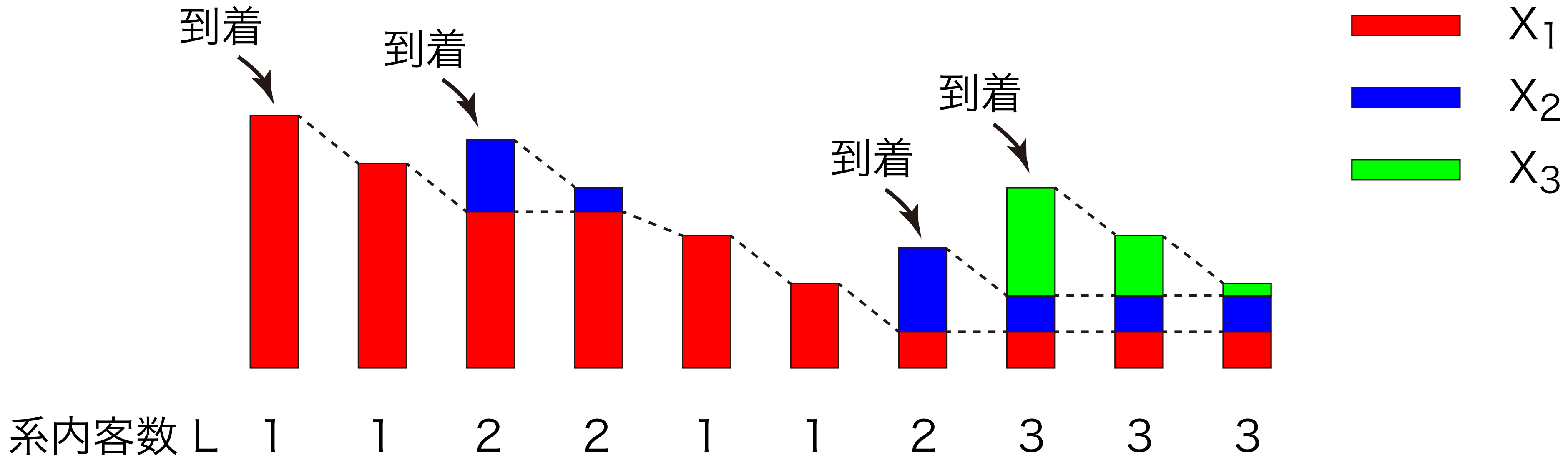
割り込み再開型後着順サービス規律

- 割り込み再開型後着順サービス (LCFS-PR) を仮定
  - 総系内仕事量は先着順サービスの場合と同じ

L : 定常状態における系内客数
X_i : 系内で i 番目に到着した客の残余サービス時間



結合系内仕事量分布



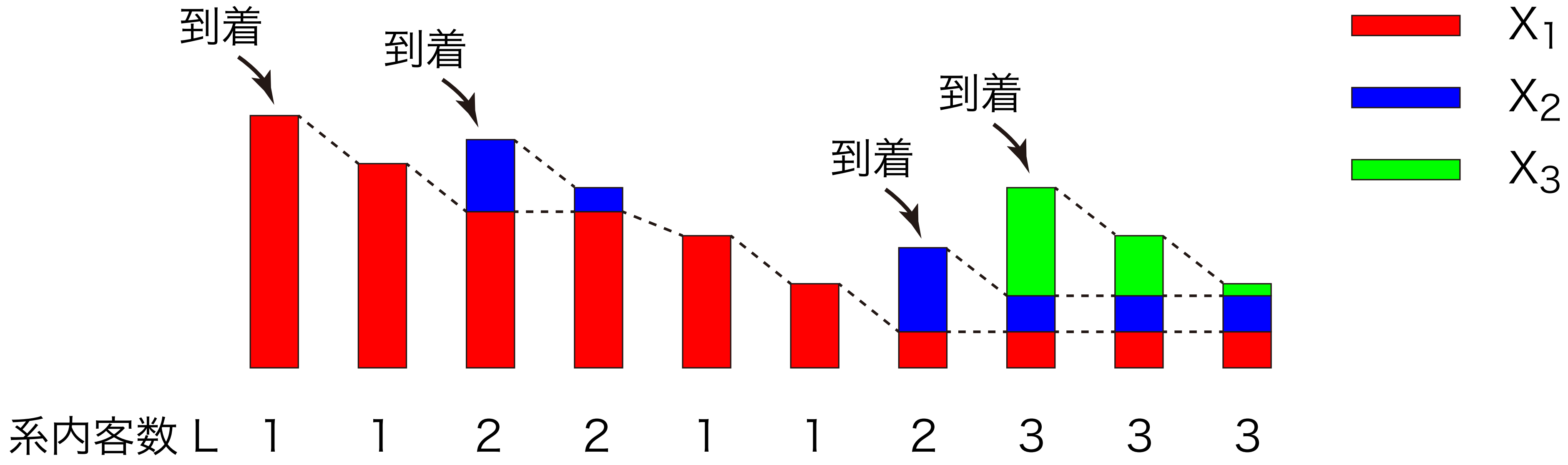
$p_n \triangleq \Pr(L=n)$, $\tilde{h}(x) \triangleq \overline{H}(x)/\mathrm{E}[H]$ (サービス時間の残余寿命密度)

- $L=n$ という条件下での結合系内仕事量密度 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid n)$

$$p_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid n)$$
$$= \pi_0 \rho^n \cdot \tilde{h}(x_1) \cdot \overline{G}(x_1) \tilde{h}(x_2) \cdot \overline{G}(x_1 + x_2) \tilde{h}(x_3) \cdots \cdot \overline{G}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \tilde{h}(x_n)$$

$\overline{G}(x)$: 到着時に x の仕事を見た客が呼損しない確率

結合系内仕事量分布



$p_n \triangleq \Pr(L = n), \quad \tilde{h}(x) \triangleq \overline{H}(x)/\mathrm{E}[H]$ (サービス時間の残余寿命密度)

- $L = n$ という条件下での結合系内仕事量密度 $f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid n)$

$$p_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid n)$$

$$= \pi_0 \rho^n \cdot \tilde{h}(x_1) \cdot \overline{G}(x_1) \tilde{h}(x_2) \cdot \overline{G}(x_1 + x_2) \tilde{h}(x_3) \cdots \cdot \overline{G}(x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \tilde{h}(x_n)$$

$$= \pi_0 \rho^n \cdot \tilde{h}(x_1) \prod_{i=2}^{n} \overline{G}\Big(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\Big) \tilde{h}(x_i)$$

系内客数分布 p_n

$$p_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid n) = \pi_0 \rho^n \tilde{h}(x_1) \prod_{i=2}^{n} \overline{G}(\sum_{j=1}^{i-1} x_j) \tilde{h}(x_i) \tag{6}$$

- $\displaystyle\int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 = 1$

  より，p_n が得られる

$$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}(\sum_{j=1}^{i-1} x_j) \tilde{h}(x_i) \right\} dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 \tag{8}$$

M/G/1+G 待ち行列の仮待ち時間分布

結合系内仕事量分布の周辺化

- $1 \times n$ ベクトル $\boldsymbol{x}^{[n]}$ と集合 $\mathscr{D}_+(x \mid n)$ を次式で定義

$$\boldsymbol{x}^{[n]} \triangleq (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \mathscr{D}_+(x \mid n) \triangleq \left\{\boldsymbol{x}^{[n]}; \boldsymbol{x}^{[n]} > \mathbf{0}, \sum_{m=1}^{n} x_m < x\right\}$$

- $v(x \mid n)$：$L = n$ という条件下における仮待ち時間の密度関数

$$p_n v(x \mid n) = \pi_0 \rho^n \int_{\mathscr{D}_+(x|n-1)} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}\Big(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\Big) \tilde{h}(x_i) \right\} \cdot \overline{G}\Big(\sum_{m=1}^{n-1} x_m\Big) \tilde{h}\Big(x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m\Big) d\boldsymbol{x}^{[n-1]} \qquad (10)$$

- 仮待ち時間分布の密度関数 $v(x)$ は次式で与えられる

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n v(x \mid n) \qquad (11)$$

積分方程式の級数解との関係 (1)

- ヴォルテラ積分方程式の解

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(x) \tag{2}$$

$$\phi_0(x) = \lambda \overline{H}(x),\ \phi_n(x) = \int_{0+}^{x} \phi_{n-1}(y)\overline{G}(y)\overline{H}(x-y)\,dy, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

- 単純な計算により，$\pi_0 \lambda^{n-1} \phi_{n-1}(x) = p_n v(x \mid n)$ が示される

すなわち,

全く同じ

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(x) \iff v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n v(x \mid n)$$

$v(x)$ の級数解の第 n 項 $\pi_0 \lambda^{n-1} \phi_{n-1}(x)$ は，LCFS-PR M/G/1 における系内客数 $L = n + 1$ のときの系内仕事量密度を表す

積分方程式の級数解との関係 (2)

$$\pi_0 \lambda^{n-1} \phi_{n-1}(x) = p_n v(x \mid n)$$

さらに，次の二つは全く同じであることがわかる

- $\pi_0 + \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_{0+}^{\infty} \phi_n(x) dx = 1$ ➡ $\pi_0 = \left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_{0+}^{\infty} \phi_n(x) dx\right)^{-1}$
- $\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ ➡ $\pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{\pi_0}\right)^{-1}$

なお，p_n/π_0 は次式で与えられる

$$\frac{p_n}{\pi_0} = \rho^n \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}(\sum_{j=1}^{i-1} x_j) \tilde{h}(x_i) \right\} dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1$$

特別な場合

M/G/1+G を特別化したモデル

- サービス時間や待ち時間制約の分布を特別化したモデル
  - より単純な仮待ち時間分布の表現が得られている
- 特別な分布が有するどのような性質がこの単純化を
  引き起こすのかを，三つの例を挙げ見ていく

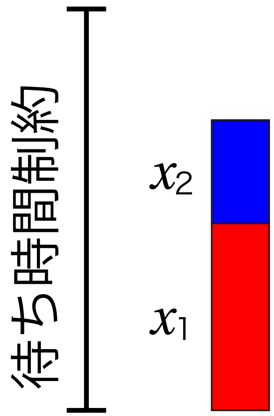
$$p_n v(x \mid n) = \pi_0 \rho^n \int_{\mathscr{D}_+(x|n-1)} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) \tilde{h}(x_i) \right\} \cdot \overline{G}\left(\sum_{m=1}^{n-1} x_m\right) \tilde{h}\left(x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m\right) d\boldsymbol{x}^{[n-1]}$$

$$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) \tilde{h}(x_i) \right\} d\boldsymbol{x}^{[n]}$$

M/G/1+M (1)

$$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) \tilde{h}(x_i) \right\} d\boldsymbol{x}^{[n]}$$

- 待ち時間制約が指数分布に従う
  - $\overline{G}(x) = e^{-\gamma x}$



このとき，$\overline{G}(x_1 + x_2) = \overline{G}(x_1)\overline{G}(x_2)$ が成立 (無記憶性)

➡ $$p_n = \pi_0 \rho^n \prod_{i=1}^{n} \int_{x_i=0+}^{\infty} \left[\overline{G}(x_i)\right]^{n-i} \tilde{h}(x_i) dx_i$$

$$= \pi_0 \rho^n \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{h}^*(i\gamma)$$

$\tilde{h}^*(s)$: $\tilde{h}(x)$ の LST

M/G/1+M (2)

- 同様に，仮待ち時間分布の密度関数は次式で与えられる

$$
\begin{aligned}
v(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n v(x \mid n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \pi_0 \rho^n \int_{\mathscr{D}_+(x|n-1)} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{h}(x_i) \left[e^{-\gamma x_i} \right]^{n-i} \right\} \tilde{h}(x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m) d\boldsymbol{x}^{[n-1]} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \psi_0 * \psi_1 * \cdots * \psi_{n-1}(x)
\end{aligned}
$$

ただし $*$ は畳み込みを表し，

$$
\psi_m(x) \triangleq \frac{\tilde{h}(x) e^{-m\gamma x}}{\tilde{h}^*(m\gamma)}, \qquad m = 0, 1, \ldots
$$

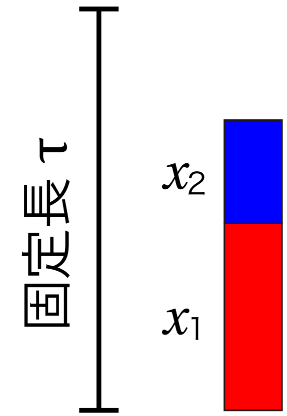
M/G/1+D (1)

$$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) \tilde{h}(x_i) \right\} d\boldsymbol{x}^{[n]}$$

- 待ち時間制約の長さが τ で一定

$$\overline{G}(x) = \begin{cases} 1, & x < \tau, \\ 0, & x \geq \tau \end{cases}$$

- このとき，任意の $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ に対し，
  - $\overline{G}(x_1) = 0$ ならば $\overline{G}(x_1 + x_2) = 0$



➡ $$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{\mathscr{D}_+(\tau|n)} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \tilde{h}(x_i) \right\} d\boldsymbol{x}^{[n]} \qquad (20)$$

M/G/1+D (2)

$$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{\mathscr{D}_+(\tau|n)} \left\{ \prod_{i=1}^{n} \tilde{h}(x_i) \right\} d\boldsymbol{x}^{[n]} \tag{20}$$

- $\tilde{h}^{(n)}(x) \triangleq \underbrace{\tilde{h} * \tilde{h} * \cdots * \tilde{h}}_{n}(x), \quad \tilde{H}^{(n)}(x) \triangleq \int_0^x \tilde{h}^{(n)}(y)dy$ と定義

  ➡ $p_n = \pi_0 \rho^n \tilde{H}^{(n)}(\tau)$

- 同様にして，仮待ち時間分布の密度関数は次式で与えられる

$$v(x) = \begin{cases} \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \tilde{h}^{(n)}(x), & \text{(普通の M/G/1 と同じ)} \quad x \le \tau, \\ \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_{\mathscr{D}_+(\tau|n-1)} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{h}(x_i) \right\} \tilde{h}(x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i) d\boldsymbol{x}^{[n-1]}, & x > \tau \end{cases}$$

M/M/1+G (1)

$$p_n v(x \mid n) = \pi_0 \rho^n \int_{\mathscr{D}_+(x|n-1)} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}(\sum_{j=1}^{i-1} x_j) \tilde{h}(x_i) \right\} \cdot \overline{G}(\sum_{m=1}^{n-1} x_m) \tilde{h}(x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m) d\boldsymbol{x}^{[n-1]}$$

- サービス時間はパラメタ μ の指数分布に従う
  - ➡ $\tilde{h}(x) = \mu e^{-\mu x}$ (無記憶性)
- このとき， $\tilde{h}(x_1)\tilde{h}(x_2) = \mu \cdot \tilde{h}(x_1 + x_2)$

➡ $p_n v(x \mid n) = \pi_0 \rho^n \cdot \mu^{n-1} \tilde{h}(x) \int_{\mathscr{D}_+(x|n-1)} \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}(\sum_{j=1}^{i-1} x_j) \right\} d\boldsymbol{x}^{[n-1]}$

M/M/1+G (2)

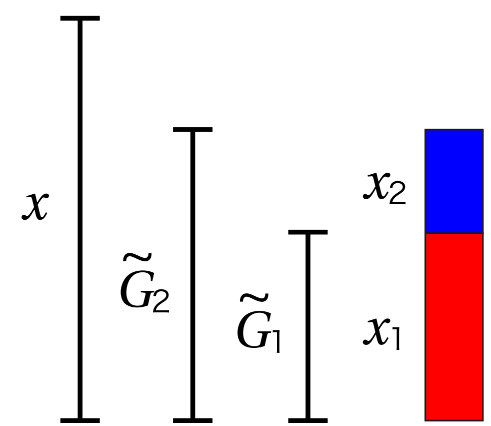
$$p_n v(x \mid n) = \pi_0 \rho (\lambda \mathrm{E}[G])^{n-1} \tilde{h}(x) \int_{\mathscr{D}_+(x|n-1)} \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) / \mathrm{E}[G] \right\} d\boldsymbol{x}^{[n-1]}$$

- $\{\tilde{G}_i\}$: 待ち時間制約の残余寿命分布に従って i.i.d の確率変数列
  - 密度関数は $\overline{G}(x)/\mathrm{E}[G]$．分布関数を $\tilde{G}(x)$ とする

$$\int_{\mathscr{D}_+(x|n-1)} \left\{ \prod_{i=2}^{n} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) / \mathrm{E}[G] \right\} d\boldsymbol{x}^{[n-1]}$$

$$= \Pr(\tilde{G}_1 < \tilde{G}_2 < \cdots < \tilde{G}_{n-1} < x)$$

$$= \frac{[\tilde{G}(x)]^{n-1}}{(n-1)!}$$



(並べ替えが $(n-1)!$ 通りある)

M/M/1+G (3)

- したがって,

$$p_n v(x \mid n) = \pi_0 \lambda e^{-\mu x} \cdot \frac{[\lambda \mathrm{E}[G] \tilde{G}(x)]^{n-1}}{(n-1)!} \tag{22}$$

より，仮待ち時間分布の密度関数は次式で与えられる

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n v(x \mid n) \\ &= \pi_0 \lambda \exp(-\mu x + \lambda \mathrm{E}[G] \tilde{G}(x)) \end{aligned}$$

- また，p_n は次式で与えられる

$$p_n = \pi_0 \rho \cdot \frac{(\lambda \mathrm{E}[G])^{n-1}}{(n-1)!} \int_{0+}^{\infty} \mu e^{-\mu y} [\tilde{G}(y)]^{n-1} dy,$$

まとめ

M/G/1+G の仮待ち時間分布を考察

- LCFS-PR M/G/1 の考察を通じて,
  $v(x)$ の級数表現に対する確率的解釈を明らかにした
- サービス時間や待ち時間制約の分布を特別化したモデル群
  - M/G/1+M，M/G/1+D，M/M/1+G を考察
  - 特別な分布が有するどのような性質が $v(x)$ の単純化を引き起こすのかを，本発表の結果から容易に理解できる
- 複数クラス M/G/1+G に対しても同様の観察が可能
  - 2 月待ち行列部会にて発表予定