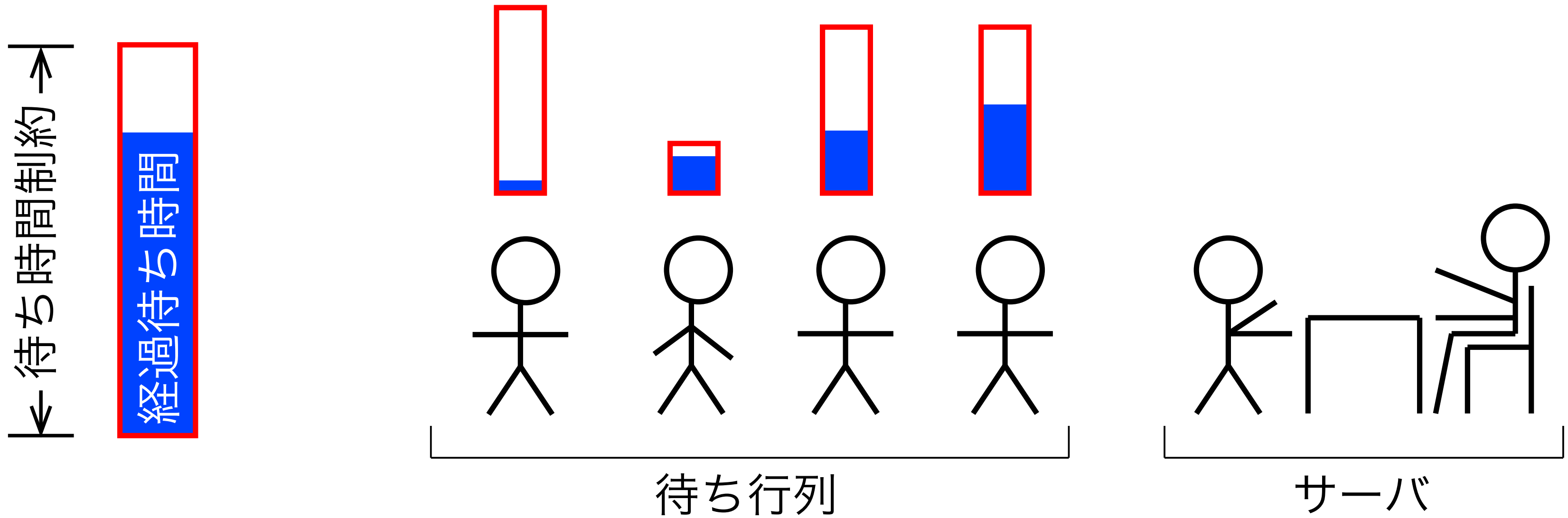
M/G/1+G 待ち行列における呼損率の数値計算について

*井上 文彰，滝根 哲哉

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

待ち時間制約のある待ち行列モデル

- 待ち時間が長すぎると，客はサービスを受けずに離脱する



- (例) 遅延制約のあるデータ通信，コールセンタ
- ケンドールの記法

A	/	B	/	c	+	W
到着間隔		サービス時間		サーバ数		待ち時間制約

考察するモデル

- 客がポアソン到着する単一サーバモデル (M/G/1+G) を考察
  - 客の到着は率 λ のポアソン過程に従う
  - サービス時間は分布関数 $H(x)$ に従って i.i.d.
  - 待ち時間制約は分布関数 $G(x)$ に従って i.i.d.
    - ただし，確率 $g_\infty \in [0, 1)$ で待ち時間制約の無い客が到着

    ➡ $\lim_{x \to \infty} G(x) = 1 - g_\infty$

- 以降では，$\lambda g_\infty \mathrm{E}[H] < 1$ を仮定

  $\boxed{\mathrm{E}[H]：平均サービス時間}$

  ➡ 系は安定であり，定常状態が存在 [Baccelli et al. (1984)]

- また，簡単のため $G(0) = 0$，$H(0) = 0$ を仮定

呼損率 P_{loss}

P_{loss} : 客がサービスを受けずに途中退去する確率

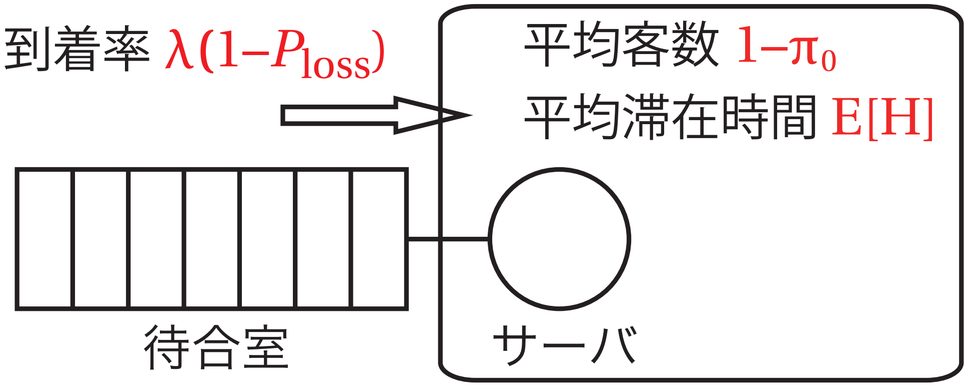
π_0 : 系が空である確率

- サーバ部分にリトルの公式を適用

$$1 - \pi_0 = \lambda(1 - P_{\text{loss}})\mathrm{E}[H]$$

➡ P_{loss} は π_0 を用いて与えられる ($\rho \triangleq \lambda\mathrm{E}[H]$)

$$P_{\text{loss}} = \frac{\rho - (1 - \pi_0)}{\rho}$$



呼損率 P_{loss}

P_{loss}：客がサービスを受けずに途中退去する確率

π_0　：系が空である確率

- サーバ部分にリトルの公式を適用

$$1 - \pi_0 = \lambda(1 - P_{\mathrm{loss}})\mathrm{E}[H]$$

➡ P_{loss} は π_0 を用いて与えられる（$\rho \triangleq \lambda\mathrm{E}[H]$）

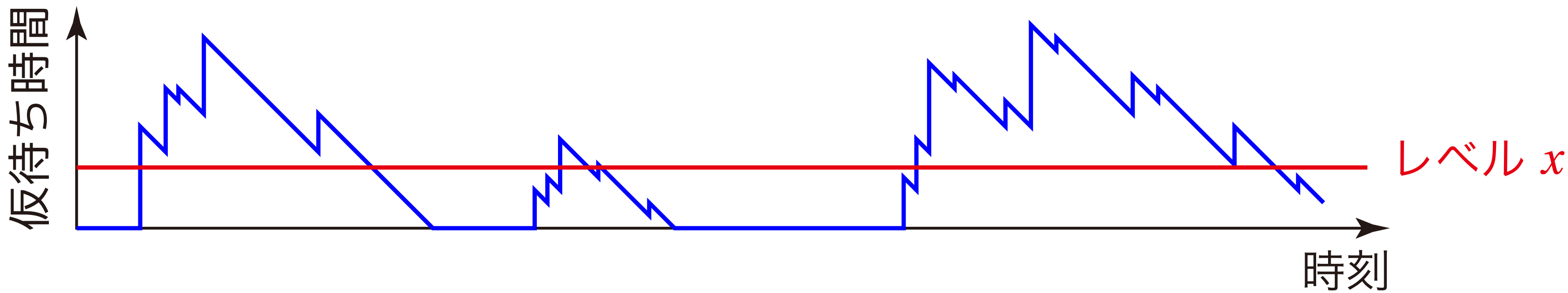
$$P_{\mathrm{loss}} = \frac{\rho - (1 - \pi_0)}{\rho}$$

- さらに，π_0 は仮待ち時間の密度関数 $v(x)$ ($x > 0$) より得られる [Baccelli et al. (1984)]

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

- 任意の全稼働期間において，レベル x を

下向きに通過する遷移の数 ＝ 上向きに通過する遷移の数



$$v(x) = \lambda\pi_0\overline{H}(x) + \lambda\int_{0+}^{x} v(y)\overline{G}(y)\overline{H}(x-y)dy$$

下向き　　レベル 0 から上向き　　レベル y から上向き

$\overline{H}(x)$: サービス時間の補分布，$\overline{G}(x)$: 待ち時間制約の補分布

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

- $v(x) = \lambda \pi_0 \overline{H}(x) + \lambda \int_{0+}^{x} v(y) \overline{G}(y) \overline{H}(x-y) dy$
  - これはヴォルテラ積分方程式の一種であり，
    $v(x)$ ($x > 0$) は次式で一意に定められる

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(x)$$

$$\phi_0(x) = \lambda \overline{H}(x), \ \phi_n(x) = \int_{0+}^{x} \phi_{n-1}(y) \overline{G}(y) \overline{H}(x-y) dy, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- よって，π_0 は次式で与えられる

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_{0+}^{\infty} \phi_n(x) dx \right]^{-1}$$

発表の概要

$$\phi_0(x) = \lambda \overline{H}(x),\ \phi_n(x) = \int_{0+}^{x} \phi_{n-1}(y)\overline{G}(y)\overline{H}(x-y)dy$$

- 呼損率 P_{loss} は π_0 を用いて与えられる
  - π_0 を数値的に得るためには，無限級数の切断が必要

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_{0+}^{\infty} \phi_n(x)dx\right]^{-1}$$

本発表では，上式の確率的な解釈 [井上，滝根 (2014)] をもとに

- この無限級数の性質を考察
  - 特に有限項で近似したときの誤差上界を与える
- M/Er$_5$/1+H$_2$ の場合における数値例を示す

$v(x)$ の形式的級数解に対する確率的解釈 [井上，滝根 (2014)]

等価な系内仕事量過程

- M/G/1+G では，途中退去客は仮待ち時間に寄与しない

そこで，次の等価なモデルを導入する

- 到着直前における系内仕事量が x である場合
  - 確率 $G(x)$ で呼損し，即座に離脱
  - 確率 $\overline{G}(x)$ $(= 1 - G(x))$ で系に受け入れられる
- 受け入れられた客は，割り込み再開型後着順でサービス
  - 総系内仕事量は先着順サービスの場合と同じ

このモデルにおける系内客数 L と系内仕事量 V を考える

系内仕事量と系内客数の結合分布

V_n : $L=n$ という条件下における系内仕事量

- V_n の密度関数を $v(x \mid n)$ とすると，次式が成立

$$v(x \mid 1) = \tilde{h}(x)$$

$$v(x \mid n) = \frac{1}{P_{\text{admit}}(n-1)} \int_{0+}^{x} v(y \mid n-1)\overline{G}(y)\tilde{h}(x-y)dy$$

  - ◆ $\tilde{h}(x) \triangleq \dfrac{\overline{H}(x)}{\mathrm{E}[H]}$, $\quad P_{\text{admit}}(n) = \displaystyle\int_{0+}^{\infty} v(x \mid n)\overline{G}(x)dx$

- さらに，$c_n \triangleq \Pr(L=n)/\pi_0$ は次式を満たす

$$c_1 = \rho, \qquad c_n = c_{n-1} \cdot \rho P_{\text{admit}}(n-1), \quad n = 2, 3, \ldots$$

系が空である確率 π_0

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Pr(L=n) = \pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \pi_0 c_n = 1$ より,

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right]^{-1} \qquad \left(c_n = \lambda^{n-1}\int_{0+}^{\infty} \phi_{n-1}(x)\,dx\right)$$

以上より,

- π_0 および P_{loss} は, 次の漸化式で定められる $\{c_n\}_{n=1,2,\ldots}$ を用いて与えられる

$$c_1 = \rho, \qquad c_n = c_{n-1}\cdot\rho P_{\text{admit}}(n-1), \quad n = 2, 3, \ldots$$

◆ $\displaystyle P_{\text{admit}}(n) = \int_{0+}^{\infty} v(x \mid n)\overline{G}(x)\,dx = \mathrm{E}[\overline{G}(V_n)]$

$\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ の性質

V_n と V_{n+1} の間の確率順序

V_n : $L = n$ という条件下における系内仕事量

- $V_n \le_{\mathrm{rh}} V_{n+1}$ (Reversed hazard rate order) が成立,
  すなわち任意の $0 \le x \le y$ に対し

$$\Pr(V_n \le x)\Pr(V_{n+1} \le y) \ge \Pr(V_n \le y)\Pr(V_{n+1} \le x)$$

- 上式は次式と等価

$$\Pr(V_n \le x \mid V_n \le y) \ge \Pr(V_{n+1} \le x \mid V_{n+1} \le y), \quad 0 \le x \le y$$

- 特に, $y \to \infty$ とすると

$$\Pr(V_n \le x) \ge \Pr(V_{n+1} \le x) \qquad (\Leftrightarrow V_n \le_{\mathrm{st}} V_{n+1})$$

V_n と V_{n+1} の間の確率順序 (略証)

$\{\tilde{H}_n\}_{n=1,2,\dots}$: サービス時間の平衡分布に従う i.i.d. 確率変数列

$\{G_n\}_{n=1,2,\dots}$: 待ち時間制約分布に従う i.i.d. 確率変数列

- $V_0 = 0, \quad \hat{V}_n = [V_n \mid V_n < G_n] \quad (n = 0, 1, \dots)$ とおくと

$$V_n = \hat{V}_{n-1} + \tilde{H}_n, \qquad n = 1, 2, \dots$$

- $V_0 \le_{\mathrm{rh}} V_1$ ならびに次の性質より,
  $V_n \le_{\mathrm{rh}} V_{n+1}$ $(n = 1, 2, \dots)$ は帰納的に示される

$V_{n-1} \le_{\mathrm{rh}} V_n$

$\Rightarrow \hat{V}_{n-1} \le_{\mathrm{rh}} \hat{V}_n$ [Bartoszewicz and Skolimowska (2006)]

$\Rightarrow \hat{V}_{n-1} + \tilde{H}_n \le_{\mathrm{rh}} \hat{V}_n + \tilde{H}_{n+1}$ [Shaked and Shanthikumar (2007)]

($\tilde{h}(x)$ が単調非増加であるため)

V_n と V_{n+1} の間の確率順序 (略証)

$\{\tilde{H}_n\}_{n=1,2,\ldots}$：サービス時間の平衡分布に従う i.i.d. 確率変数列

$\{G_n\}_{n=1,2,\ldots}$：待ち時間制約分布に従う i.i.d. 確率変数列

- $V_0 = 0, \quad \hat{V}_n = [V_n \mid V_n < G_n] \quad (n = 0, 1, \ldots)$ とおくと

$$V_n = \hat{V}_{n-1} + \tilde{H}_n, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- $V_0 \leq_{\mathrm{rh}} V_1$ ならびに次の性質より,
  $V_n \leq_{\mathrm{rh}} V_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は帰納的に示される

$V_{n-1} \leq_{\mathrm{rh}} V_n$

$\Rightarrow \hat{V}_{n-1} \leq_{\mathrm{rh}} \hat{V}_n$ [Bartoszewicz and Skolimowska (2006)]

$\Rightarrow \hat{V}_{n-1} + \tilde{H}_n \leq_{\mathrm{rh}} \hat{V}_n + \tilde{H}_{n+1}$ [Shaked and Shanthikumar (2007)]

$\Leftrightarrow V_n \leq_{\mathrm{rh}} V_{n+1}$

$\{c_n\}_{n=1,2,\ldots}$ の性質 (1)

$$c_1 = \rho, \qquad c_n = c_{n-1} \cdot \rho P_{\mathrm{admit}}(n-1), \qquad n = 2, 3, \ldots$$

- $P_{\mathrm{admit}}(n) = \int_{0+}^{\infty} v(x \mid n)\overline{G}(x)\,dx = \mathrm{E}[\overline{G}(V_n)]$
- $\overline{G}(x)$ は単調非増加関数であるため, $V_n \leq_{\mathrm{st}} V_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ より

$$P_{\mathrm{admit}}(n) \geq P_{\mathrm{admit}}(n+1), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- $\{P_{\mathrm{admit}}(n)\}_{n=1,2,\ldots}$ は下に有界な非増加列であり, 極限が存在

$\lim_{n\to\infty} P_{\mathrm{admit}}(n) = g_\infty$ が成り立つ $\qquad \left(g_\infty = \lim_{x\to\infty} \overline{G}(x)\right)$

- したがって,

$$\underset{\text{(安定条件)}}{\rho g_\infty < 1} \iff \pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n} > 0$$

$\{c_n\}_{n=1,2,\ldots}$ の性質 (2)

$$c_1 = \rho, \qquad c_n = c_{n-1} \cdot \rho P_{\mathrm{admit}}(n-1), \qquad n = 2, 3, \ldots$$

- 系が安定ならば，次式を満たす正整数 n^* が一意に存在

$$\rho P_{\mathrm{admit}}(n) \geq 1, \qquad n = 1, 2, \ldots, n^* - 1$$

$$\rho P_{\mathrm{admit}}(n) < 1, \qquad n = n^*, n^* + 1, \ldots$$

➡ $\{c_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は単調非増加あるいは単峰型

- N^* を，$\rho P_{\mathrm{admit}}(N^*) < 1$ を満たす正整数とする
  - ◆ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ の計算を $n = N^*$ で打ち切った場合

$$\sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_n \leq \frac{c_{N^*}}{1 - \rho P_{\mathrm{admit}}(N^*)} \qquad \text{(打ち切り誤差の上界)}$$

数値例

数値例 (M/Er$_5$/1+H$_2$)

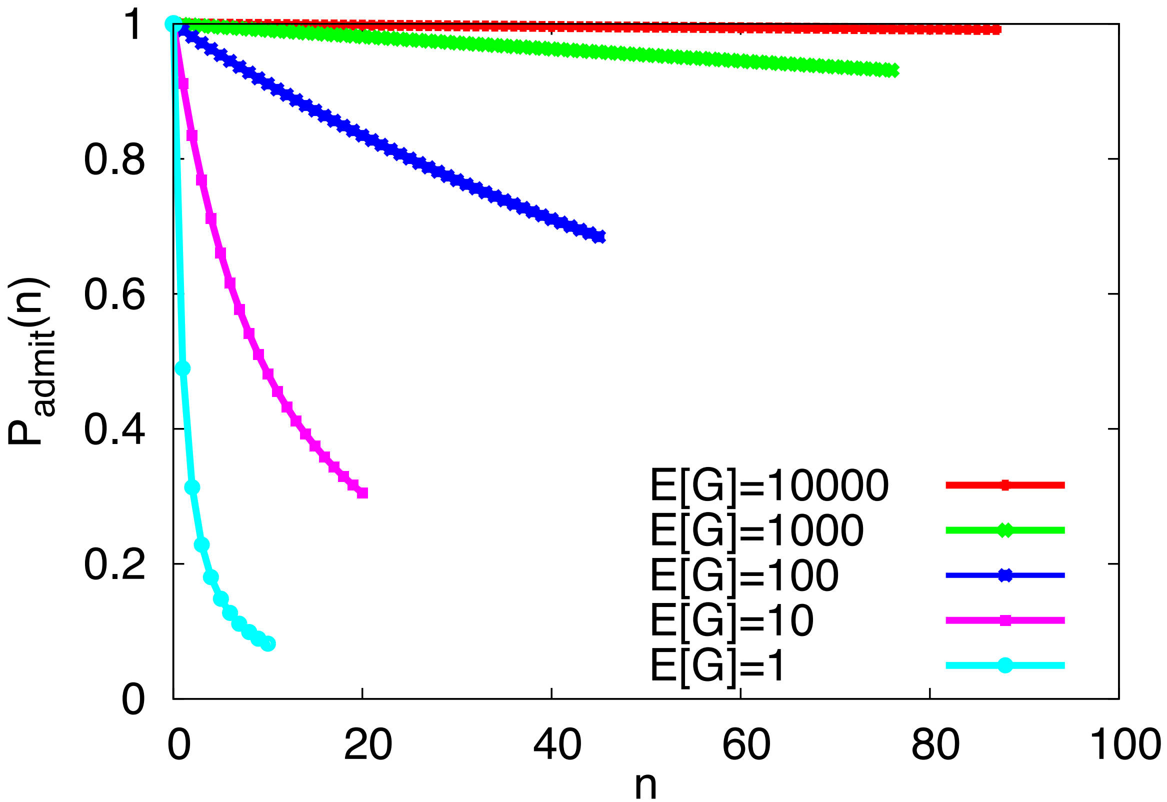
サービス時間：平均 1 の，5 ステージアーラン分布

待ち時間制約：変動係数 2 の，2 状態平衡超指数分布 ($g_\infty = 0$)

- $\displaystyle\sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_n < 10^{-8}$ を満たす N^* で計算を打ち切った
- $\rho = 0.8$ に固定

$\{P_{\mathrm{admit}}(n)\}_{n=1,2,\ldots}$ は単調非増加

$\lim_{n\to\infty} P_{\mathrm{admit}}(n) = 0$ だが，
$P_{\mathrm{admit}}(N^*) \gg 10^{-8}$ で停止



数値例 (M/Er$_5$/1+H$_2$)

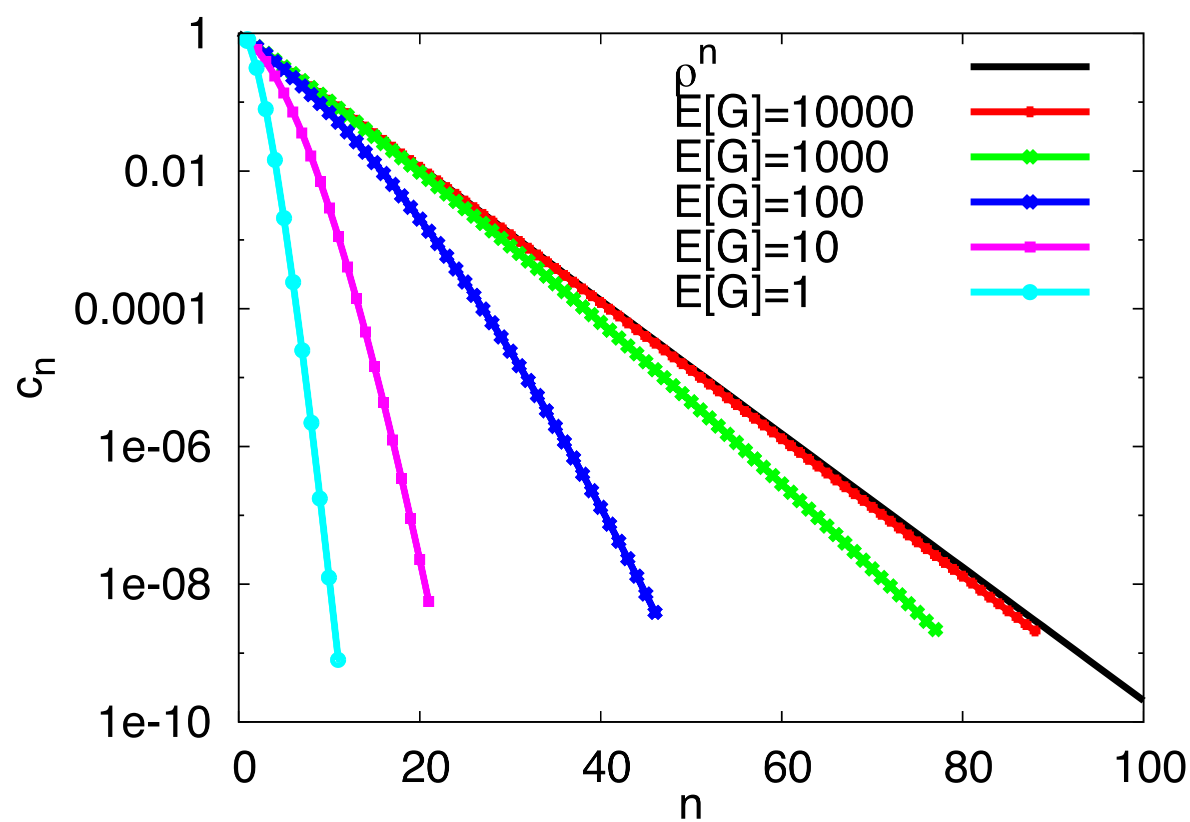
サービス時間：平均 1 の，5 ステージアーラン分布

待ち時間制約：変動係数 2 の，2 状態平衡超指数分布 ($g_\infty = 0$)

- $\sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_n < 10^{-8}$ を満たす N^* で計算を打ち切った
- $\rho = 0.8$ に固定

$c_{N^*} \approx 10^{-9}$ で停止

$\mathrm{E}[G] \to \infty$ のとき
$c_n = \rho^n$ に漸近



数値例 (M/Er$_5$/1+H$_2$)

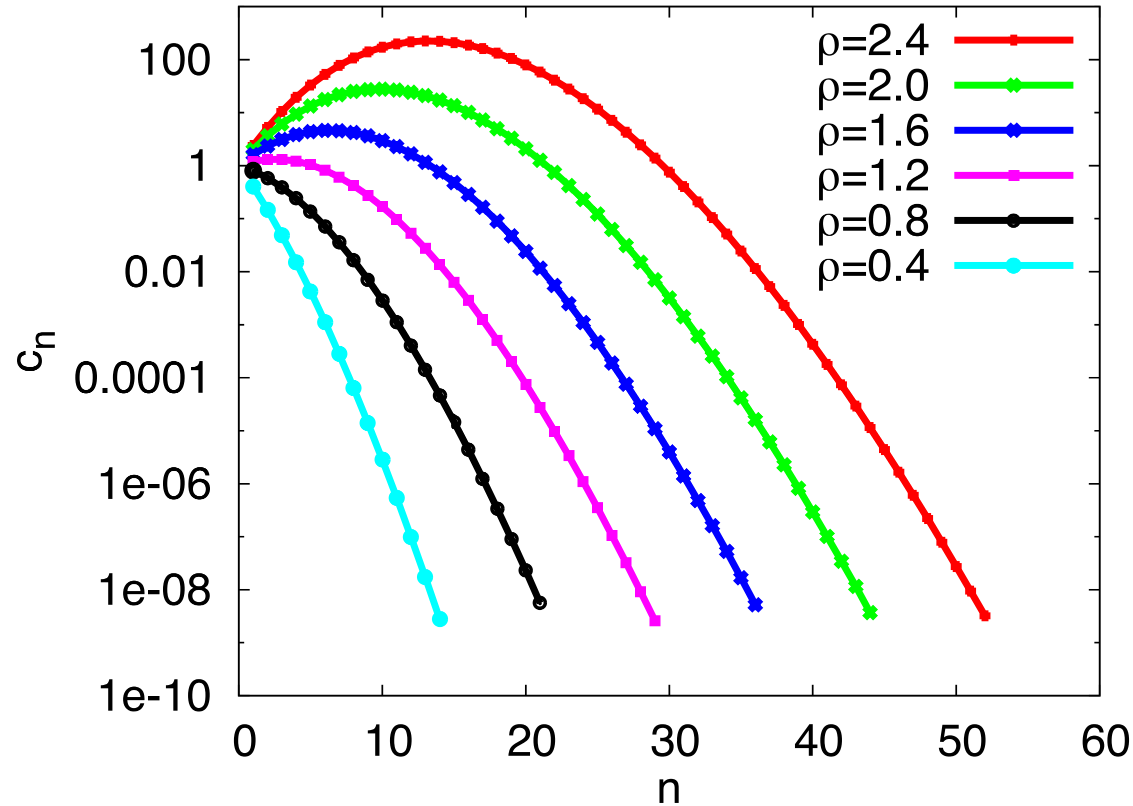
サービス時間：平均 1 の，5 ステージアーラン分布

待ち時間制約：変動係数 2 の，2 状態平衡超指数分布 ($g_\infty = 0$)

- $\displaystyle\sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_n < 10^{-8}$ を満たす N^* で計算を打ち切った
- $\mathrm{E}[G] = 10$ に固定

$c_{N^*} \approx 10^{-9}$ で停止

$\{c_n\}_{n=1,2,\ldots}$ は
単調非増加か単峰型



数値例 (M/Er$_5$/1+H$_2$)

サービス時間：平均 1 の，5 ステージアーラン分布

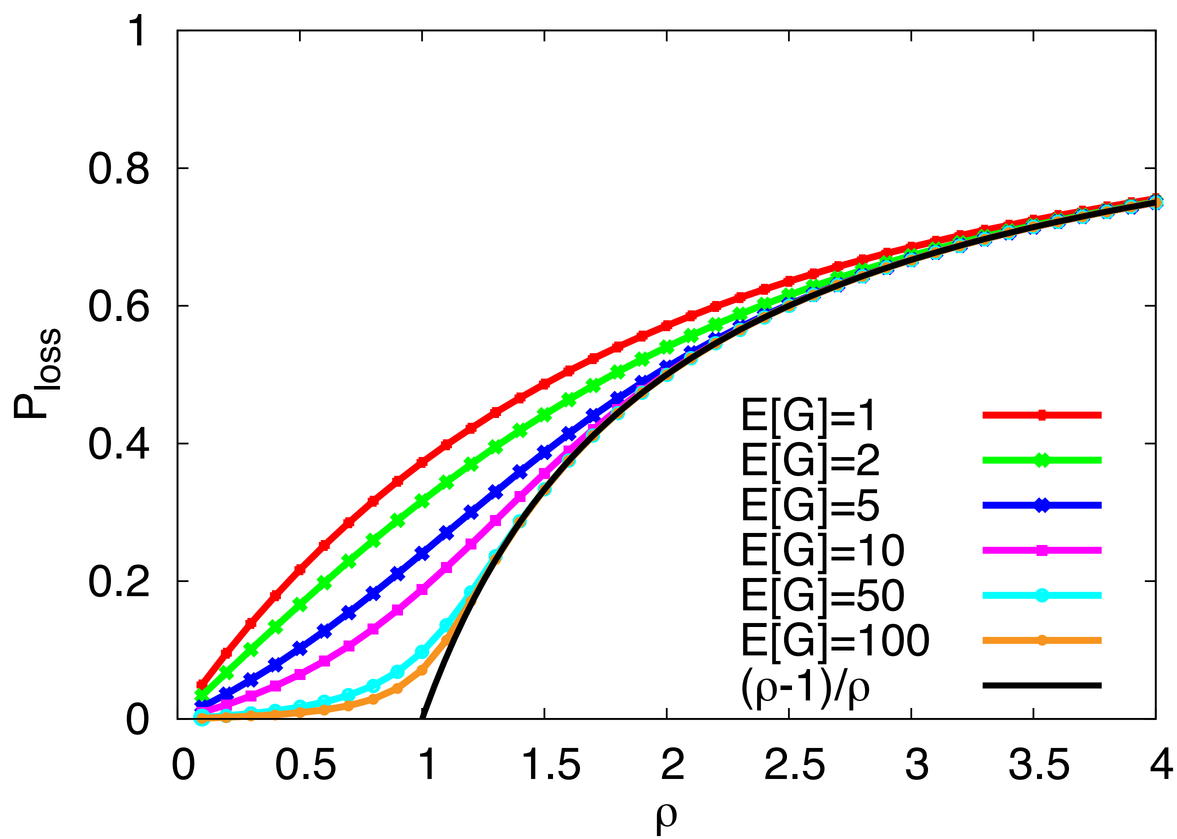
待ち時間制約：変動係数 2 の，2 状態平衡超指数分布 ($g_\infty = 0$)

- $\displaystyle\sum_{n=N^*+1}^{\infty} c_n < 10^{-8}$ を満たす N^* で計算を打ち切った

ρ が大きくなると，

P_{loss} は $\dfrac{\rho-1}{\rho}$ に漸近

$$P_{\text{loss}} = \frac{\rho - 1 + \pi_0}{\rho}$$



まとめ

- 待ち時間制約のある M/G/1 待ち行列 (M/G/1+G) を考察
- 仮待ち時間密度の確率的解釈に基づき
  - $\{c_n\}_{n=1,2,\dots}$ は単調非増加または単峰型であることを証明
  - $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ を計算する際の，切断誤差の上界を導出

この結果をもとに,

- M/G/1+PH における P_{loss} の数値計算法が構築できる

  Y. Inoue and T. Takine, Analysis and computation of the loss probability in the M/G/1+G queue, submitted for publication in Queueing Systems.

  - 来年 1 月のシンポジウムで発表予定

$\lim_{n\to\infty} P_{\mathrm{admit}}(n) = g_\infty$ の略証

- ある $a > 0$ が存在して $P_{\mathrm{admit}}(n) \ge a$ $(n = 1, 2, \ldots)$ となるとき,

  任意の $x \ge 0$ に対し, $\lim_{n\to\infty} \Pr(V_n \le x) = 0$

すなわち, $n \to \infty$ のとき

$$P_{\mathrm{admit}}(n) = g_\infty + (1 - g_\infty) \int_0^\infty \Pr(V_n \le x) dG^+(x)$$

$\to g_\infty$ $G^+(x)$: $[G \mid G < \infty]$ の分布関数

- $g_\infty > 0$ のときは, $a = g_\infty$ とおけばよい
- $g_\infty = 0$ のときは, 背理法を用いる
  - $a = \lim_{n\to\infty} P_{\mathrm{admit}}(n)$ とおく. $a > 0$ ならば
    $\lim_{n\to\infty} P_{\mathrm{admit}}(n) = g_\infty = 0$ がいえて矛盾が生じる