

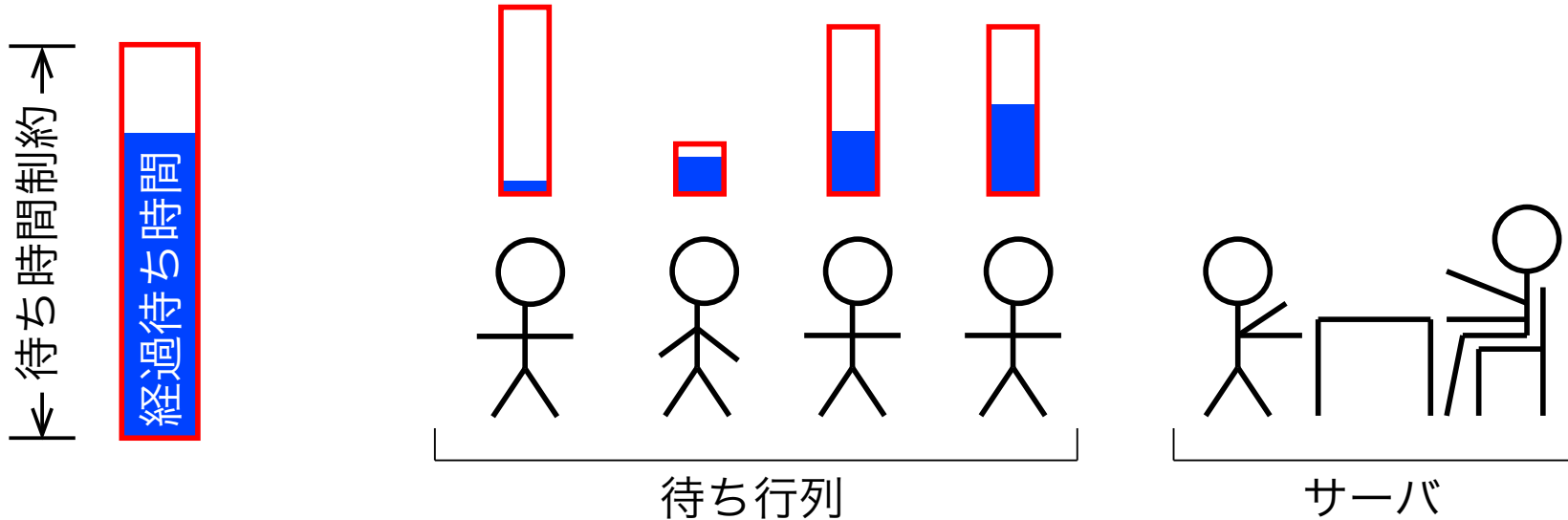
複数クラス M/G/1+G 待ち行列の仮待ち時間分布

*井上 文彰, 滝根 哲哉

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

待ち時間制約のある待ち行列モデル

- 待ち時間が長すぎると、客はサービスを受けずに離脱する



- (例) 遅延制約のあるデータ通信, コールセンタ
- ケンドールの記法

$$A / B / c + W$$

到着間隔
サービス時間
サーバ数
待ち時間制約

複数クラスモデル

- 客に複数のクラスが存在するモデル
 - サービス時間
 - 待ち時間制約の長さ
- } 独立でない状況を記述

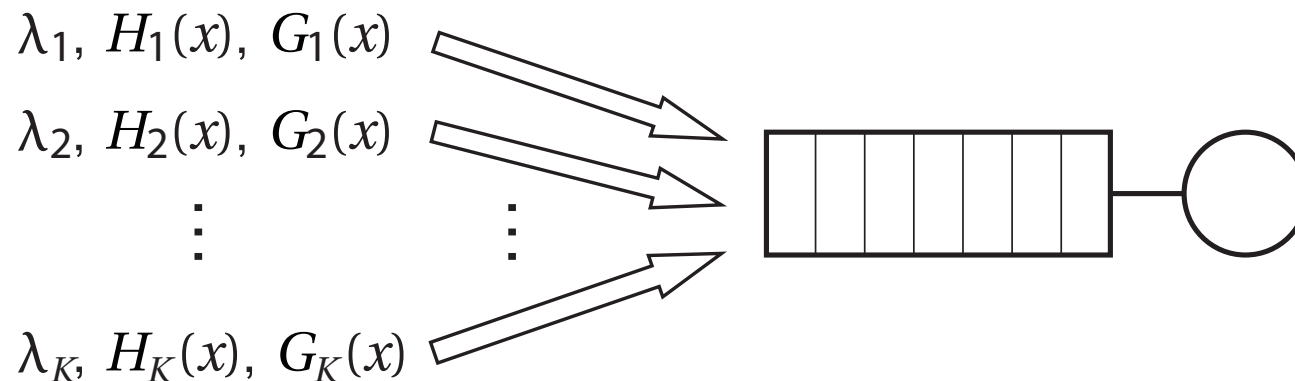
(例 1) サービスが短時間で済む客は、待ち時間制約が厳しい

(例 2) リアルタイム通信と通常のデータ通信の重畳

- ◆ パケット長分布はアプリケーション依存

考察するモデル

- 客に K 種類のクラスが存在
 - ◆ クラスの集合 $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$
- クラス k ($k \in \mathcal{K}$) の客
 - ◆ 率 λ_k のポアソン過程に従って到着
 - ◆ サービス時間は分布関数 $H_k(x)$ に従って i.i.d.
 - ◆ 待ち時間制約は分布関数 $G_k(x)$ に従って i.i.d.



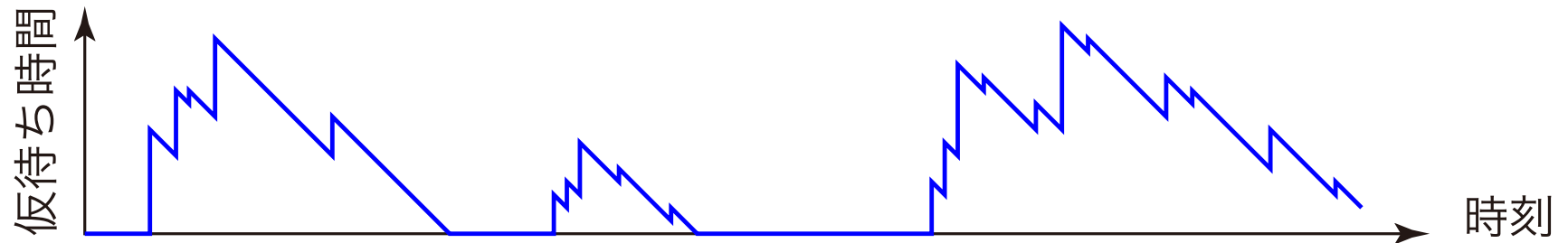
仮待ち時間過程

- 仮待ち時間：現時点で系内に居る客が、
全て離脱するまでに必要な時間
 - ◆ 客の待ち時間は，到着直前における仮待ち時間に等しい

上向きジャンプ発生



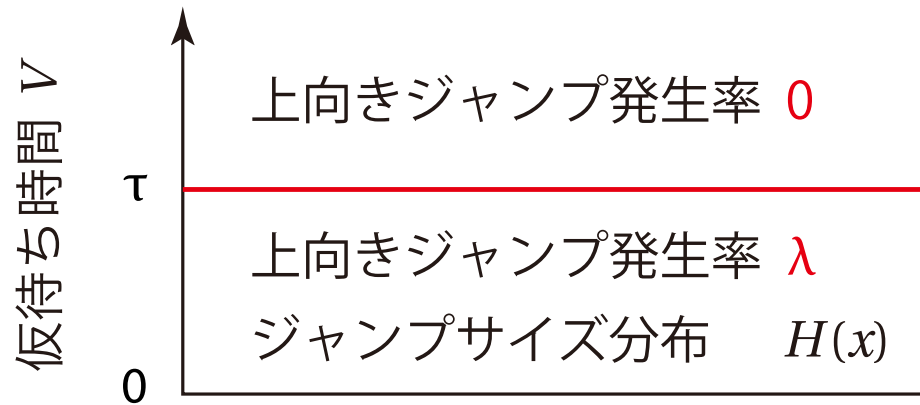
客の到着が発生し，かつ，
待ち時間制約 $>$ 到着直前の仮待ち時間



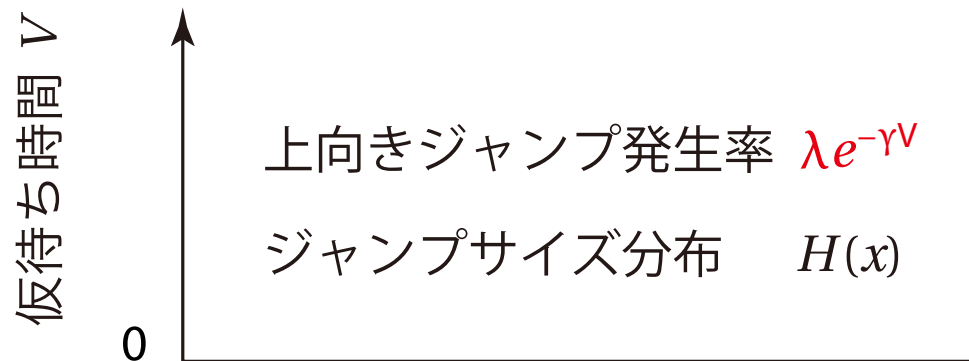
単一クラスモデル ($K = 1$) の例

到着客 λ , $H(x)$, $G(x)$

- 例 1) 待ち時間制約は τ で一定 (M/G/1+D)



- 例 2) 待ち時間制約はパラメタ γ の指数分布に従う (M/G/1+M)

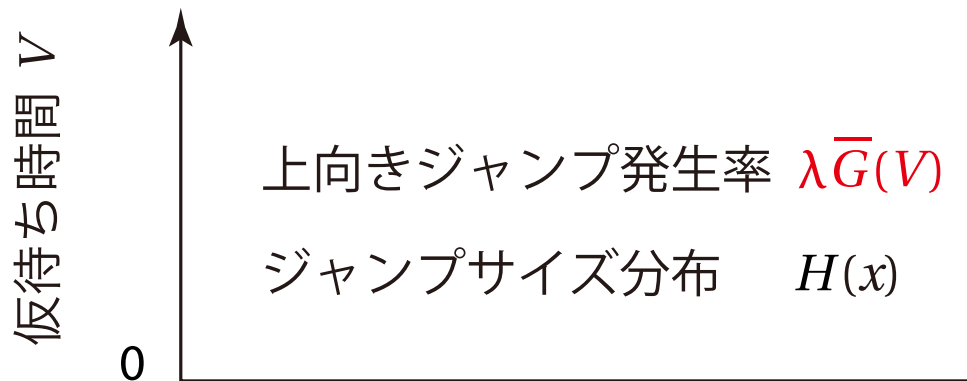


単一クラスモデル ($K = 1$)

$\bar{G}(x)$: 待ち時間制約の補分布関数

- 一般に, 単一クラス M/G/1+G では

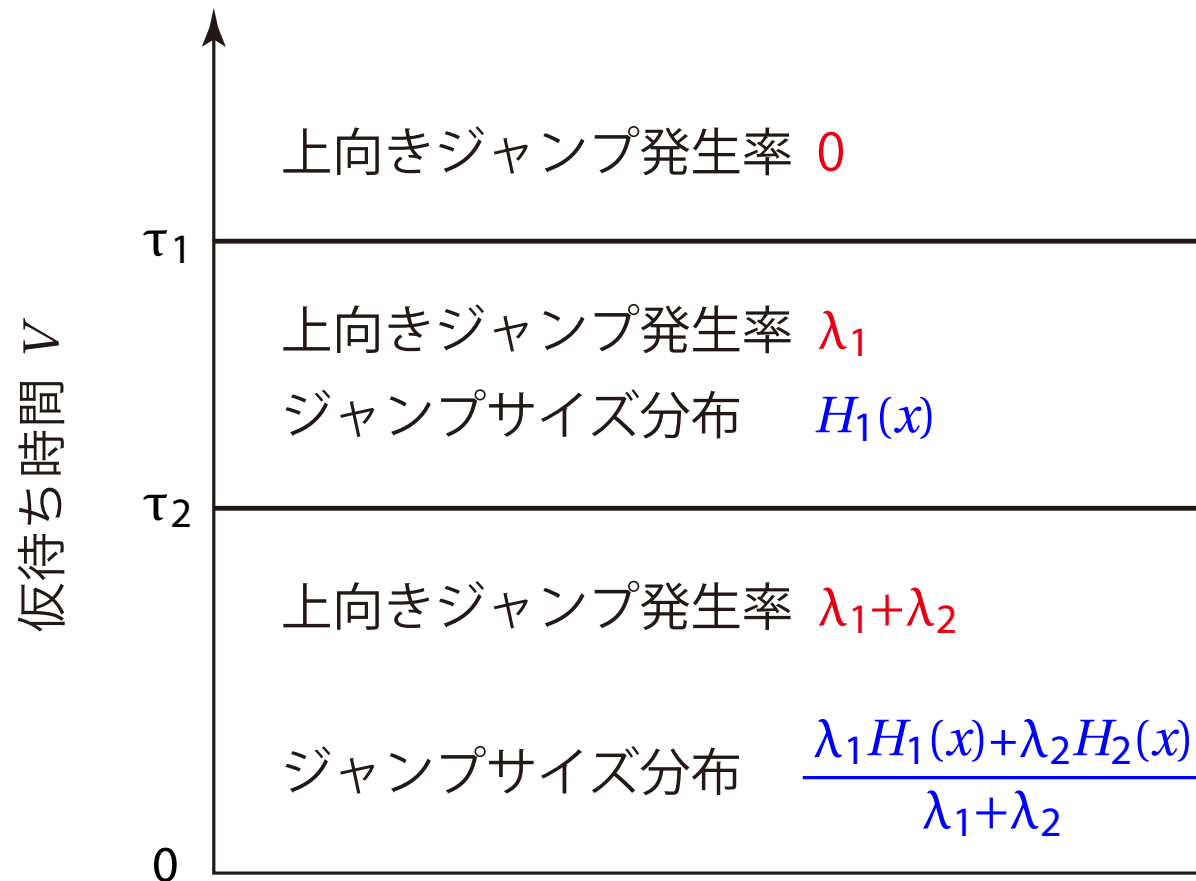
上向きジャンプの発生率がレベルに依存する



複数クラスモデルの例

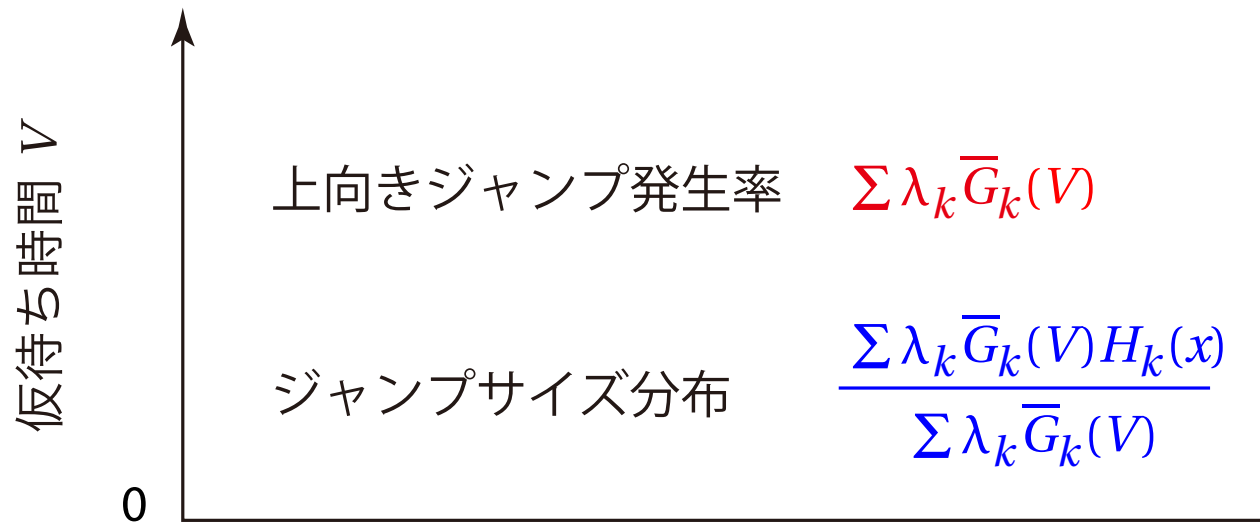
- 例) 2クラス M/G/1+D

- ◆ クラス k ($k = 1, 2$) の客の待ち時間制約は τ_k ($\tau_1 > \tau_2$) で一定



複数クラスモデル

- 一般に，複数クラス M/G/1+G では上向きジャンプの発生率だけでなく，大きさの分布もレベルに依存する



仮待ち時間過程を特徴付ける量

次式で定義される $\bar{\Lambda}(y|x)$ を考えると、以上のことは容易に理解可能

$$\bar{\Lambda}(y|x) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k \bar{G}_k(x) \bar{H}_k(y)$$

- ◆ レベルが x である期間に、 y より大きい上向きジャンプが発生する率
- 複数クラス M/G/1+G の仮待ち時間過程
 - = $\bar{\Lambda}(y|x)$ ($x \geq 0, y \geq 0$) で特徴付けられる、左飛び越しのない連続時間マルコフ過程
- クラスが単一である場合、 $\bar{\Lambda}(y|x) = \lambda \bar{G}(x) \bar{H}(y)$
 - ◆ 上向きジャンプサイズの分布が、レベルに依存しない

クラスの区別を無くした場合

- クラスが単一である場合, $\bar{\Lambda}(y | x) = \lambda \bar{G}(x) \bar{H}(y)$
 - ◆ 上向きジャンプサイズの分布が, レベルに依存しない
- ➡ 複数クラス M/G/1+G では, クラスを区別せずに取り扱ったとしても単一クラス M/G/1+G と等価にはならない

したがって,

- 単一クラス M/G/1+G に対する既存の結果
 - ◆ 複数クラスモデルに直接適用することはできない

先行研究

待ち時間に制約のあるモデルにおいて,

複数クラスの場合を取り扱っている研究は少ない

- 複数クラス MAP/PH/1+D [van Houdt (2012)]
 - ◆ 仮待ち時間分布, 実待ち時間分布, 呼損率
- 複数クラス M/PH/1+D [佐久間, 滝根 (2013)]
 - ◆ 仮待ち時間分布, 実待ち時間分布, 呼損率, 系内客数分布
- 複数クラス M/G/1+M [佐久間 (2014)]
 - ◆ 仮待ち時間分布, 実待ち時間分布, 呼損率, 系内客数分布

発表の概要

- 複数クラス $M/G/1+G$ の定常仮待ち時間分布を考察
 - ◆ 割り込み再開型後着順サービスの, 等価なモデルを解析
 - ➡ 解の構造が, 単一クラスの場合と同様であることを示す

さらに,

- $H(x)$ や $G(x)$ に具体的な分布を仮定した場合に生じる, 解の単純化について論じる
- 仮待ち時間分布を用いて
 - ◆ 実待ち時間分布, 呼損率, 系内客数分布を導出

モデルの仮定

$$\bar{\Lambda}(y | x) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k \bar{G}_k(x) \bar{H}_k(y)$$

- $\lambda(x)$: レベルが x であるときのジャンプ発生率
- $E[H | x]$: レベルが x であるときの平均ジャンプサイズ

$$\lambda(x)E[H | x] = \int_0^{\infty} \bar{\Lambda}(y | x) dy$$

- 以降では, $\lim_{x \rightarrow \infty} \lambda(x)E[H | x] < 1$ を仮定

系は安定であり, 定常状態が存在 [Meyn and Tweedie (1993)]

- また, 簡単のため $H_k(0) = 0, G_k(0) = 0$ ($k \in \mathcal{K}$) を仮定する

定常仮待ち時間分布

- 定常仮待ち時間分布を, π_0 と $\nu(x)$ ($x > 0$) により表す
 - ◆ π_0 : 系が空である確率
 - ◆ $\nu(x)$: 仮待ち時間分布の密度関数

定義より,
$$\pi_0 + \int_{0+}^{\infty} \nu(x) dx = 1$$

系が空である確率 π_0

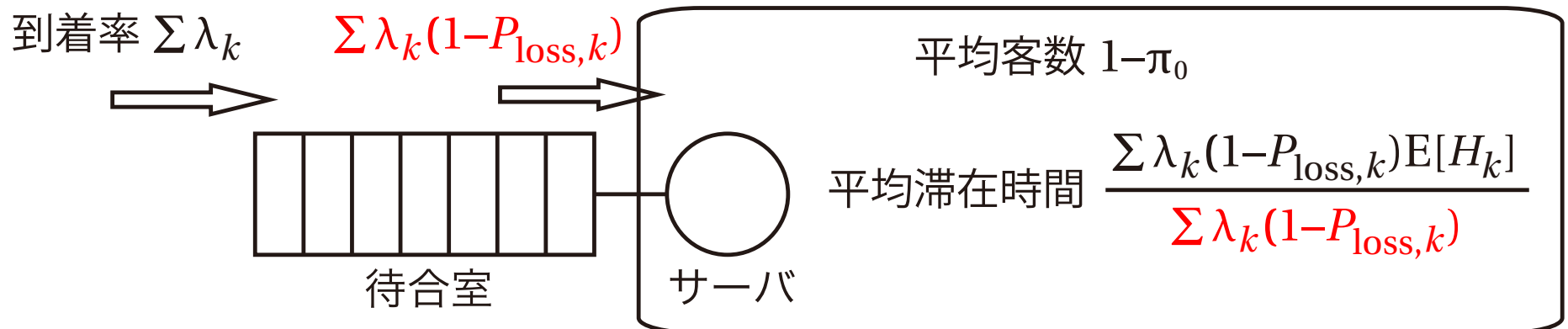
$P_{\text{loss},k}$: クラス k の客が途中退去する確率

- π_0 は $v(x)$ ($x \geq 0$) の形状と無関係ではない

$$\pi_0 = 1 - \sum_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k (1 - P_{\text{loss},k}) E[H_k]$$

$$P_{\text{loss},k} = \int_{0+}^{\infty} G_k(x) v(x) dx$$

リトルの公式を適用



複数クラス $M/G/1+G$ の仮待ち時間分布

等価な系内仕事量過程

- 客は率 $\lambda = \sum_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k$ のポアソン過程に従って到着
- 到着直前における系内仕事量が x である場合
 - ◆ 確率 $G(x) (= 1 - \bar{G}(x))$ で呼損し，即座に離脱
 - 確率 $\bar{G}(x)$ で系に受け入れられる
 - ◆ サービス時間は補分布関数 $\bar{H}(y | x)$ に従う

$$\bar{G}(x) \triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{\lambda_k}{\lambda} \cdot \bar{G}_k(x) = \frac{\bar{\Lambda}(0 | x)}{\bar{\Lambda}(0 | 0)}$$

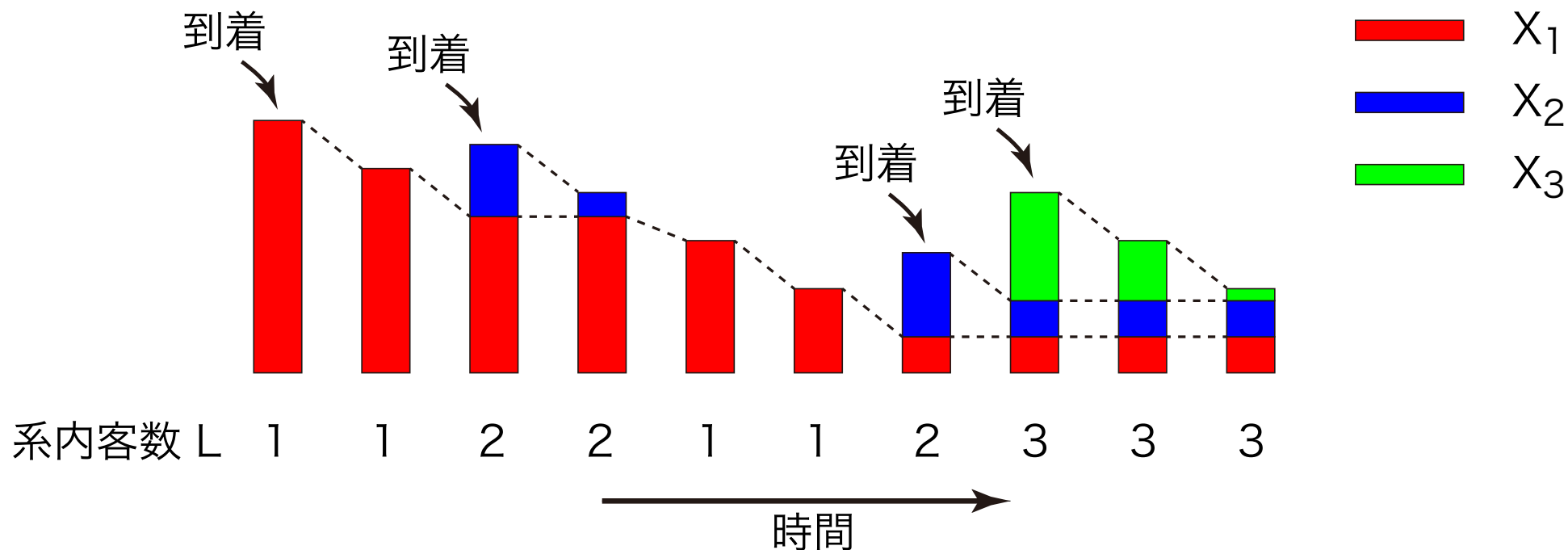
$$\bar{H}(y | x) \triangleq \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{\lambda_k \bar{G}_k(x)}{\lambda \bar{G}(x)} \cdot \bar{H}_k(y) = \frac{\bar{\Lambda}(y | x)}{\bar{\Lambda}(0 | x)}$$

割り込み再開型後着順サービス規律

- 割り込み再開型後着順サービス (LCFS-PR) を仮定
 - ◆ 総系内仕事量は先着順サービスの場合と同じ

L : 定常状態における系内客数

X_i : 系内で i 番目に到着した客の残余サービス時間



結合系内仕事量分布

- 系内客数 $L = n$ である確率

$$p_n \triangleq \Pr(L = n)$$

- $L = n$ という条件下での結合系内仕事量分布

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n | n) \triangleq \Pr(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n | L = n)$$

- ◆ 対応する結合密度関数

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | n) \triangleq \frac{\partial^n F(x_1, x_2, \dots, x_n | n)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_n}$$

結合系内仕事量分布 ($L = 3$)

例えば, $L = 3$ の場合

- $p_3 F(x_1, x_2, x_3 | 3) : (X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3)$ である時間割合
- 時間平均量と客平均量の関係式 $H = \lambda G$
[Heyman and Stidham, Jr. (1980)]

$(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3)$
である時間割合

= \mathcal{A}_3 の客の到着率 \times \mathcal{A}_3 の客が $(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3)$
の期間にサービスを受ける平均時間

\mathcal{A}_3 : $L = 2$ のときに到着し, 呼損しない客の集合
($L = 3 \Leftrightarrow \mathcal{A}_3$ の客がサービス中)

結合系内仕事量分布 ($L = 3$)

例えば, $L = 3$ の場合

- $p_3 F(x_1, x_2, x_3 | 3) : (X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3)$ である時間割合
- 時間平均量と客平均量の関係式 $H = \lambda G$
[Heyman and Stidham, Jr. (1980)]

$(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3)$ である合計時間
全観測時間

$$= \frac{\mathcal{A}_3 \text{ の客の総到着数}}{\text{全観測時間}} \times \mathcal{A}_3 \text{ の客が } (X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3) \text{ の期間にサービスを受ける平均時間}$$

\mathcal{A}_3 : $L = 2$ のときに到着し, 呼損しない客の集合
($L = 3 \Leftrightarrow \mathcal{A}_3$ の客がサービス中)

結合系内仕事量分布 ($L = 3$)

$$p_3 F(x_1, x_2, x_3 | 3) = \lambda(\mathcal{A}_3) \times \int_{y_1=0+}^{x_1} \int_{y_2=0+}^{x_2} \hat{f}(y_1, y_2 | \mathcal{A}_3) dy_1 dy_2 \cdot \int_{y_3=0+}^{x_3} \bar{H}(y_3 | y_1 + y_2) dy_3$$

- $\lambda(\mathcal{A}_3)$: \mathcal{A}_3 の客の到着率
- $\hat{f}(x_1, x_2 | \mathcal{A}_3)$: \mathcal{A}_3 の客が到着直前に見る結合仕事量密度

$$\hat{f}(x_1, x_2 | \mathcal{A}_3) = \frac{\lambda p_2}{\lambda(\mathcal{A}_3)} \cdot f(x_1, x_2 | 2) \bar{G}(x_1 + x_2)$$

以上より，次式が導かれる

$$p_3 f(x_1, x_2, x_3 | 3) = p_2 f(x_1, x_2 | 2) \cdot \lambda \bar{G}(x_1 + x_2) \bar{H}(x_3 | x_1 + x_2)$$

結合系内仕事量密度

- 同様の観察により, 次の漸化式が導かれる

$$p_1 f(x_1) = \pi_0 \cdot \lambda \bar{H}(x_1 | 0),$$

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n) = p_{n-1} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1} | n-1) \\ \cdot \lambda \bar{G}\left(\sum_{m=1}^{n-1} x_m\right) \bar{H}(x_n | \sum_{m=1}^{n-1} x_m), \\ n = 2, 3, \dots$$

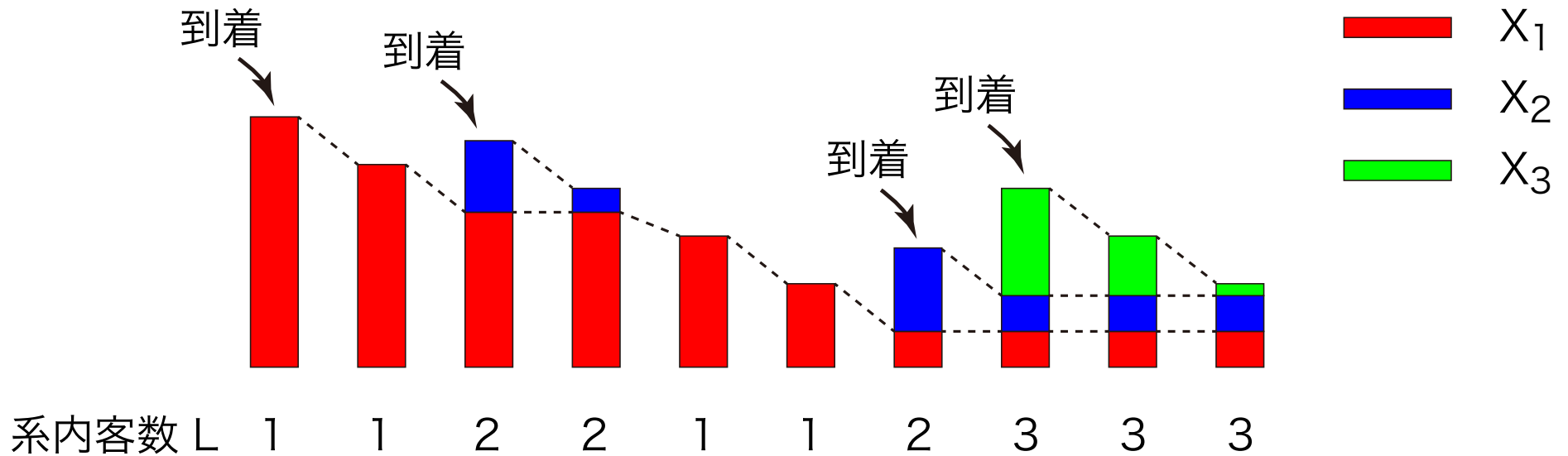
結合系内仕事量密度

以上より,

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n)$$

$$= \pi_0 \cdot \lambda \bar{H}(x_1 | 0) \cdot \lambda \bar{G}(x_1) \bar{H}(x_2 | x_1) \cdot \lambda \bar{G}(x_1 + x_2) \bar{H}(x_3 | x_1 + x_2)$$

$$\dots \lambda \bar{G}(x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1}) \bar{H}(x_n | x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1})$$



結合系内仕事量密度

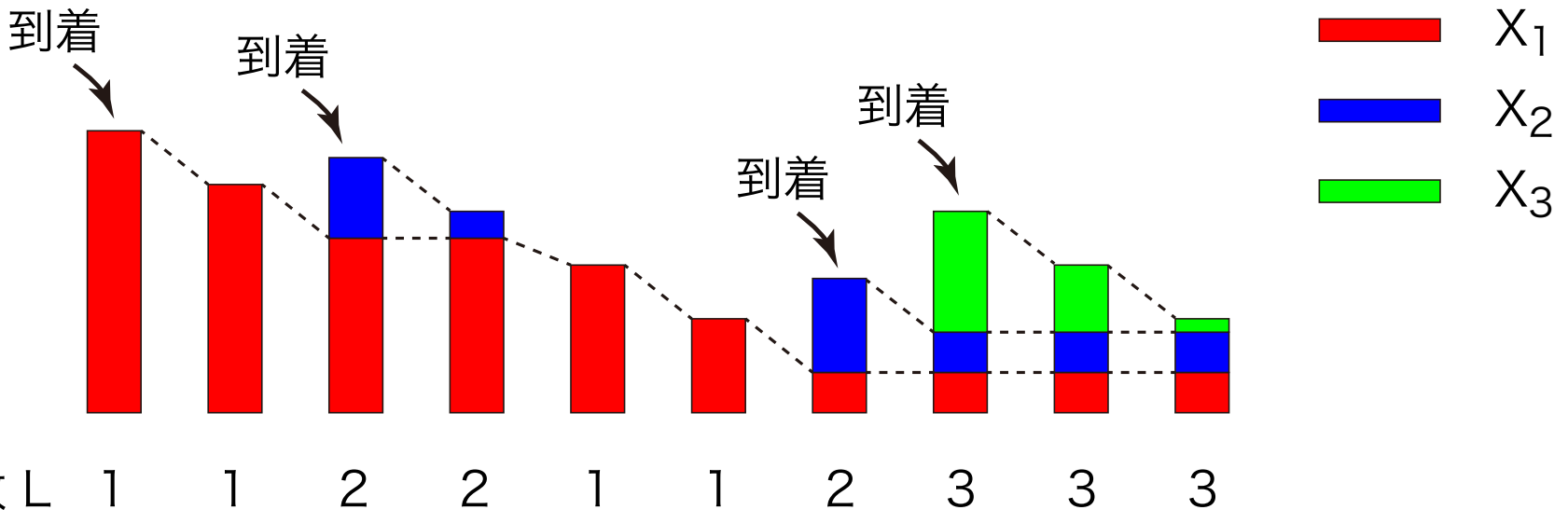
$\bar{\Lambda}(y | x)$: レベルが x である期間に,
 y より大きい上向きジャンプ
 が発生する率

以上より,

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n)$$

$$= \pi_0 \cdot \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \cdot \bar{\Lambda}(x_2 | x_1) \cdot \bar{\Lambda}(x_3 | x_1 + x_2) \cdots \bar{\Lambda}(x_n | x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$$

$$= \pi_0 \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \prod_{i=2}^n \bar{\Lambda}(x_i | \sum_{j=1}^{i-1} x_j)$$



結合系内仕事量密度

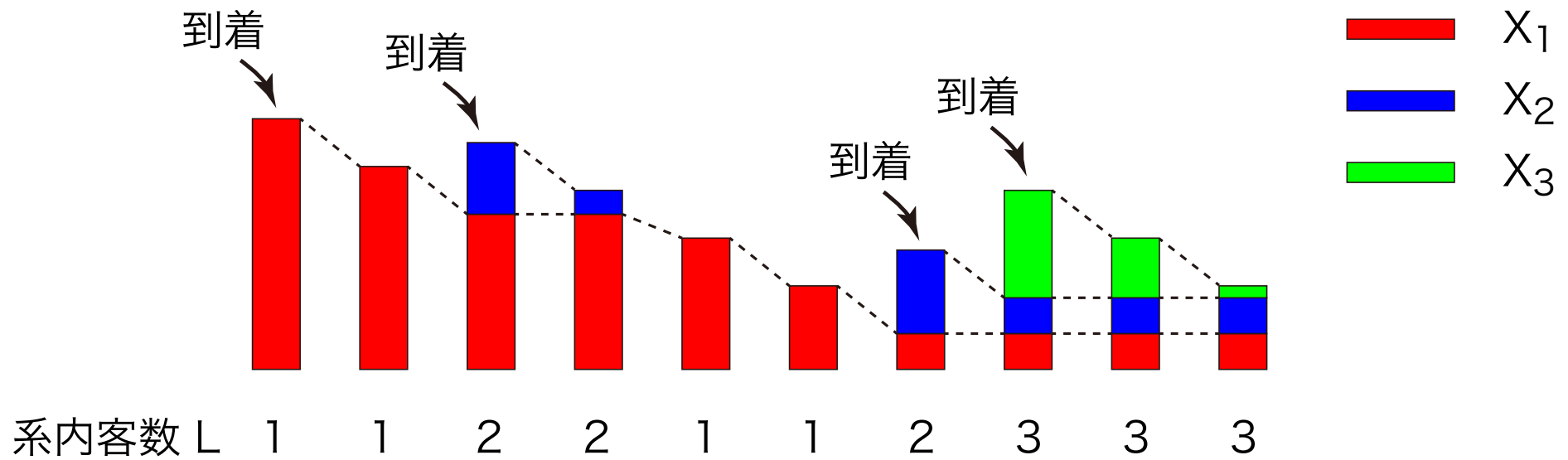
以上より,

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n)$$

$$= \pi_0 \cdot \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \cdot \bar{\Lambda}(x_2 | x_1) \cdot \bar{\Lambda}(x_3 | x_1 + x_2) \cdots \bar{\Lambda}(x_n | x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1})$$

$$= \pi_0 \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \prod_{i=2}^n \bar{\Lambda}(x_i | \sum_{j=1}^{i-1} x_j)$$

$\bar{\Lambda}(y | x)$: レベルが x である期間に,
 y より大きい上向きジャンプ
 が発生する率



複数クラス M/G/1+G の仮待ち時間分布

結合仕事量分布の周辺化を行う

- $v(x | n)$: $L = n$ という条件下における仮待ち時間の密度関数

$$p_n v(x | n) = \int_{\mathcal{D}_+(x | n-1)} p_n f(\mathbf{x}^{[n-1]}, x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m | n) d\mathbf{x}^{[n-1]}$$

$$\mathbf{x}^{[n]} \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathcal{D}_+(x | n) \triangleq \{\mathbf{x}^{[n]}; \mathbf{x}^{[n]} > \mathbf{0}, \sum_{m=1}^n x_m < x\}$$

- 仮待ち時間分布の密度関数 $v(x)$ は次式で与えられる

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n v(x | n)$$

複数クラス M/G/1+G の仮待ち時間分布

結合仕事量分布の周辺化を行う

- $v(x | n)$: $L = n$ という条件下における仮待ち時間の密度関数

$$p_n v(x | n) = \pi_0 \int_{\mathcal{D}_+(x | n-1)} \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{\Lambda}(x_i | \sum_{j=1}^{i-1} x_j) \right\} \\ \cdot \bar{\Lambda}(x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m | \sum_{m=1}^{n-1} x_m) d\mathbf{x}^{[n-1]}$$

$$\mathbf{x}^{[n]} \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathcal{D}_+(x | n) \triangleq \{\mathbf{x}^{[n]}; \mathbf{x}^{[n]} > \mathbf{0}, \sum_{m=1}^n x_m < x\}$$

- 仮待ち時間分布の密度関数 $v(x)$ は次式で与えられる

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n v(x | n)$$

複数クラス M/G/1+G の仮待ち時間分布

結合仕事量分布の周辺化を行う

- $v(x | n)$: $L = n$ という条件下における仮待ち時間の密度関数

$$p_n v(x | n) = \pi_0 \int_{\mathcal{D}_+(x | n-1)} \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{\Lambda}(x_i | \sum_{j=1}^{i-1} x_j) \right\} \\ \cdot \bar{\Lambda}(x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m | \sum_{m=1}^{n-1} x_m) d\mathbf{x}^{[n-1]}$$

$$\mathbf{x}^{[n]} \triangleq (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \mathcal{D}_+(x | n) \triangleq \{\mathbf{x}^{[n]}; \mathbf{x}^{[n]} > \mathbf{0}, \sum_{m=1}^n x_m < x\}$$

- 仮待ち時間分布の密度関数 $v(x)$ は次式で与えられる

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n v(x | n)$$

系が空である確率 π_0

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n) = \pi_0 \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \prod_{i=2}^n \bar{\Lambda}(x_i | \sum_{j=1}^{i-1} x_j)$$

● $\int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} f(x_1, x_2, \dots, x_n | n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1 = 1$

を用いると, p_n が得られる

$$p_n = \pi_0 \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} \bar{\Lambda}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{\Lambda}(x_i | \sum_{j=1}^{i-1} x_j) \right\} \cdot dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1$$

➡ $\pi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ より, π_0 が定められる

積分方程式の級数解との関係

- $p_n v(x | n)$ は次の漸化式を満たす

$$p_1 v(x | 1) = \pi_0 \bar{\Lambda}(x | 0),$$

$n-1$ 個分の合計が y

$$p_n v(x | n) = \int_{0+}^x p_{n-1} v(y | n-1) \bar{\Lambda}(x-y | y) dy, \quad n = 2, 3, \dots$$

- ➔ $v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n v(x | n)$ は次のヴォルテラ積分方程式の解

$$v(x) = \pi_0 \bar{\Lambda}(x | 0) + \int_{0+}^x v(y) \bar{\Lambda}(x-y | y) dy$$

- [Baccelli et al. (1984)] では単一クラス M/G/1+G に対し、この積分方程式を形式的に解くことで $v(x)$ の級数表現を導出

特別な場合

特別なモデル

- サービス時間や待ち時間制約に具体的な分布を仮定
 - ◆ 仮待ち時間密度を与える多重積分が単純化される場合がある
- ここでは主に、単一クラスモデルを取り上げる
 - ◆ 単一クラス $M/G/1+M$, $M/G/1+D$, $M/M/1+G$
- また、複数クラス $M/G/1+M$ で生じる複雑さについて述べる

結合系内仕事量密度

- 複数クラス M/G/1+G の場合

$$p_1 f(x_1) = \pi_0 \cdot \lambda \bar{H}(x_1 | \mathbf{0})$$

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n)$$

$$= p_{n-1} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1} | n-1) \cdot \lambda \bar{G}\left(\sum_{m=1}^{n-1} x_m\right) \bar{H}(x_n | \sum_{m=1}^{n-1} x_m)$$

- 単一クラス M/G/1+G の場合

$$p_1 f(x_1) = \pi_0 \cdot \lambda \bar{H}(x_1)$$

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n)$$

$$= p_{n-1} f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1} | n-1) \cdot \lambda \bar{G}\left(\sum_{m=1}^{n-1} x_m\right) \bar{H}(x_n)$$

単一クラス M/G/1+G の仮待ち時間分布

$\tilde{h}(x) \triangleq \bar{H}(x)/E[H]$ (サービス時間の残余寿命密度)

- 結合系内仕事量密度

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n) = \pi_0 \rho^n \tilde{h}(x_1) \prod_{i=2}^n \bar{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) \tilde{h}(x_i)$$

- LCFS-PR での系内客数分布 p_n

$$p_n = \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n) dx_n dx_{n-1} \cdots dx_1$$

- 仮待ち時間密度 $v(x)$

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{D}_+(x|n-1)} p_n f(\mathbf{x}^{[n-1]}, x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m | n) d\mathbf{x}^{[n-1]}$$

単一クラス M/G/1+M (1)

$$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{G}(\sum_{j=1}^{i-1} x_j) \tilde{h}(x_i) \right\} d\mathbf{x}^{[n]}$$

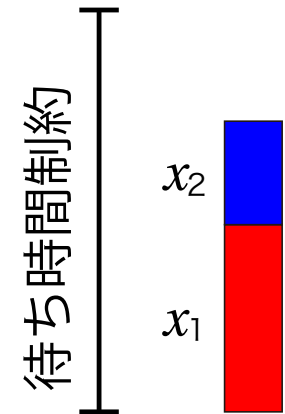
- 待ち時間制約が指数分布に従う

- ◆ $\bar{G}(x) = e^{-\gamma x}$

このとき, $\bar{G}(x_1 + x_2) = \bar{G}(x_1)\bar{G}(x_2)$ が成立 (無記憶性)

- $\bar{G}(x_1)\bar{G}(x_1 + x_2)\bar{G}(x_1 + x_2 + x_3)$
 $= [\bar{G}(x_1)]^3 [\bar{G}(x_2)]^2 [\bar{G}(x_3)]^1$

積分変数に関して積の形



単一クラス M/G/1+M (1)

$$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{G}(\sum_{j=1}^{i-1} x_j) \tilde{h}(x_i) \right\} d\mathbf{x}^{[n]}$$

- 待ち時間制約が指数分布に従う

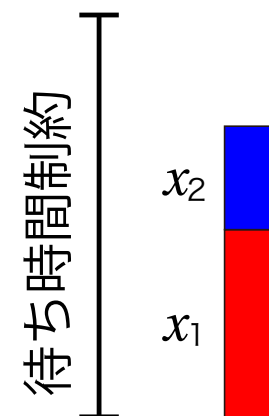
- ◆ $\bar{G}(x) = e^{-\gamma x}$

このとき, $\bar{G}(x_1 + x_2) = \bar{G}(x_1)\bar{G}(x_2)$ が成立 (無記憶性)

$$\rightarrow p_n = \pi_0 \rho^n \prod_{i=1}^n \int_{x_i=0+}^{\infty} [\bar{G}(x_i)]^{n-i} \tilde{h}(x_i) dx_i$$

$$= \pi_0 \rho^n \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{h}^*(i\gamma)$$

$\tilde{h}^*(s)$: $\tilde{h}(x)$ の LST



単一クラス M/G/1+M (2)

- 同様に，仮待ち時間分布の密度関数を考えると

$$\begin{aligned}v(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n v(x | n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \pi_0 \rho^n \int_{\mathcal{D}_+(x|n-1)} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{h}(x_i) [e^{-\gamma x_i}]^{n-i} \right\} \tilde{h}\left(x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m\right) d\mathbf{x}^{[n-1]} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot \psi_0 * \psi_1 * \cdots * \psi_{n-1}(x)\end{aligned}$$

ただし * は畳み込みを表し，

$$\psi_m(x) \triangleq \frac{\tilde{h}(x) e^{-m\gamma x}}{\tilde{h}^*(m\gamma)}, \quad m = 0, 1, \dots$$

単一クラス M/G/1+D (1)

$$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{x_1=0+}^{\infty} \int_{x_2=0+}^{\infty} \cdots \int_{x_n=0+}^{\infty} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{G} \left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j \right) \tilde{h}(x_i) \right\} d\mathbf{x}^{[n]}$$

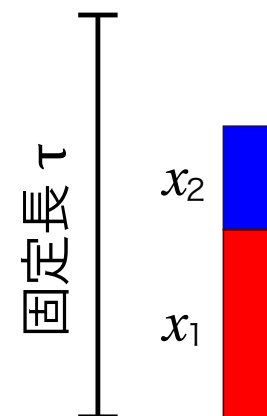
- 待ち時間制約の長さが τ で一定

$$\bar{G}(x) = \begin{cases} 1, & x < \tau, \\ 0, & x \geq \tau \end{cases}$$

- このとき、任意の $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ に対し、

- ◆ $\bar{G}(x_1) = 0$ ならば $\bar{G}(x_1 + x_2) = 0$

➔
$$p_n = \pi_0 \rho^n \int_{\mathcal{D}_+(\tau|n-1)} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{h}(x_i) \right\} d\mathbf{x}^{[n-1]}$$



単一クラス M/G/1+D (2)

$$\rho_n = \pi_0 \rho^n \int_{\mathcal{D}_+(\tau|n-1)} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{h}(x_i) \right\} d\mathbf{x}^{[n-1]}$$

- $\tilde{h}^{(n)}(x) \triangleq \underbrace{\tilde{h} * \tilde{h} * \dots * \tilde{h}}_n(x), \quad \tilde{H}^{(n)}(x) \triangleq \int_0^x \tilde{h}^{(n)}(y) dy$ と定義

➡ $\rho_n = \pi_0 \rho^n \tilde{H}^{(n-1)}(\tau)$

- 同様にして，仮待ち時間分布の密度関数は次式で与えられる

$$v(x) = \begin{cases} \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \tilde{h}^{(n)}(x), & \text{(普通の M/G/1 と同じ)} & x \leq \tau, \\ \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_{\mathcal{D}_+(\tau|n-1)} \left\{ \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{h}(x_i) \right\} \tilde{h}\left(x - \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right) d\mathbf{x}^{[n-1]}, & x > \tau \end{cases}$$

単一クラス M/M/1+G (1)

$$p_n v(x | n) = \pi_0 \rho^n \int_{\mathcal{D}_+(x|n-1)} \tilde{h}(x_1) \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) \tilde{h}(x_i) \right\} \\ \cdot \bar{G}\left(\sum_{m=1}^{n-1} x_m\right) \tilde{h}\left(x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m\right) d\mathbf{x}^{[n-1]}$$

- サービス時間はパラメタ μ の指数分布に従う

➡ $\tilde{h}(x) = \mu e^{-\mu x}$ (無記憶性)

- このとき, $\tilde{h}(x_1)\tilde{h}(x_2) = \mu \cdot \tilde{h}(x_1 + x_2)$

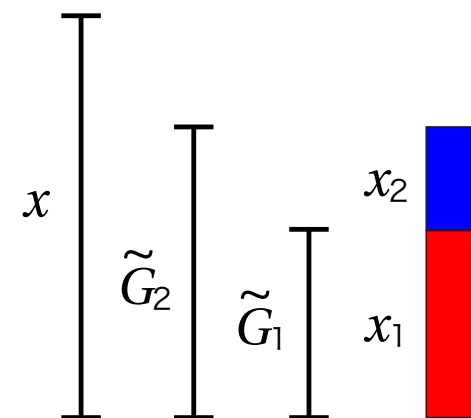
➡ $p_n v(x | n) = \pi_0 \rho^n \cdot \mu^{n-1} \tilde{h}(x) \int_{\mathcal{D}_+(x|n-1)} \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{G}\left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j\right) \right\} d\mathbf{x}^{[n-1]}$

単一クラス M/M/1+G (2)

$$p_n v(x | n) = \pi_0 \rho (\lambda E[G])^{n-1} \tilde{h}(x) \int_{\mathcal{D}_+(x|n-1)} \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{G} \left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j \right) / E[G] \right\} d\mathbf{x}^{[n-1]}$$

- $\{\tilde{G}_i\}$: 待ち時間制約の残余寿命分布に従って i.i.d の確率変数列
 - ◆ 密度関数は $\bar{G}(x)/E[G]$. 分布関数を $\tilde{G}(x)$ とする

$$\begin{aligned} & \int_{\mathcal{D}_+(x|n-1)} \left\{ \prod_{i=2}^n \bar{G} \left(\sum_{j=1}^{i-1} x_j \right) / E[G] \right\} d\mathbf{x}^{[n-1]} \\ &= \Pr(\tilde{G}_1 < \tilde{G}_2 < \dots < \tilde{G}_{n-1} < x) \\ &= \frac{[\tilde{G}(x)]^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$



(並べ替えが $(n-1)!$ 通りある)

単一クラス M/M/1+G (3)

- したがって,

$$p_n \nu(x | n) = \pi_0 \lambda e^{-\mu x} \cdot \frac{[\lambda E[G] \tilde{G}(x)]^{n-1}}{(n-1)!}$$

より, 仮待ち時間分布の密度関数は次式で与えられる

$$\begin{aligned} \nu(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n \nu(x | n) \\ &= \pi_0 \lambda \exp(-\mu x + \lambda E[G] \tilde{G}(x)) \end{aligned}$$

- また, p_n は次式で与えられる

$$p_n = \pi_0 \rho \cdot \frac{(\lambda E[G])^{n-1}}{(n-1)!} \int_{0+}^{\infty} \mu e^{-\mu y} [\tilde{G}(y)]^{n-1} dy,$$

2 クラス M/G/1+M (1)

- 2 クラス M/G/1+M を考える

- ◆ $\bar{G}_k(x) = e^{-\gamma_k x}, \quad k = 1, 2$

- ◆ $\bar{\Lambda}(y | x) = \lambda_1 \bar{H}_1(y) e^{-\gamma_1 x} + \lambda_2 \bar{H}_2(y) e^{-\gamma_2 x}$

このとき,

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n)$$

$$= \pi_0 \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \prod_{i=2}^n \bar{\Lambda}(x_i | \sum_{j=1}^{i-1} x_j)$$

$$= \pi_0 \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \prod_{i=2}^n \left[\lambda_1 \bar{H}_1(x_i) \prod_{j=1}^{i-1} e^{-\gamma_1 x_j} + \lambda_2 \bar{H}_2(x_i) \prod_{j=1}^{i-1} e^{-\gamma_2 x_j} \right]$$

2 クラス M/G/1+M (2)

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n)$$

$$= \pi_0 \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \prod_{i=2}^n \left[\lambda_1 \bar{H}_1(x_i) \prod_{j=1}^{i-1} e^{-\gamma_1 x_j} + \lambda_2 \bar{H}_2(x_i) \prod_{j=1}^{i-1} e^{-\gamma_2 x_j} \right]$$

x_1, x_2, \dots, x_n に関して積の形になるが、
客の並びの異なり数 (2^n 通り) 分の和を
考える必要がある

$$\left(v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathcal{D}_+(x|n-1)} p_n f(\mathbf{x}^{[n-1]}, x - \sum_{m=1}^{n-1} x_m | n) d\mathbf{x}^{[n-1]} \right)$$

他の性能指標

呼損率と実待ち時間分布

PASTA より, 以下が導かれる

- $P_{\text{loss},k}$: クラス k の客が途中退去する確率

$$P_{\text{loss},k} = \int_{0+}^{\infty} \nu(x) G_k(x) dx$$

- $W_k(x)$: クラス k の (途中退去しない) 客の実待ち時間の分布関数

$$W_k(0) = \frac{1}{1 - P_{\text{loss},k}} \cdot \pi_0$$

$$W_k(x) = \frac{1}{1 - P_{\text{loss},k}} \left\{ \pi_0 + \int_{0+}^x \nu(y) \bar{G}_k(y) dy \right\}, \quad x > 0$$

FCFS での結合系内客数分布 (1)

[佐久間, 滝根 (2013)] と同じアプローチ

- 系内客数の結合母関数 $L^*(z_1, z_2, \dots, z_K)$ を次式により定義

$$L^*(z_1, z_2, \dots, z_K) = E \left[z_1^{L_1} \cdot z_2^{L_2} \cdots z_K^{L_K} \right]$$

L_k : 系内に滞留中のクラス k の客数

- $L^*(z_1, z_2, \dots, z_K)$ を次の形で表す

$$L^*(z_1, z_2, \dots, z_K) = \pi_0 + \sum_{k \in \mathcal{K}} \hat{\rho}_k z_k \cdot \underline{\hat{L}^*(z_1, z_2, \dots, z_K | k)}$$

クラス k の客がサービス中
という条件下での待ち客数

$\hat{\rho}_k$: クラス k の客の利用率

$$\hat{\rho}_k = \lambda_k (1 - P_{\text{loss},k}) E[H_k] \quad (\text{リトルの公式})$$

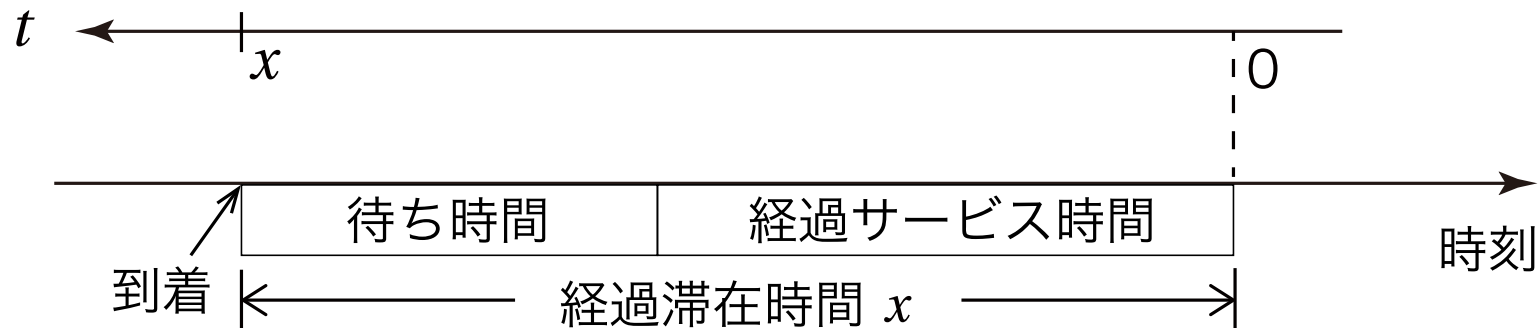
FCFS での結合系内客数分布 (2)

$$L^*(z_1, z_2, \dots, z_K) = \pi_0 + \sum_{k \in \mathcal{K}} \hat{\rho}_k z_k \cdot \hat{L}^*(z_1, z_2, \dots, z_K | k)$$

- $a_k(x)$: クラス k の客がサービス中であるという条件下での経過滞在時間 (Attained waiting time) の密度関数

$$\hat{L}^*(z_1, z_2, \dots, z_K | k) = \int_{0+}^{\infty} \left\{ \prod_{k \in \mathcal{K}} \exp\left(-\int_0^x \lambda_k \bar{G}_k(t)(1 - z_k) dt\right) \right\} a_k(x) dx$$

現時点で残っているクラス k の客だけに注目すると、
 到着率 $\lambda_k \bar{G}_k(t)$ の非斉時ポアソン到着



Attained waiting time

- $a_k(x)$: クラス k の客がサービス中であるという条件下での経過滞在時間 (Attained waiting time) の密度関数

$$\begin{aligned} a_k(x) &= \int_0^x \tilde{h}_k(x-y) dW_k(y) \\ &= \frac{\pi_0}{1 - P_{\text{loss},k}} \cdot \tilde{h}_k(x) + \frac{1}{1 - P_{\text{loss},k}} \int_{0+}^x v(y) \bar{G}_k(y) \cdot \tilde{h}_k(x-y) dy \end{aligned}$$

- ◆ $\tilde{h}_k(x) \triangleq \bar{H}_k(x) / E[H_k]$

クラス k の客の経過サービス時間密度

まとめ (1)

複数クラス $M/G/1+G$ の定常仮待ち時間分布を考察

- 割り込み再開型後着順サービスの, 等価なモデルを解析
 - ➡ 解の構造が, 単一クラスの場合と同様であることを示した

さらに,

- 特別なモデルにおける解の単純化について論じた
- 仮待ち時間分布をもとに, 他の性能指標を導出した

まとめ (2)

- 複数クラス M/G/1+G の仮待ち時間過程

= $\bar{\Lambda}(y | x)$ ($x \geq 0, y \geq 0$) で特徴付けられる,
左飛び越しのない連続時間マルコフ過程

- ◆ 結合系内仕事量密度

$$p_n f(x_1, x_2, \dots, x_n | n) = \pi_0 \bar{\Lambda}(x_1 | 0) \prod_{i=2}^n \bar{\Lambda}(x_i | \sum_{j=1}^{i-1} x_j)$$

- 今回は, クラスが有限集合 $\mathcal{K} = \{1, 2, \dots, K\}$ である場合を考えた

$$\bar{\Lambda}(y | x) = \sum_{k \in \mathcal{K}} \lambda_k \bar{G}_k(x) \bar{H}_k(y)$$

- $\bar{\Lambda}(y | x)$ ($x \geq 0, y \geq 0$) が定義される限りにおいて,
クラス数が有限であることは本質的ではない