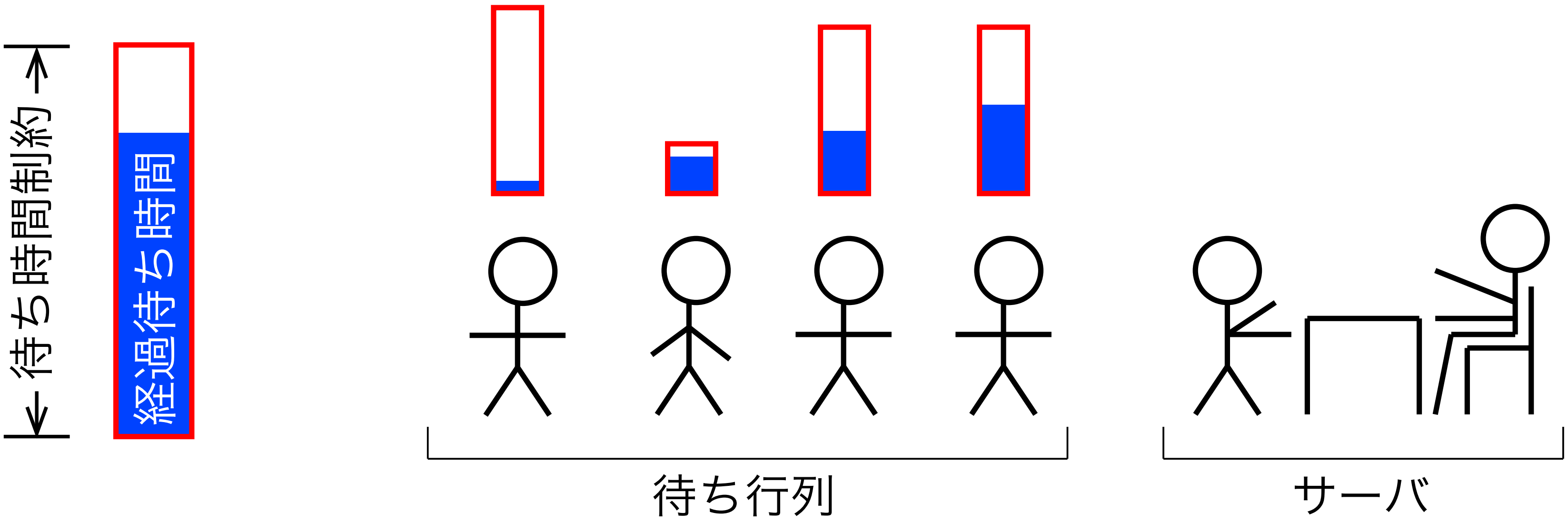
M/G/1+G 待ち行列における呼損率の解析と数値計算

*井上 文彰，滝根 哲哉

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

待ち時間制約のある待ち行列モデル

- 待ち時間が長すぎると，客はサービスを受けずに離脱する



- (例) 遅延制約のあるデータ通信，コールセンタ
- ケンドールの記法

A	/	B	/	c	+	W
到着間隔		サービス時間		サーバ数		待ち時間制約

考察するモデル

- 客がポアソン到着する単一サーバモデル (M/G/1+G) を考察
  - 客の到着は率 λ のポアソン過程に従う
  - サービス時間は分布関数 $H(x)$ に従って i.i.d.
  - 待ち時間制約は分布関数 $G(x)$ に従って i.i.d.
    - ただし，確率 $g_\infty \in [0,1)$ で待ち時間制約の無い客が到着

    ➡ $\lim_{x\to\infty} G(x) = 1 - g_\infty$

- 以降では，$\lambda g_\infty \mathrm{E}[H] < 1$ を仮定

  $\boxed{\mathrm{E}[H]：平均サービス時間}$

  ➡ 系は安定であり，定常状態が存在 [Baccelli et al. (1984)]

- また，簡単のため $G(0) = 0$，$H(0) = 0$ を仮定

呼損率 P_{loss}

P_{loss} : 客がサービスを受けずに途中退去する確率

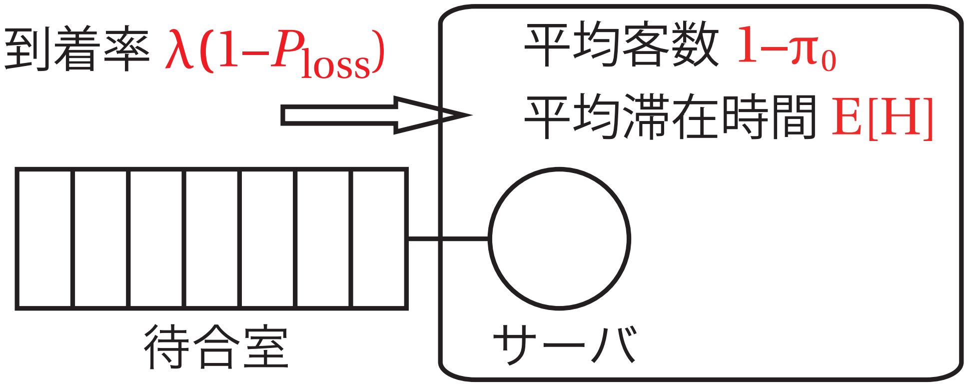
π_0 : 系が空である確率

- サーバ部分にリトルの公式を適用

$$1 - \pi_0 = \lambda(1 - P_{\mathrm{loss}})\mathrm{E}[H]$$

➡ P_{loss} は π_0 を用いて与えられる ($\rho \triangleq \lambda\mathrm{E}[H]$)

$$P_{\mathrm{loss}} = \frac{\rho - (1 - \pi_0)}{\rho}$$



呼損率 P_{loss}

P_{loss}：客がサービスを受けずに途中退去する確率

π_0　：系が空である確率

- サーバ部分にリトルの公式を適用

$$1 - \pi_0 = \lambda(1 - P_{\text{loss}})\mathrm{E}[H]$$

➡ P_{loss} は π_0 を用いて与えられる ($\rho \triangleq \lambda\mathrm{E}[H]$)

$$P_{\text{loss}} = \frac{\rho - (1 - \pi_0)}{\rho}$$

- さらに，π_0 は仮待ち時間の密度関数 $v(x)$ ($x > 0$) より得られる [Baccelli et al. (1984)]

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

$\tilde{h}(x)$: サービスの平衡分布の密度，$\overline{G}(x)$: 待ち時間制約の補分布

- 確率フローの平衡より，次式が導かれる

$$v(x) = \rho\pi_0\tilde{h}(x) + \rho\int_{0+}^{x} v(y)\overline{G}(y)\tilde{h}(x-y)\,dy, \qquad x > 0$$

➡ この積分方程式から，$v(x)$ ($x > 0$) は一意に定められる

$$v(x) = \pi_0\sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)$$

$$u(1;x) = \rho\tilde{h}(x), \quad u(n;x) = \rho\int_{0+}^{x} u(n-1;y)\overline{G}(y)\tilde{h}(x-y)\,dy, \;\; n = 2,3,\ldots$$

- 正規化条件より，π_0 は次式で与えられる ($\Rightarrow P_{\mathrm{loss}}$ が求まる)

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right]^{-1}, \qquad c_n = \int_{0+}^{\infty} u(n;x)\,dx$$

発表の概要

- 発表者らの知る限り，これまで，M/G/1+G の P_{loss} に関して [Baccelli et al. (1984)] の結果以上のことは報告されていない
  - P_{loss} は，再帰的に定まる関数列を用いて与えられている
  - ➡ λ, $H(x)$, $G(x)$ が P_{loss} に与える影響を評価するのは困難

本発表では，

- P_{loss} に対する陽表現公式を導出
  - ➡ λ, $H(x)$, $G(x)$ が P_{loss} に与える影響を理論的に考察
- M/G/1+PH に対する数値計算法を構築
  - ➡ λ, $H(x)$, $G(x)$ が P_{loss} に与える影響を数値的に考察

M/G/1+G における P_{loss} の解析

呼損率 P_{loss} の陽表現公式

- 呼損率 P_{loss} は次式で与えられる

$$P_{\mathrm{loss}} = \frac{\rho - (1 - \pi_0)}{\rho}, \qquad \pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)^{-1}$$

ただし,

$$c_1 = \rho, \qquad c_n = \rho^n \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i} \tilde{H}_j\right)\right], \quad n = 2, 3, \ldots$$

- ◆ $\{\tilde{H}_n\}_{n=1,2,\ldots}$: サービスの平衡分布に従う i.i.d. 確率変数列
- ◆ $\overline{G}(x)$ ：待ち時間制約の補分布関数

- この陽表現公式をもとに，モデルのパラメータ λ, $H(x)$, $G(x)$ が P_{loss} に与える影響を評価できる

(準備) 通常の確率順序と凸順序

X, Y：非負の確率変数

- 通常の確率順序 ($\leq_{\mathrm{st}}$)：確率変数の大きさを比較

$$X \leq_{\mathrm{st}} Y \;\Leftrightarrow\; \Pr(X > x) \leq \Pr(Y > x), \quad \forall x \geq 0$$

- 凸順序 ($\leq_{\mathrm{cx}}$)：確率変数の変動の大きさを比較

$$X \leq_{\mathrm{cx}} Y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] \text{ かつ}$$

$$\int_x^\infty \Pr(X > x)\,dx \leq \int_x^\infty \Pr(Y > x)\,dx, \quad \forall x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] \text{ かつ } \tilde{X} \leq_{\mathrm{st}} \tilde{Y}$$

($\tilde{X}$, $\tilde{Y}$: X, Y の平衡確率変数)

◆ 特に，$X \leq_{\mathrm{cx}} Y \Rightarrow \mathrm{Cv}[X] \leq \mathrm{Cv}[Y]$　　(Cv[·]：変動係数)

モデルのパラメータが P_{loss} に与える影響

二つの定常な M/G/1+G 待ち行列を考える
(肩文字 $\langle k \rangle$ で，k 番目の待ち行列の量を表す)

$H^{\langle k \rangle}$: サービス時間
$G^{\langle k \rangle}$: 待ち時間制約

(i) 同じ到着率とサービス時間分布をもつ場合

$G^{\langle 1 \rangle} \leq_{\mathrm{st}} G^{\langle 2 \rangle} \Rightarrow P_{\mathrm{loss}}^{\langle 1 \rangle} \geq P_{\mathrm{loss}}^{\langle 2 \rangle}$ (待ち時間制約が厳しい ⇒ P_{loss} が大)

(ii) 同じ到着率，平均サービス時間，待ち時間制約分布をもつ場合

$H^{\langle 1 \rangle} \leq_{\mathrm{cx}} H^{\langle 2 \rangle} \Rightarrow P_{\mathrm{loss}}^{\langle 1 \rangle} \leq P_{\mathrm{loss}}^{\langle 2 \rangle}$ (サービス時間の変動大 ⇒ P_{loss} が大)

(iii) 同じサービス時間分布と待ち時間制約分布をもつ場合

$\lambda^{\langle 1 \rangle} \leq \lambda^{\langle 2 \rangle} \Rightarrow P_{\mathrm{loss}}^{\langle 1 \rangle} \leq P_{\mathrm{loss}}^{\langle 2 \rangle}$ (到着率大 ⇒ P_{loss} が大)

証明の概略

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{1-\pi_0}{\rho},\ \pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)^{-1},\ c_n = \rho^n \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i} \tilde{H}_j\right)\right]$$

(i) $G^{\langle 1\rangle} \leq_{\text{st}} G^{\langle 2\rangle} \Rightarrow P_{\text{loss}}^{\langle 1\rangle} \geq P_{\text{loss}}^{\langle 2\rangle}$ $(\lambda^{\langle 1\rangle} = \lambda^{\langle 2\rangle}$ かつ $H^{\langle 1\rangle} =_{\text{st}} H^{\langle 2\rangle}$ のとき)

- 仮定より，$\forall n, c_n^{\langle 1\rangle} \leq c_n^{\langle 2\rangle}$ かつ $\rho^{\langle 1\rangle} = \rho^{\langle 2\rangle}$ が成立
  - ➡ $1-\pi_0^{\langle 1\rangle} \leq 1-\pi_0^{\langle 2\rangle}$ かつ $\rho^{\langle 1\rangle} = \rho^{\langle 2\rangle}$ より $P_{\text{loss}}^{\langle 1\rangle} \geq P_{\text{loss}}^{\langle 2\rangle}$

(ii) の証明は (i) と同様

(iii) $\lambda^{\langle 1\rangle} \leq \lambda^{\langle 2\rangle} \Rightarrow P_{\text{loss}}^{\langle 1\rangle} \leq P_{\text{loss}}^{\langle 2\rangle}$ $(H^{\langle 1\rangle} =_{\text{st}} H^{\langle 2\rangle}$ かつ $G^{\langle 1\rangle} =_{\text{st}} G^{\langle 2\rangle}$ のとき)

- 仮定より，$1-\pi_0^{\langle 1\rangle} \leq 1-\pi_0^{\langle 2\rangle}$ かつ $\rho^{\langle 1\rangle} \leq \rho^{\langle 2\rangle}$

・λ の増加に伴い，分母と分子が共に増加
・(iii) の証明には，$\{c_n\}_{n=1,2,\ldots}$ がもつ性質の議論が必要 (詳細は省略)

M/G/1+PH における P_{loss} の数値計算

数値計算において生じる問題点

$$c_1 = \rho, \quad c_n = \rho^n \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{G}(\sum_{j=1}^{i} \tilde{H}_j)\right], \quad n = 2, 3, \ldots$$

- (例) 待ち時間制約分布が超指数　$\overline{G}(x) = pe^{-\gamma_1 x} + (1-p)e^{-\gamma_2 x}$

$$c_3 = \rho^3 \mathrm{E}\Big[\{pe^{-\gamma_1 \tilde{H}_1} + (1-p)e^{-\gamma_2 \tilde{H}_1}\}\{pe^{-\gamma_1(\tilde{H}_1+\tilde{H}_2)} + (1-p)e^{-\gamma_2(\tilde{H}_1+\tilde{H}_2)}\}\Big]$$

$$\begin{aligned}
&= \rho^3 \Big\{p^2 \cdot \mathrm{E}[e^{-2\gamma_1 \tilde{H}_1}]\mathrm{E}[e^{-\gamma_1 \tilde{H}_2}] \\
&\qquad + p(1-p) \cdot \mathrm{E}[e^{-(\gamma_1+\gamma_2)\tilde{H}_1}]\mathrm{E}[e^{-\gamma_2 \tilde{H}_2}] \\
&\qquad + (1-p)p \cdot \mathrm{E}[e^{-(\gamma_2+\gamma_1)\tilde{H}_1}]\mathrm{E}[e^{-\gamma_1 \tilde{H}_2}] \\
&\qquad + (1-p)^2 \cdot \mathrm{E}[e^{-2\gamma_2 \tilde{H}_1}]\mathrm{E}[e^{-\gamma_2 \tilde{H}_2}]\Big\}
\end{aligned}$$

数値計算において生じる問題点

$$c_1 = \rho, \quad c_n = \rho^n \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{G}(\sum_{j=1}^{i} \tilde{H}_j)\right], \quad n = 2, 3, \ldots$$

- (例) 待ち時間制約分布が超指数 $\overline{G}(x) = pe^{-\gamma_1 x} + (1-p)e^{-\gamma_2 x}$

$$c_3 = \rho^3 \mathrm{E}\Big[\{pe^{-\gamma_1 \tilde{H}_1} + (1-p)e^{-\gamma_2 \tilde{H}_1}\}\{pe^{-\gamma_1(\tilde{H}_1+\tilde{H}_2)} + (1-p)e^{-\gamma_2(\tilde{H}_1+\tilde{H}_2)}\}\Big]$$

$$\begin{aligned} = \rho^3 \Big\{ & p^2 \cdot \tilde{h}^*(2\gamma_1)\tilde{h}^*(\gamma_1) \\ & + p(1-p) \cdot \tilde{h}^*(\gamma_1+\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_2) \\ & + (1-p)p \cdot \tilde{h}^*(\gamma_1+\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_1) \\ & + (1-p)^2 \cdot \tilde{h}^*(2\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_2) \Big\} \end{aligned}$$

$\tilde{h}^*(s)$: $\tilde{H}$ の LST

数値計算において生じる問題点

$$c_1 = \rho, \quad c_n = \rho^n \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i} \tilde{H}_j\right)\right], \quad n = 2, 3, \ldots$$

- (例) 待ち時間制約分布が超指数 $\overline{G}(x) = pe^{-\gamma_1 x} + (1-p)e^{-\gamma_2 x}$

$$\begin{aligned} c_4 = \rho^4 \Big\{ & p^3 \cdot \tilde{h}^*(3\gamma_1)\tilde{h}^*(2\gamma_1)\tilde{h}^*(\gamma_1) \\ & + p^2(1-p) \cdot \tilde{h}^*(2\gamma_1+\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_1+\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_2) \\ & + p^2(1-p) \cdot \tilde{h}^*(2\gamma_1+\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_1+\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_1) \\ & + p(1-p)^2 \cdot \tilde{h}^*(\gamma_1+2\gamma_2)\tilde{h}^*(2\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_2) \\ & + p^2(1-p) \cdot \tilde{h}^*(2\gamma_1+\gamma_2)\tilde{h}^*(2\gamma_1)\tilde{h}^*(\gamma_1) \\ & + p(1-p)^2 \cdot \tilde{h}^*(\gamma_1+2\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_1+\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_2) \\ & + p(1-p)^2 \cdot \tilde{h}^*(\gamma_1+2\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_1+\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_1) \Big\} \\ & + (1-p)^3 \cdot \tilde{h}^*(3\gamma_2)\tilde{h}^*(2\gamma_2)\tilde{h}^*(\gamma_2) \Big\} \end{aligned}$$

c_n を計算するには,
異なる 2^{n-1} 項の加算が必要

M/G/1+PH における c_n の計算法 (1)

待ち時間制約は相型分布 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$ に従う

- $\overline{G}(x) = \boldsymbol{\alpha} \exp(\boldsymbol{T} x) \boldsymbol{e}$ ($\boldsymbol{e}$ は要素が全て 1 の列ベクトル)

$$\overline{G}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!} \cdot \overline{g}_m$$

$\boxed{\overline{G}(x) \text{ を一様化}}$

θ：T の対角要素の最大の絶対値, $\overline{g}_m = \boldsymbol{\alpha}[\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{T}]^m \boldsymbol{e}$

- $\overline{\boldsymbol{g}}^{\star}$ を，第 m 要素 $(m = 0, 1, \ldots)$ が $\overline{g}_m$ の $\infty \times 1$ ベクトルとする
- $b_n(k, m)$ および $\tilde{h}^{[m]}(n\theta)$ を次式で定義する

$$b_n(k, m) = \binom{k}{m} \left[\frac{n}{n+1}\right]^m \left[\frac{1}{n+1}\right]^{k-m}$$

二項分布 $\left(k, \dfrac{n}{n+1}\right)$ の確率関数

$$\tilde{h}^{[m]}(n\theta) = \int_0^{\infty} \frac{\exp[-n\theta x](n\theta x)^m}{m!} \cdot \tilde{h}(x) dx$$

サービス分布から計算可能な確率関数

M/G/1+PH における c_n の計算法 (2)

- $\infty \times 1$ ベクトル $\boldsymbol{a}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ を次の漸化式により定義する

$$\boldsymbol{a}_0 = \overline{\mathbf{g}}^{\star}, \qquad \boldsymbol{a}_n = \overline{\boldsymbol{B}}_n \tilde{\boldsymbol{H}}(n\theta) \boldsymbol{a}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ただし,

$$\overline{\boldsymbol{B}}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_n(1,0)\overline{g}_1 & b_n(1,1) & 0 & \cdots \\ b_n(2,0)\overline{g}_2 & b_n(2,1)\overline{g}_1 & b_n(2,2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\boldsymbol{H}}(n\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{h}^{[0]}(n\theta) & \tilde{h}^{[1]}(n\theta) & \tilde{h}^{[2]}(n\theta) & \cdots \\ 0 & \tilde{h}^{[0]}(n\theta) & \tilde{h}^{[1]}(n\theta) & \cdots \\ 0 & 0 & \tilde{h}^{[0]}(n\theta) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

M/G/1+PH における c_n の計算法 (2)

- $\infty \times 1$ ベクトル $\boldsymbol{a}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ を次の漸化式により定義する

$$\boldsymbol{a}_0 = \overline{\boldsymbol{g}}^{\star}, \qquad \boldsymbol{a}_n = \overline{\boldsymbol{B}}_n \tilde{\boldsymbol{H}}(n\theta)\boldsymbol{a}_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

- c_n は $\boldsymbol{a}_{n-1}$ の最初の要素から求められる

$$c_n = \rho^n [\boldsymbol{a}_{n-1}]_0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

$$P_{\text{loss}} = \frac{\rho - (1 - \pi_0)}{\rho}$$

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)^{-1}$$

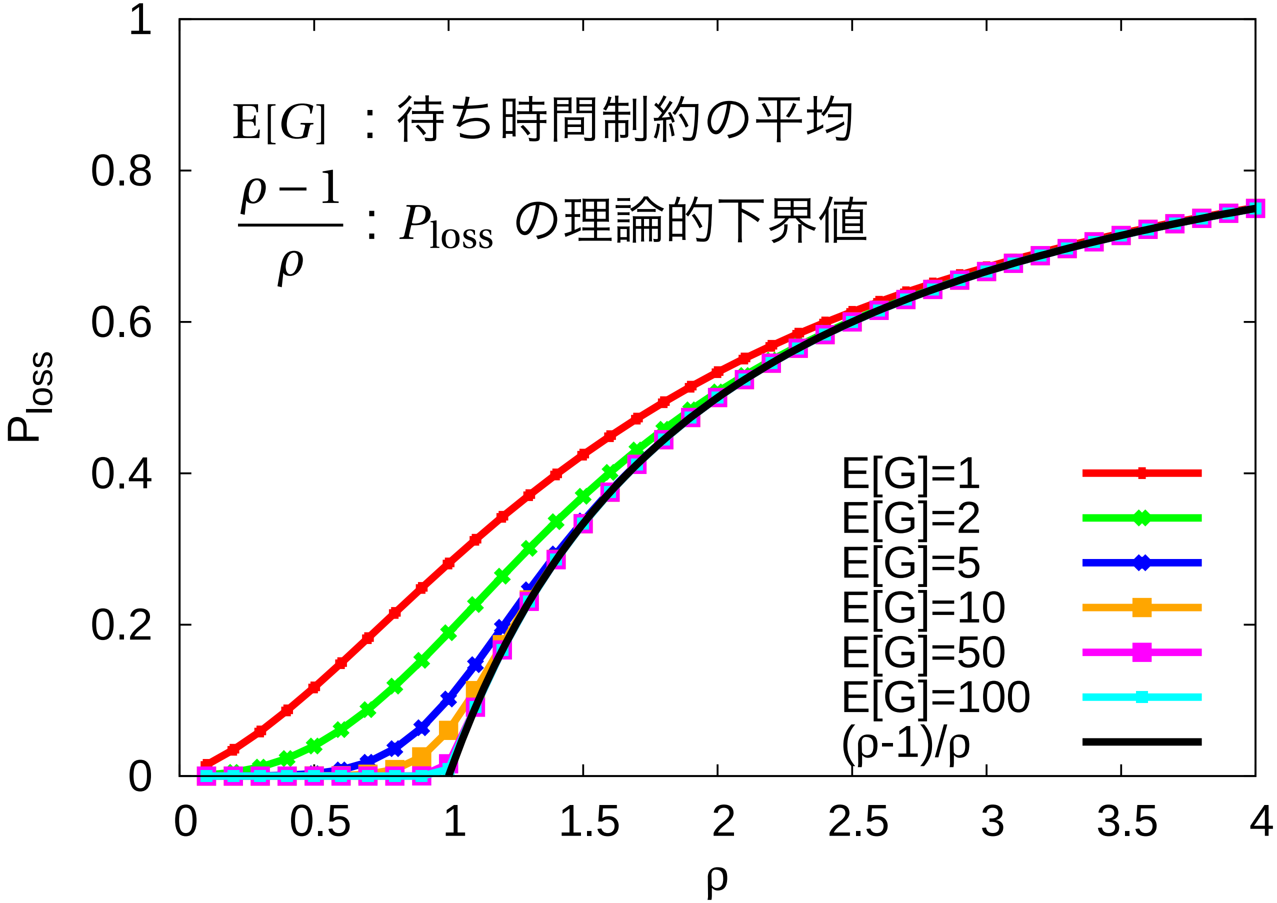
- $\boldsymbol{a}_n$ の有限次元近似は効率的に計算できる
    - この近似に加え，有限の n において c_n の計算を打ち切るため，P_{loss} の値に誤差が生じる
    - これらの近似で生じた誤差の上界を求めることが可能

数値例

待ち時間制約の長さが P_{loss} に与える影響

待ち時間制約：ステージ数 11 と 12 の混合アーラン (変動係数 0.3)

サービス時間：長さ 1 の固定長



E[G] が減少すると, P_{loss} が大きくなる

ρ が増加すると, P_{loss} は $\dfrac{\rho-1}{\rho}$ に漸近

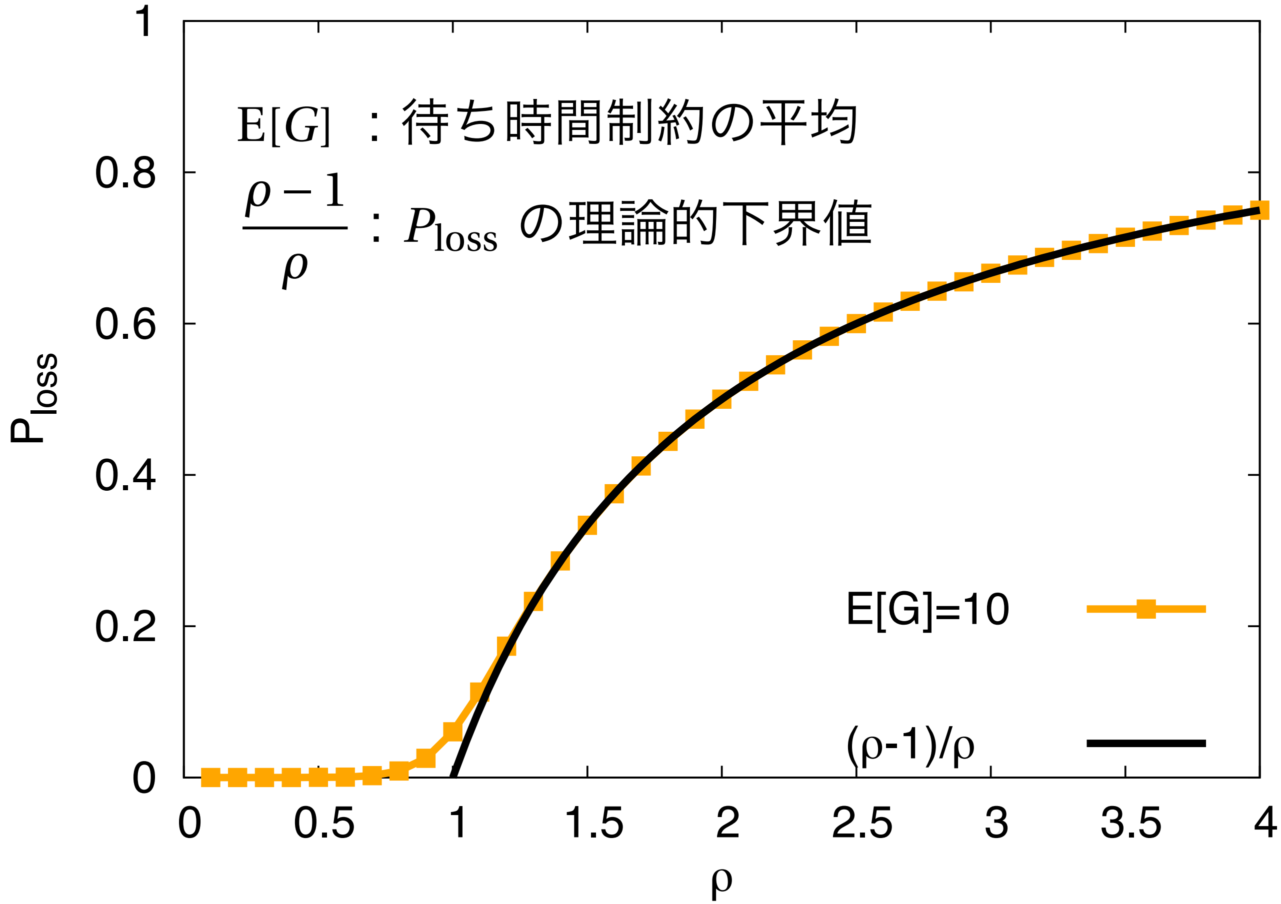
➡ E[G] による差は小さくなる

サービス時間の変動が P_{loss} に与える影響

待ち時間制約：ステージ数 11 と 12 の混合アーラン (変動係数 0.3)

サービス時間：長さ 1 の固定長

E[G] = 10 に固定

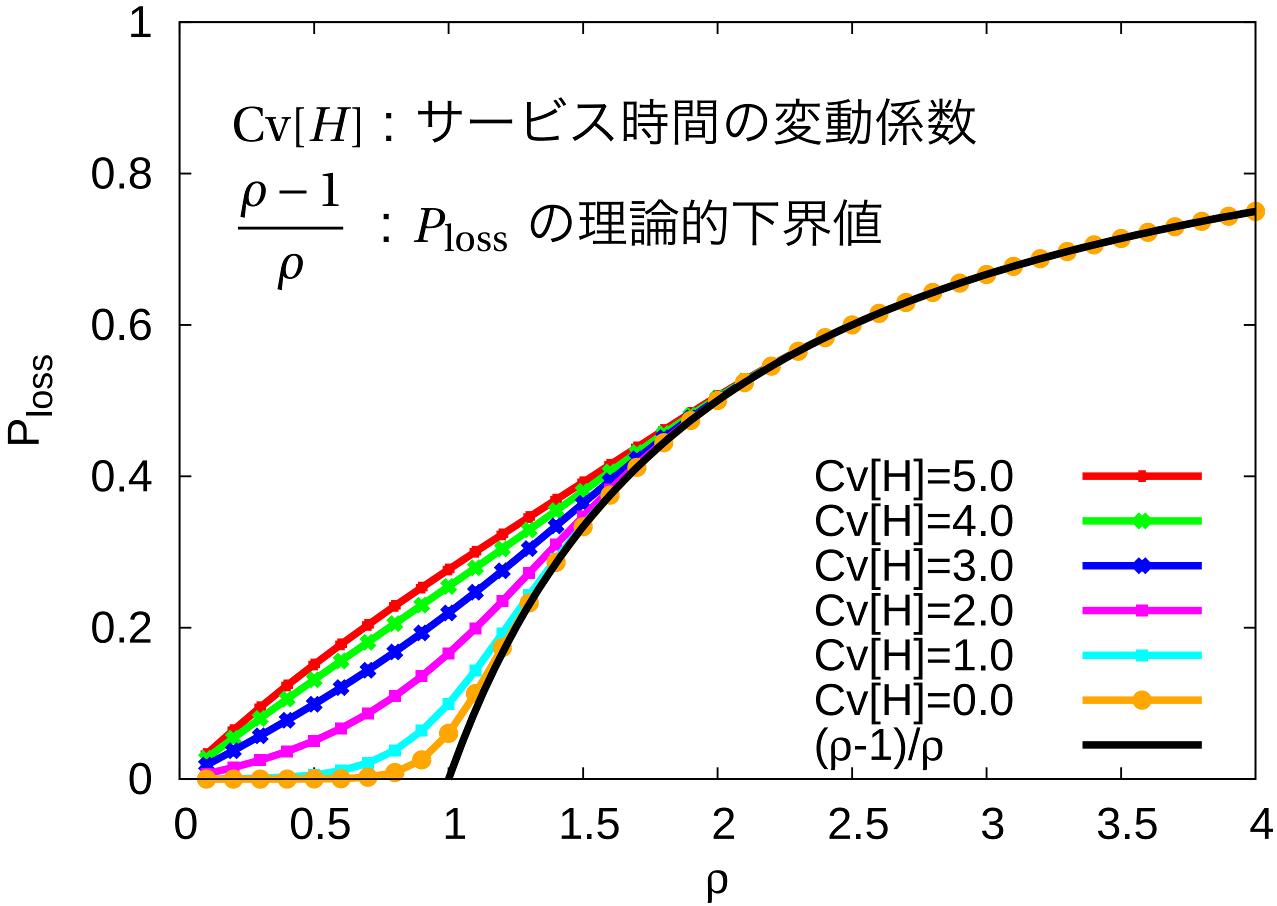


サービス時間の変動が P_{loss} に与える影響

待ち時間制約：ステージ数 11 と 12 の混合アーラン (変動係数 0.3)

サービス時間：長さ 1 の固定長，および平均 1 の平衡超指数分布

$\mathrm{E}[G] = 10$ に固定



Cv[H] が増加すると P_{loss} が大きくなる

ρ が増加すると，

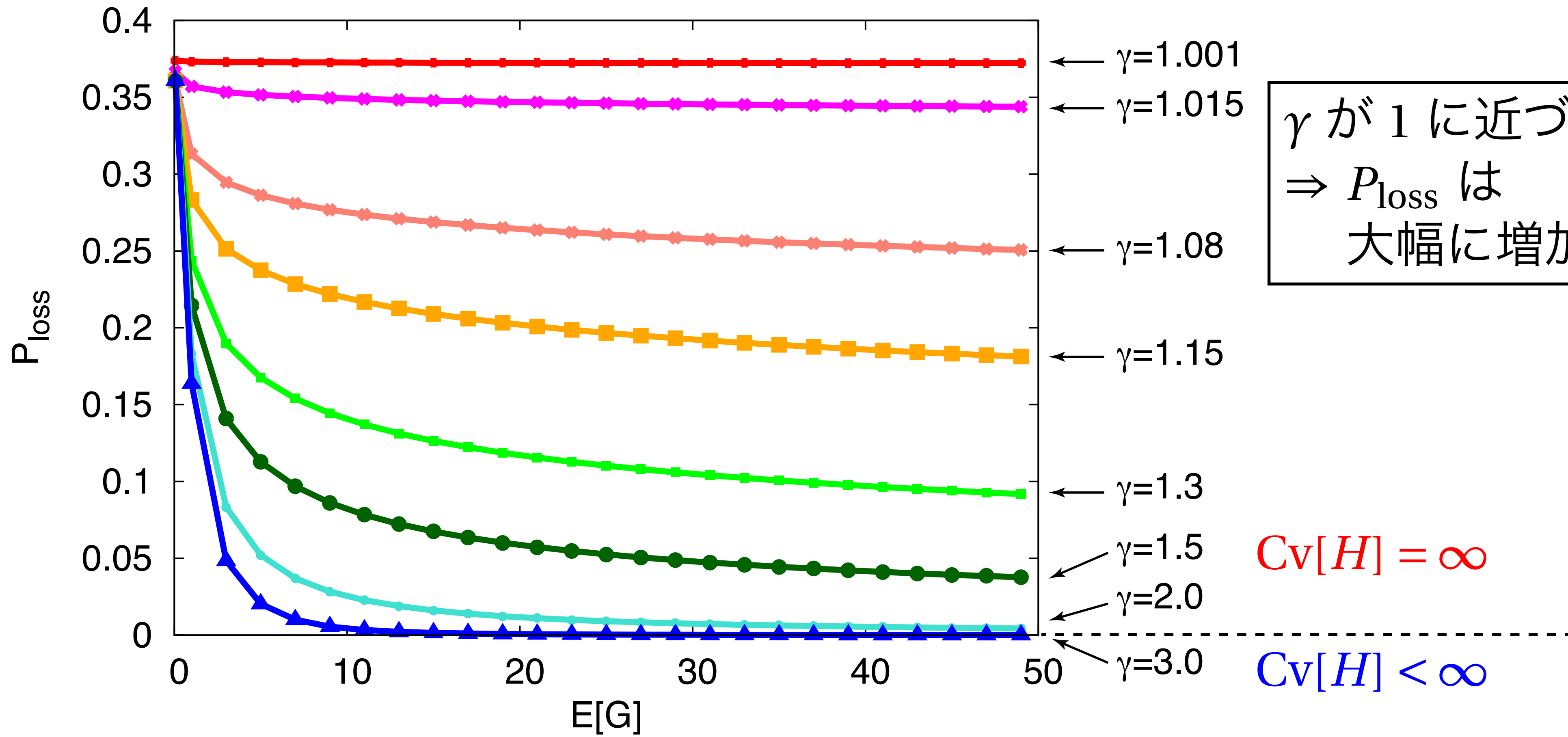
P_{loss} は $\dfrac{\rho-1}{\rho}$ に漸近

➡ Cv[H] による差は小さくなる

サービス時間がパレート分布に従う場合

待ち時間制約：ステージ数 11 と 12 の混合アーラン (変動係数 0.3)
サービス時間：平均 1，形状パラメタ γ のパレート分布

$\rho = 0.6$ に固定



γ が 1 に近づく
$\Rightarrow$ P_{loss} は
大幅に増加

$\mathrm{Cv}[H] = \infty$

$\mathrm{Cv}[H] < \infty$

まとめ

- M/G/1+G における呼損率 P_{loss} を考察
- 先行研究では，再帰的に定まる関数列により P_{loss} を与えている
    - ➡ λ, $H(x)$, $G(x)$ が P_{loss} に与える影響を評価するのは困難

本発表では,

- P_{loss} に対する陽表現公式を導出
    - ➡ λ, $H(x)$, $G(x)$ が P_{loss} に与える影響を理論的に考察
- M/G/1+PH に対する数値計算法を構築
    - ➡ λ, $H(x)$, $G(x)$ が P_{loss} に与える影響を数値的に考察

M/G/1+PH に関する補足

$$u(1;x) = \rho\tilde{h}(x), \quad u(n;x) = \rho\int_{0+}^{x} u(n-1;y)\overline{G}(y)\tilde{h}(x-y)dy, \ \ n = 2,3,\ldots$$

- $\boldsymbol{u}^\star(n;\theta)$：第 m 要素が次式で与えられる $1\times\infty$ ベクトル

$$u^{[m]}(n;\theta) = \int_{0+}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!}\cdot u(n;x)dx, \qquad m = 0,1,\ldots$$

- このとき $\boldsymbol{u}^\star(n;\theta)$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{u}^\star(n;\theta) = \rho^n\tilde{\boldsymbol{h}}(n\theta)\cdot\overline{\boldsymbol{B}}_{n-1}\tilde{\boldsymbol{H}}((n-1)\theta)\cdot\overline{\boldsymbol{B}}_{n-2}\tilde{\boldsymbol{H}}((n-2)\theta)\cdots\cdot\overline{\boldsymbol{B}}_1\tilde{\boldsymbol{H}}(\theta)$$

  - $\tilde{\boldsymbol{h}}(n\theta)$：$\tilde{\boldsymbol{H}}(n\theta)$ の最初の行ベクトル

- さらに，$c_n = \boldsymbol{u}^\star(n-1;\theta)\overline{\boldsymbol{g}}^\star$ が成立するため

$$c_n = \rho^n\tilde{\boldsymbol{h}}((n-1)\theta)\cdot\overline{\boldsymbol{B}}_{n-2}\tilde{\boldsymbol{H}}((n-2)\theta)\cdot\overline{\boldsymbol{B}}_{n-3}\tilde{\boldsymbol{H}}((n-3)\theta)\cdots\cdot\overline{\boldsymbol{B}}_1\tilde{\boldsymbol{H}}(\theta)\overline{\boldsymbol{g}}^\star$$