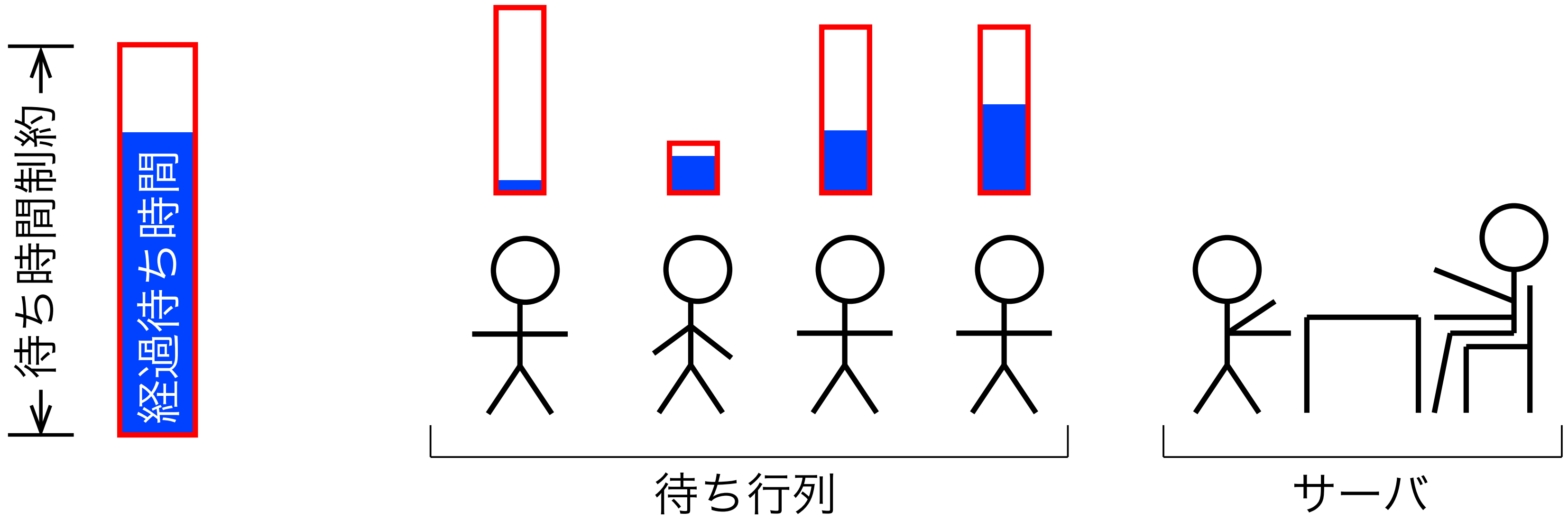
M/G/1+G 待ち行列における呼損率最小モデル

*井上 文彰, 滝根 哲哉

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

待ち時間制約のある待ち行列モデル

- 待ち時間が長すぎると，客はサービスを受けずに離脱する



- (例) 遅延制約のあるデータ通信，コールセンタ
- ケンドールの記法

A	/	B	/	c	+	W
到着間隔		サービス時間		サーバ数		待ち時間制約

考察するモデル

- 客がポアソン到着する単一サーバモデル (M/G/1+G) を考察
  - 客の到着は率 λ のポアソン過程に従う
  - サービス時間は分布関数 $H(x)$ に従って i.i.d.
  - 待ち時間制約長は分布関数 $G(x)$ に従って i.i.d.
    - ただし，確率 $g_\infty \in [0, 1)$ で待ち時間制約の無い客が到着

    ➨ $\lim_{x\to\infty} G(x) = 1 - g_\infty$

- 以降では，$\lambda g_\infty \mathrm{E}[H] < 1$ を仮定

  $\boxed{\mathrm{E}[H]\text{：平均サービス時間}}$

  ➨ 系は安定であり，定常状態が存在 [Baccelli et al. (1984)]

- また，簡単のため $G(0) = 0$，$H(0) = 0$ を仮定

呼損率 P_{loss}

- M/G/1+G における最も基本的な性能指標は呼損率 P_{loss}
  - P_{loss}：客がサービスを受けずに途中退去する確率
- [井上, 滝根 (2015)] では， P_{loss} の陽表現公式を導出
  - ➡ モデルのパラメータ λ, $H(x)$, $G(x)$ が P_{loss} に与える影響に関するいくつかの命題を証明

特に，その結果をもとに次のことが示される (詳しくは後述)

- 同一の $\lambda < \infty$, $\mathrm{E}[H] < \infty$, $G(x)$ をもつ全ての M/G/1+G の中で，M/D/1+G が最小の呼損率 P_{loss} を達成
  - ➡ M/D/1+G はサービス時間分布に関する呼損率最小モデル

本発表の概要

待ち時間制約長分布に関する呼損率最小モデルを考察

- 同一の $\lambda < \infty$, $H(x)$, $\mathrm{E}[G] < \infty$ をもつ全ての M/G/1+G の中で, M/G/1+D が最小の呼損率 P_{loss} を達成することを示す

したがって，次のことが示される

- M/D/1+G はサービス時間分布に関する呼損率最小モデル
- M/G/1+D は待ち時間制約長分布に関する呼損率最小モデル

- 同一の $\lambda < \infty$, $\mathrm{E}[H] < \infty$, $\mathrm{E}[G] < \infty$ をもつ全ての M/G/1+G の中で, M/D/1+D が最小の呼損率 P_{loss} を達成

➡ M/D/1+D は M/G/1+G 待ち行列における呼損率最小モデル

サービス時間分布に関する呼損率最小モデル [井上，滝根 (2015)]

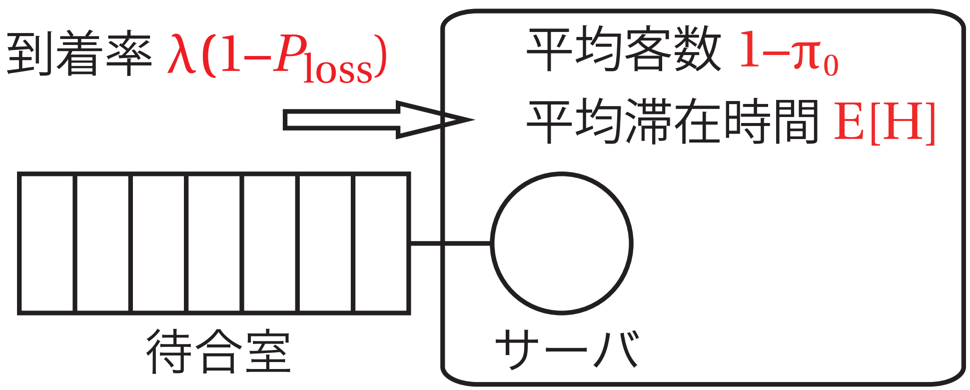
系が空である確率 π_0 と呼損率 P_{loss}

π_0: 系が空である確率

- サーバ部分にリトルの公式を適用 ($\rho \triangleq \lambda \mathrm{E}[H]$)

$$1 - \pi_0 = \lambda(1 - P_{\mathrm{loss}})\mathrm{E}[H] \quad ➡ \quad \boxed{P_{\mathrm{loss}} = \frac{\rho - (1 - \pi_0)}{\rho}}$$

[Daley (1965)]



- さらに，π_0 は仮待ち時間の密度関数 $v(x)$ ($x > 0$) より得られる

[Baccelli et al. (1984)]

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

$\tilde{h}(x)$: サービスの平衡分布の密度，$\overline{G}(x)$: 待ち時間制約の補分布

- 確率フローの平衡より，次式が導かれる

$$v(x) = \rho\pi_0\tilde{h}(x) + \rho\int_{0+}^{x} v(y)\overline{G}(y)\tilde{h}(x-y)\,dy, \qquad x > 0$$

➡ この積分方程式から，$v(x)$ $(x > 0)$ は一意に定められる

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)$$

$$u(1;x) = \rho\tilde{h}(x), \quad u(n;x) = \rho\int_{0+}^{x} u(n-1;y)\overline{G}(y)\tilde{h}(x-y)\,dy, \ n = 2,3,\ldots$$

- 正規化条件より，π_0 は次式で与えられる ($\Rightarrow P_{\mathrm{loss}}$ が求まる)

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right]^{-1}, \qquad c_n = \int_{0+}^{\infty} u(n;x)\,dx$$

呼損率 P_{loss} の陽表現公式 [井上，滝根 (2015)]

- 呼損率 P_{loss} は次式で与えられる

$$P_{\mathrm{loss}} = \frac{\rho - (1-\pi_0)}{\rho}, \qquad \pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)^{-1}$$

ただし，

$$c_1 = \rho, \qquad c_n = \rho^n \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{G}(\sum_{j=1}^{i} \tilde{H}_j)\right], \quad n = 2, 3, \ldots$$

- $\{\tilde{H}_n\}_{n=1,2,\ldots}$: サービスの平衡分布に従う i.i.d. 確率変数列
- $\overline{G}(x)$ ：待ち時間制約の補分布関数

Convex order

X, Y：非負の確率変数

- Usual stochastic order ($\leq_{\mathrm{st}}$)：確率変数の大きさを比較

$$X \leq_{\mathrm{st}} Y \;\Leftrightarrow\; \Pr(X > x) \leq \Pr(Y > x), \quad \forall x \geq 0$$

- Convex order ($\leq_{\mathrm{cx}}$)：確率変数の変動の大きさを比較

$$X \leq_{\mathrm{cx}} Y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] \text{ かつ}$$

$$\int_x^\infty \Pr(X > w)\,dw \leq \int_x^\infty \Pr(Y > w)\,dw, \quad \forall x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] \text{ かつ } \tilde{X} \leq_{\mathrm{st}} \tilde{Y}$$

($\tilde{X}$, $\tilde{Y}$: X, Y の平衡確率変数)

◆ 特に，$X \leq_{\mathrm{cx}} Y \Rightarrow \mathrm{Cv}[X] \leq \mathrm{Cv}[Y]$ (Cv[·]：変動係数)

サービス時間に関する呼損率最小モデル

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{1-\pi_0}{\rho},\ \pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)^{-1},\ c_n = \rho^n \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{G}(\sum_{j=1}^{i} \tilde{H}_j)\right]$$

二つの定常な M/G/1+G 待ち行列を考える

(肩文字 $\langle k \rangle$ で，k 番目の待ち行列の量を表す)

$H^{\langle k \rangle}$: サービス時間
$G^{\langle k \rangle}$: 待ち時間制約

- $\lambda^{\langle 1 \rangle} = \lambda^{\langle 2 \rangle}$, $\mathrm{E}[H^{\langle 1 \rangle}] = \mathrm{E}[H^{\langle 2 \rangle}]$, かつ $G^{\langle 1 \rangle}(x) = G^{\langle 2 \rangle}(x)$ のとき

$$H^{\langle 1 \rangle} \leq_{\text{cx}} H^{\langle 2 \rangle} \Leftrightarrow \tilde{H}^{\langle 1 \rangle} \leq_{\text{st}} \tilde{H}^{\langle 2 \rangle}$$

$$\Rightarrow \forall n, c_n^{\langle 1 \rangle} \geq c_n^{\langle 2 \rangle} \text{ かつ } \rho^{\langle 1 \rangle} = \rho^{\langle 2 \rangle}$$

$$\Rightarrow P_{\text{loss}}^{\langle 1 \rangle} \leq P_{\text{loss}}^{\langle 2 \rangle}$$

一定分布は convex order に関して最小 [Shaked and Shanthikumar (2007)]

➡ M/D/1+G はサービス時間分布に関する呼損率最小モデル

待ち時間制約長分布に関する
呼損率最小モデル

Excess wealth order

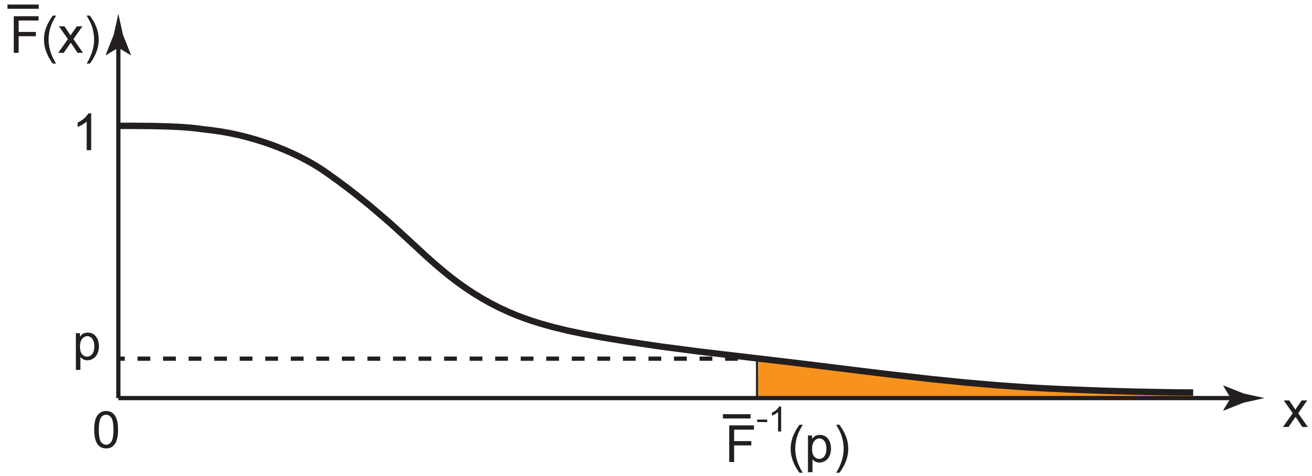
X, Y：有限の平均をもつ非負確率変数

$\overline{F}_X(x)$：X の補分布関数,　　$\overline{F}_Y(x)$：Y の補分布関数

- Excess wealth order ($\leq_{\text{ew}}$)：確率変数の変動の大きさを比較

$$X \leq_{\text{ew}} Y \;\Leftrightarrow\; \int_{\overline{F}_X^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_X(w)\,dw \leq \int_{\overline{F}_Y^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_Y(w)\,dw, \quad \forall p \in (0,1)$$

$$\left(X \leq_{\text{cx}} Y \;\Leftrightarrow\; \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] \text{ かつ } \int_{x}^{\infty} \overline{F}_X(w)\,dw \leq \int_{x}^{\infty} \overline{F}_Y(w)\,dw, \quad \forall x \geq 0 \right)$$



Excess wealth order

X, Y：有限の平均をもつ非負確率変数

$\overline{F}_X(x)$：X の補分布関数,　　$\overline{F}_Y(x)$：Y の補分布関数

- Excess wealth order ($\leq_{\mathrm{ew}}$)：確率変数の変動の大きさを比較

$$X \leq_{\mathrm{ew}} Y \Leftrightarrow \int_{\overline{F}_X^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_X(w)\,dw \leq \int_{\overline{F}_Y^{-1}(p)}^{\infty} \overline{F}_Y(w)\,dw, \quad \forall p \in (0,1)$$

$$\left(X \leq_{\mathrm{cx}} Y \Leftrightarrow \mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] \text{ かつ } \int_x^{\infty} \overline{F}_X(w)\,dw \leq \int_x^{\infty} \overline{F}_Y(w)\,dw, \quad \forall x \geq 0 \right)$$

- $\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y]$ のとき次の関係が成立 [Shaked and Shanthikumar (2007)]

$$X \leq_{\mathrm{ew}} Y \Rightarrow X \leq_{\mathrm{cx}} Y$$

➡ Excess wealth order は convex order より強い条件

待ち時間制約に関する呼損率最小モデル

二つの定常な M/G/1+G 待ち行列を考える
(肩文字 $\langle k \rangle$ で，k 番目の待ち行列の量を表す)

$H^{\langle k \rangle}$: サービス時間
$G^{\langle k \rangle}$: 待ち時間制約

- 次の二つの命題が成立することが示される

(i) $\lambda^{\langle 1 \rangle} = \lambda^{\langle 2 \rangle}$, $H^{\langle 1 \rangle}(x) = H^{\langle 2 \rangle}(x)$, $\mathrm{E}[G^{\langle 1 \rangle}] = \mathrm{E}[G^{\langle 2 \rangle}] < \infty$ のとき

$$G^{\langle 1 \rangle} \leq_{\mathrm{ew}} G^{\langle 2 \rangle} \Rightarrow P^{\langle 1 \rangle}_{\mathrm{loss}} \leq P^{\langle 2 \rangle}_{\mathrm{loss}}$$

(ii) 平均の等しい非負確率変数の中で,
一定分布は Excess wealth order に関して最小

➡ M/G/1+D は待ち時間制約に関する呼損率最小モデル

以下では，(i) の証明の概略を述べる

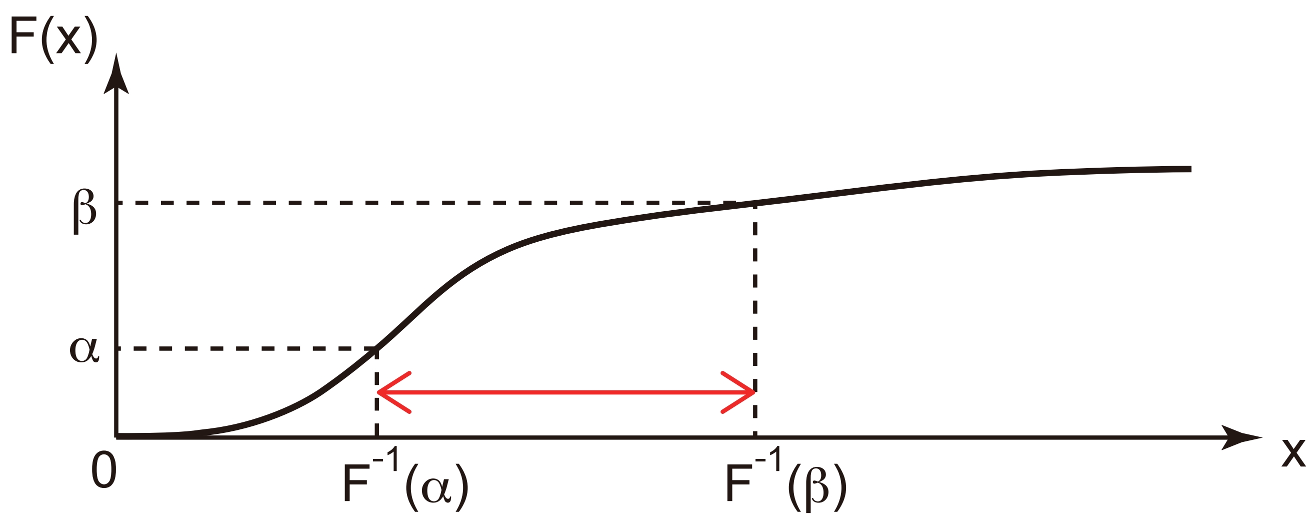
Dispersive order

X, Y : 非負の確率変数

$F_X(x)$, $F_Y(x)$: X, Y の分布関数,

- Dispersive order ($\leq_{\text{disp}}$) : 確率変数の変動の大きさを比較

$$X \leq_{\text{disp}} Y \Leftrightarrow F_X^{-1}(\beta) - F_X^{-1}(\alpha) \leq F_Y^{-1}(\beta) - F_Y^{-1}(\alpha) \quad \text{for all } 0 < \alpha \leq \beta < 1$$



Dispersive order

X, Y : 非負の確率変数

$F_X(x)$, $F_Y(x)$: X, Y の分布関数,

- Dispersive order ($\leq_{\mathrm{disp}}$) : 確率変数の変動の大きさを比較

$$X \leq_{\mathrm{disp}} Y \Leftrightarrow F_X^{-1}(\beta) - F_X^{-1}(\alpha) \leq F_Y^{-1}(\beta) - F_Y^{-1}(\alpha) \quad \text{for all } 0 < \alpha \leq \beta < 1$$

- 次の関係が成立することが示せる ($\tilde{X}$, $\tilde{Y}$: X, Y の平衡確率変数)

$\mathrm{E}[X] = \mathrm{E}[Y] < \infty$ のとき,

$$X \leq_{\mathrm{ew}} Y \Leftrightarrow \tilde{X} \leq_{\mathrm{disp}} \tilde{Y}$$

($\tilde{X}$ の分布関数を $F_{\tilde{X}}(x)$ とすると

$$F_{\tilde{X}}(x) = \frac{1}{\mathrm{E}[X]} \int_0^x \overline{F}_X(w)\,dw$$

$\boxed{\overline{F}_X(x) : X \text{ の補分布}}$)

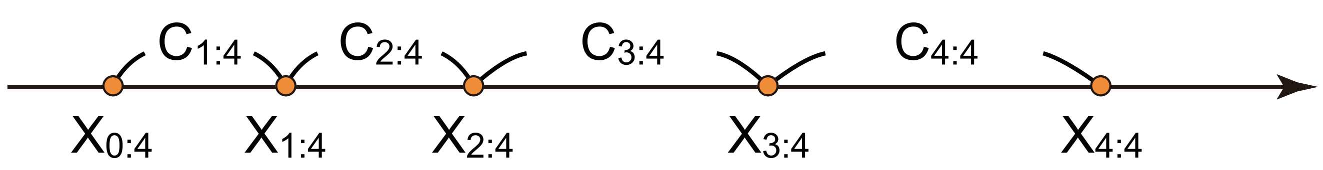
Dispersive order と順序統計量

$\{X_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$: 分布関数 $F_X(x)$ に従う i.i.d. 確率変数列
$\{Y_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$: 分布関数 $F_Y(x)$ に従う i.i.d. 確率変数列
$Z_{i:n}$: 確率変数列 $\{Z_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$ の中で i 番目に小さな値
(i 番目の順序統計量)

- 順序統計量の間隔 $C_{i:n}$, $D_{i:n}$ を次式で定義

$$C_{i:n} \triangleq X_{i:n} - X_{i-1:n}, \quad D_{i:n} \triangleq Y_{i:n} - Y_{i-1:n}$$

ただし， $X_{0:n} = \inf\{x; F_X(x) > 0\}$, $Y_{0:n} = \inf\{x; F_Y(x) > 0\}$



Dispersive order と順序統計量

$\{X_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$: 分布関数 $F_X(x)$ に従う i.i.d. 確率変数列
$\{Y_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$: 分布関数 $F_Y(x)$ に従う i.i.d. 確率変数列
$Z_{i:n}$: 確率変数列 $\{Z_j\}_{j=1,2,\ldots,n}$ の中で i 番目に小さな値
(i 番目の順序統計量)

- 順序統計量の間隔 $C_{i:n}$, $D_{i:n}$ を次式で定義

$$C_{i:n} \triangleq X_{i:n} - X_{i-1:n}, \quad D_{i:n} \triangleq Y_{i:n} - Y_{i-1:n}$$

ただし, $X_{0:n} = \inf\{x; F_X(x) > 0\}, \quad Y_{0:n} = \inf\{x; F_Y(x) > 0\}$

- このとき, $X_1 \leq_{\mathrm{disp}} Y_1$ が成立するならば

$$\phi(C_{1:n}, C_{2:n}, \ldots, C_{n:n}) \leq_{\mathrm{st}} \phi(D_{1:n}, D_{2:n}, \ldots, D_{n:n})$$ [Bartoszewicz (1986)]

  - $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$: 各変数に関して非減少である任意の関数

c_n の別表現

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{1-\pi_0}{\rho},\ \pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)^{-1},\ c_n = \rho^n \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i} \tilde{H}_j\right)\right]$$

- $\mathrm{E}[G] < \infty$ のとき，c_n は次式で書き換えられる ($\tilde{g}(x) \triangleq \overline{G}(x)/\mathrm{E}[G]$)

$$c_n = \rho^n \int_0^\infty \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \left\{\prod_{i=1}^{n-1} \overline{G}\left(\sum_{j=1}^{i} x_j\right)\right\}\left\{\prod_{m=1}^{n-1} \tilde{h}(x_m)\right\} dx_{n-1}dx_{n-2}\cdots dx_1$$

$$= \frac{\rho^n(\mathrm{E}[G])^{n-1}}{(\mathrm{E}[H])^{n-1}(n-1)!}\int_0^\infty \int_{w_1}^\infty \cdots \int_{w_{n-2}}^\infty (n-1)!\left\{\prod_{i=1}^{n-1} \tilde{g}(w_i)\right\}$$

$$\cdot\, \overline{H}(w_1 - 0)\left\{\prod_{m=2}^{n-1} \overline{H}(w_m - w_{m-1})\right\} dw_{n-1}dw_{n-2}\cdots dw_1$$

$$= \frac{\rho(\lambda \mathrm{E}[G])^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{H}(\tilde{G}_{i:n-1} - \tilde{G}_{i-1:n-1})\right]$$

順序統計量の結合密度

$-\prod_{i=1}^{n-1} \overline{H}(x_i)$ は各変数に関して非減少な関数

(i) の略証

$$P_{\text{loss}} = 1 - \frac{1-\pi_0}{\rho}, \quad \pi_0 = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right)^{-1}$$

$$c_n = \frac{\rho(\lambda \mathrm{E}[G])^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{H}(\tilde{G}_{i:n-1} - \tilde{G}_{i-1:n-1})\right]$$

- $\lambda^{\langle 1\rangle} = \lambda^{\langle 2\rangle}$, $H^{\langle 1\rangle}(x) = H^{\langle 2\rangle}(x)$, $\mathrm{E}[G^{\langle 1\rangle}] = \mathrm{E}[G^{\langle 2\rangle}] < \infty$ のとき

$$G^{\langle 1\rangle} \le_{\text{ew}} G^{\langle 2\rangle} \;\Leftrightarrow\; \tilde{G}^{\langle 1\rangle} \le_{\text{disp}} \tilde{G}^{\langle 2\rangle}$$

$$\Rightarrow\; \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{H}(\tilde{G}^{\langle 1\rangle}_{i:n-1} - \tilde{G}^{\langle 1\rangle}_{i-1:n-1})\right] \ge \mathrm{E}\left[\prod_{i=1}^{n-1} \overline{H}(\tilde{G}^{\langle 2\rangle}_{i:n-1} - \tilde{G}^{\langle 2\rangle}_{i-1:n-1})\right]$$

$\Rightarrow\; \forall n,\ c_n^{\langle 1\rangle} \ge c_n^{\langle 2\rangle}$ かつ $\rho^{\langle 1\rangle} = \rho^{\langle 2\rangle}$

$$\Rightarrow\; P^{\langle 1\rangle}_{\text{loss}} \le P^{\langle 2\rangle}_{\text{loss}}$$

まとめ

M/G/1+G における呼損率 P_{loss} を考察

- $\lambda^{\langle 1\rangle} = \lambda^{\langle 2\rangle}$, $\mathrm{E}[H^{\langle 1\rangle}] = \mathrm{E}[H^{\langle 2\rangle}]$, かつ $G^{\langle 1\rangle}(x) = G^{\langle 2\rangle}(x)$ のとき

  $H^{\langle 1\rangle} \leq_{\mathrm{cx}} H^{\langle 2\rangle} \;\Rightarrow\; P_{\mathrm{loss}}^{\langle 1\rangle} \leq P_{\mathrm{loss}}^{\langle 2\rangle}$ (M/D/1+G が呼損率最小)

- $\lambda^{\langle 1\rangle} = \lambda^{\langle 2\rangle}$, $H^{\langle 1\rangle}(x) = H^{\langle 2\rangle}(x)$, かつ $\mathrm{E}[G^{\langle 1\rangle}] = \mathrm{E}[G^{\langle 2\rangle}] < \infty$ のとき

  $G^{\langle 1\rangle} \leq_{\mathrm{ew}} G^{\langle 2\rangle} \;\Rightarrow\; P_{\mathrm{loss}}^{\langle 1\rangle} \leq P_{\mathrm{loss}}^{\langle 2\rangle}$ (M/G/1+D が呼損率最小)

➡ M/D/1+D は M/G/1+G における呼損率最小モデル

未解決の問題

- 上記の条件 $G^{\langle 1\rangle} \leq_{\mathrm{ew}} G^{\langle 2\rangle}$ は $G^{\langle 1\rangle} \leq_{\mathrm{cx}} G^{\langle 2\rangle}$ に緩和可能か
  (M/M/1+G での証明は容易 [van Velthoven et al. (2006)])
- $\mathrm{E}[G] = \infty$ における呼損率最小モデルは存在するか