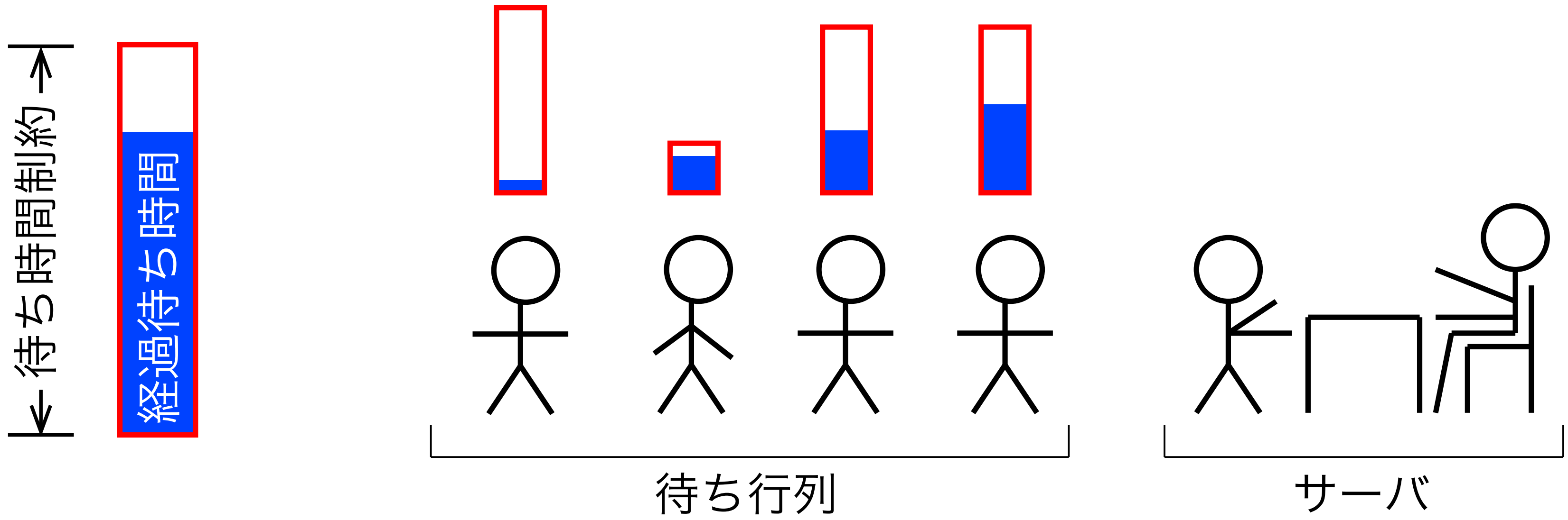
M/G/1+PH 待ち行列における系内客数分布について

井上 文彰

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

待ち時間制約のある待ち行列モデル

- 待ち時間が長すぎると，客はサービスを受けずに離脱する



- (例) 遅延制約のあるデータ通信，コールセンタ
- ケンドールの記法

A	/	B	/	c	+	W
到着間隔		サービス時間		サーバ数		待ち時間制約

考察するモデル (M/G/1+PH)

- 客の到着は率 λ のポアソン過程に従う
- サービス時間は分布関数 $H(x)$ (平均 $\mathrm{E}[H]$) に従って i.i.d.
  - 簡単のため $H(0)=0$ を仮定
- 待ち時間制約は相型分布 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$ に従って i.i.d.
  - 補分布関数 $\overline{G}(x) = \boldsymbol{\alpha} \exp[\boldsymbol{T} x] \boldsymbol{e}$

    $\boldsymbol{\alpha}$: 確率ベクトル, $\boldsymbol{T}$: 劣無限小生成作用素

    $\boldsymbol{e}$: 要素が全て 1 の列ベクトル
- $\mathrm{E}[G]$: 平均待ち時間制約長

  $\mathrm{E}[G] = \boldsymbol{\alpha}(-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{e} < \infty$ ➨ 系は常に安定 [Baccelli et al. (1984)]

系内客数 L と仮待ち時間 V

- 定常系内客数 L : 系内に滞在中である客の総数
  - 将来的に途中退去する客を含める
  - $\pi_\ell \triangleq \Pr(L = \ell) \quad (\ell = 0, 1, \ldots)$
- 定常仮待ち時間 V : 系内に滞在中であり，かつ最終的にサービスを受ける客の残余サービス時間の総和
  - 将来的に途中退去する客の仕事は含まない
  - $v(x)$: V の密度関数
- 一般の待ち時間制約分布 (M/G/1+G) の下で成り立つ結果 [Baccelli et al. (1984), Stanford (1979)]
  - $v(x)$ はヴォルテラ積分方程式の解として与えられる
  - π_ℓ は $v(x)$ を用いて与えられる

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

$h_{\mathrm{e}}(x)$: サービスの平衡分布の密度

- 確率フローの平衡より，次式が導かれる ($\rho \triangleq \lambda \mathrm{E}[H]$)

$$\color{red}{v(x)} = \rho \pi_0 h_{\mathrm{e}}(x) + \rho \int_{0+}^{x} \color{red}{v(y)} \overline{G}(y) h_{\mathrm{e}}(x-y) dy, \qquad x > 0$$

➡ この積分方程式から，$v(x)$ ($x > 0$) は一意に定められる

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n u(n;x)$$

$$u(1;x) = h_{\mathrm{e}}(x), \quad u(n;x) = \int_{0+}^{x} u(n-1;y) \overline{G}(y) h_{\mathrm{e}}(x-y) dy, \quad n = 2,3,\ldots$$

- 空である確率 π_0 は，正規化条件より次式で与えられる

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_{0+}^{\infty} u(n;x) dx \right]^{-1}$$

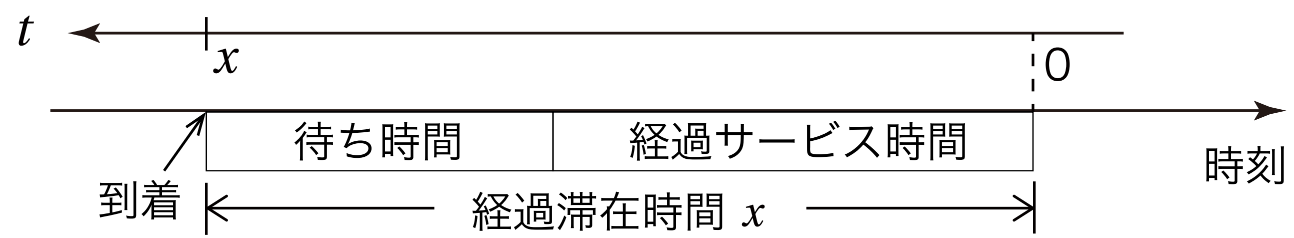
待ち客数 $\hat{L}$

サーバが稼働中 ($L > 0$) である期間に注目

- A: Attained waiting time
  - サービス中の客の経過滞在時間
  - A の密度関数は仮待ち時間密度 $v(x)$ と一致

    [Sakasegawa and Wolff (1990)]
- $\hat{L}$: 系内で待っている客の数
  - A の間に到着して，まだ途中退去していない客数に等しい
  - $\hat{\pi}_\ell \triangleq \Pr(\hat{L} = \ell,$ 客がサービス中)

現時点で残っている待ち客だけに注目すると,
到着率 $\lambda\overline{G}(t)$ の非斉時ポアソン到着と等価



待ち客数 $\hat{L}$

$\hat{L}$: 系内で待っている客の数，$\hat{\pi}_\ell \triangleq \Pr(\hat{L} = \ell$, 客がサービス中)
$v(x)$: 仮待ち時間の密度関数

- 以上の観察から，次式が得られる

$$\boxed{\hat{\pi}_\ell = \int_{0+}^{\infty} p_\ell(x) v(x) dx}$$

ただし，

$$p_\ell(x) = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \binom{m}{\ell} \{G_\mathrm{e}(x)\}^\ell \{\overline{G}_\mathrm{e}(x)\}^{m-\ell}$$

$G_\mathrm{e}(x)$, $\overline{G}_\mathrm{e}(x)$: 待ち時間制約の平衡分布の分布関数，補分布関数

$$\left(参考: \sum_{\ell=0}^{\infty} z^\ell p_\ell(x) = \exp\left[\lambda(z-1) \int_0^x \overline{G}(t) dt \right] \right)$$

仮待ち時間 V と系内客数 L

以上より，M/G/1+G において次のことが成立

- 仮待ち時間の密度関数 $v(x)$

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n u(n;x)$$

$$u(1;x) = h_{\mathrm{e}}(x), \quad u(n;x) = \int_{0+}^{x} u(n-1;y)\overline{\mathrm{G}}(y) h_{\mathrm{e}}(x-y)\,dy, \ \ n = 2,3,\ldots$$

- 系内客数分布 π_ℓ $(\ell = 0,1,\ldots)$

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \int_{0+}^{\infty} u(n;x)\,dx\right]^{-1}, \quad \pi_\ell = \hat{\pi}_{\ell-1} = \int_{0+}^{\infty} p_{\ell-1}(x) v(x)\,dx,$$
$$\ell = 1,2,\ldots$$

$$p_\ell(x) = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \binom{m}{\ell} \{\mathrm{G}_{\mathrm{e}}(x)\}^{\ell} \{\overline{\mathrm{G}}_{\mathrm{e}}(x)\}^{m-\ell}$$

発表の概要

M/G/1+PH における系内客数分布 π_ℓ $(\ell = 0, 1, \ldots)$ を考察

- 初めに，[井上，滝根 (2015)] の結果を紹介
  - 離散化された仮待ち時間分布 $v^{[k]}(\zeta)$ $(\zeta > 0)$ に対する解析から，π_0 が定められる

$$v^{[k]}(\zeta) = \int_{0+}^{\infty} \frac{\exp[-\zeta x](\zeta x)^k}{k!} \cdot v(x)dx, \quad k = 0, 1, \ldots$$

  - 特に，$v^{[k]}(\zeta)$ は行列演算により定められ，数値計算が容易

本発表では，

- π_ℓ $(\ell = 1, 2, \ldots)$ の，$v^{[k]}(\zeta)$ を用いた表現を導出
  - ➡ 系内客数分布を数値計算するための基礎付け

M/G/1+PH に関する既存の結果 [井上，滝根 (2015)]

待ち時間制約分布の一様化

- 待ち時間制約の補分布関数 $\overline{G}(x)$ $(x \geq 0)$ を変形

$$\overline{G}(x) = \boldsymbol{\alpha} \exp[\boldsymbol{T}x]\boldsymbol{e} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!} \cdot \overline{g}^{[m]}$$

θ: $\boldsymbol{T}$ の対角要素の最大の絶対値, $\overline{g}^{[m]} \triangleq \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{T})^m \boldsymbol{e}$

- $b_j(k,m)$ および $h_{\mathrm{e}}^{[m]}(j\theta)$ を次式で定義する

$$b_j(k,m) = \binom{k}{m} \left[\frac{j}{j+1}\right]^m \left[\frac{1}{j+1}\right]^{k-m}$$

二項分布 $\left(k, \dfrac{j}{j+1}\right)$ の確率関数

$$h_{\mathrm{e}}^{[m]}(j\theta) = \int_0^{\infty} \frac{\exp[-j\theta x](j\theta x)^m}{m!} \cdot h_{\mathrm{e}}(x)dx$$

サービス分布から計算可能な確率関数

離散化された仮待ち時間

$$v^{[k]}(j\theta) = \int_{0+}^{\infty} \frac{\exp[-j\theta x](j\theta x)^k}{k!} \cdot v(x)dx$$

以降では，無限次元ベクトル $(x^{[0]}, x^{[1]}, \ldots)$ を $\boldsymbol{x}^{\star}$ と表記する

- $\boldsymbol{v}^{\star}(j\theta)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ は次式を満たす

$$\boldsymbol{v}^{\star}(j\theta) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \boldsymbol{u}^{\star}(n; j\theta)$$

$$\boldsymbol{u}^{\star}(1; j\theta) = \boldsymbol{h}_{\mathrm{e}}^{\star}(j\theta), \quad \boldsymbol{u}^{\star}(n; j\theta) = \boldsymbol{u}^{\star}(n-1; (j+1)\theta)\overline{\boldsymbol{B}}_j \boldsymbol{H}_{\mathrm{e},j}, \ n = 2, 3, \ldots$$

ただし，

$$\overline{\boldsymbol{B}}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_j(1,0)\overline{g}^{[1]} & b_j(1,1) & 0 & \cdots \\ b_j(2,0)\overline{g}^{[2]} & b_j(2,1)\overline{g}^{[1]} & b_j(2,2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{e},j} = \begin{pmatrix} h_{\mathrm{e}}^{[0]}(j\theta) & h_{\mathrm{e}}^{[1]}(j\theta) & h_{\mathrm{e}}^{[2]}(j\theta) & \cdots \\ 0 & h_{\mathrm{e}}^{[0]}(j\theta) & h_{\mathrm{e}}^{[1]}(j\theta) & \cdots \\ 0 & 0 & h_{\mathrm{e}}^{[0]}(j\theta) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

離散化された仮待ち時間

$$v^{[k]}(j\theta) = \int_{0+}^{\infty} \frac{\exp[-j\theta x](j\theta x)^k}{k!} \cdot v(x)dx$$

以降では，無限次元ベクトル $(x^{[0]}, x^{[1]}, \ldots)$ を $\boldsymbol{x}^\star$ と表記する

- $\boldsymbol{v}^\star(j\theta)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ は次式を満たす

$$\boldsymbol{v}^\star(j\theta) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta)$$

$$\boldsymbol{u}^\star(1; j\theta) = \boldsymbol{h}_{\mathrm{e}}^\star(j\theta), \quad \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta) = \boldsymbol{u}^\star(n-1; (j+1)\theta)\overline{\boldsymbol{B}}_j \boldsymbol{H}_{\mathrm{e},j}, \; n = 2, 3, \ldots$$

➡ π_0 は次式で与えられる

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta)\boldsymbol{e} \right]^{-1}$$

M/G/1+PH の系内客数分布

系内客数分布 π_ℓ の書き換え

$$\pi_\ell = \hat{\pi}_{\ell-1}, \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

$$\hat{\pi}_\ell = \int_{0+}^{\infty} \left\{ \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \binom{m}{\ell} \{G_\mathrm{e}(x)\}^\ell \{\overline{G}_\mathrm{e}(x)\}^{m-\ell} \right\} v(x)\,dx$$

- $\hat{\pi}_\ell^{[m]}$ $(\ell = 0, 1, \ldots m,\ m = 1, 2, \ldots)$ を次式で定義

$$\hat{\pi}_\ell^{[m]} = \int_{0+}^{\infty} K_{m,\ell}(x)\, v(x)\,dx$$

$$K_{m,\ell}(x) = \binom{m}{\ell} \{G_\mathrm{e}(x)\}^\ell \{\overline{G}_\mathrm{e}(x)\}^{m-\ell}$$

このとき，次式が成立

$$\pi_\ell = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \hat{\pi}_{\ell-1}^{[m]}, \qquad \ell = 1, 2, \ldots$$

待ち時間制約の平衡分布の一様化

- 待ち時間制約の補分布 $\overline{G}(x)$

$$\overline{G}(x) = \boldsymbol{\alpha}\exp[\boldsymbol{T}x]\boldsymbol{e} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!} \cdot \overline{g}^{[m]}$$

- $G_e(x)$ と $\overline{G}_e(x)$ も同様に，一様化によって書き換えられる

$$G_e(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!} \cdot g_e^{[m]}, \qquad \overline{G}_e(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!} \cdot \overline{g}_e^{[m]}$$

ただし，

$$g_e^{[0]} = 0, \qquad g_e^{[m]} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\overline{g}^{[k]}}{\theta \mathrm{E}[G]}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$\overline{g}_e^{[m]} = 1 - g_e^{[m]}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

$K_{m,\ell}(x)$ の離散化

$$\hat{\pi}_\ell^{[m]} = \int_{0+}^{\infty} K_{m,\ell}(x) v(x) dx, \qquad K_{m,\ell}(x) = \binom{m}{\ell} \{\mathrm{G_e}(x)\}^\ell \{\overline{\mathrm{G}}_\mathrm{e}(x)\}^{m-\ell}$$

- $K_{m,\ell}(x)$ は次の形で表される ($\kappa_{m,\ell}^{[i]}$ の求め方は後述)

$$K_{m,\ell}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp[-m\theta x](m\theta x)^i}{i!} \cdot \kappa_{m,\ell}^{[i]}$$

- $\boldsymbol{\kappa}_{m,\ell}^{\star}$: $\kappa_{m,\ell}^{[i]}$ を第 i 要素とする縦ベクトル

  ➡ $\hat{\pi}_\ell^{[m]} = \boldsymbol{v}^{\star}(m\theta)\boldsymbol{\kappa}_{m,\ell}^{\star}$

$$\left(\pi_\ell = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \hat{\pi}_{\ell-1}^{[m]} \quad \text{より，} \ \pi_\ell \ \text{が求まる} \right)$$

$K_{m,\ell}(x)$ の離散版 $\kappa^\star_{m,\ell}$

- $\boldsymbol{\kappa}^\star_{1,0} = \overline{\boldsymbol{g}}^\star_{\mathrm{e}}$, $\boldsymbol{\kappa}^\star_{1,1} = \boldsymbol{g}^\star_{\mathrm{e}}$ および次の漸化式より $\boldsymbol{\kappa}^\star_{m,\ell}$ は定められる

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\kappa}^\star_{m,0} &= \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^\star_{m-1,0} \\
\boldsymbol{\kappa}^\star_{m,\ell} &= \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^\star_{m-1,\ell} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^\star_{m-1,\ell-1}, \quad \ell = 1,2,\ldots,m-1 \\
\boldsymbol{\kappa}^\star_{m,m} &= \boldsymbol{B}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^\star_{m-1,m-1}
\end{aligned}
$$

ただし,

$$
\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g},m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_m(1,0)\overline{\mathrm{g}}^{[1]}_{\mathrm{e}} & b_m(1,1) & 0 & \cdots \\ b_m(2,0)\overline{\mathrm{g}}^{[2]}_{\mathrm{e}} & b_m(2,1)\overline{\mathrm{g}}^{[1]}_{\mathrm{e}} & b_m(2,2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{g},m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots \\ b_m(1,0)\mathrm{g}^{[1]}_{\mathrm{e}} & 0 & 0 \cdots \\ b_m(2,0)\mathrm{g}^{[2]}_{\mathrm{e}} & b_m(2,1)\mathrm{g}^{[1]}_{\mathrm{e}} & 0 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \ddots \end{pmatrix}
$$

まとめ

- M/G/1+PH 待ち行列の系内客数分布 π_ℓ を考察
  - M/G/1+G では，仮待ち時間密度 $v(x)$ を含む積分で表される

$$\pi_\ell = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \hat{\pi}_{\ell-1}^{[m]}$$

$$\hat{\pi}_\ell^{[m]} = \int_{0+}^{\infty} K_{m,\ell}(x)\, v(x)\, dx$$

  - M/G/1+PH に特別化した場合

$$\hat{\pi}_\ell^{[m]} = \boldsymbol{v}^{\star}(m\theta)\boldsymbol{\kappa}_{m,\ell}^{\star}$$

  ➡ 可算個の非負数の和と積で表現可能

- この結果を元に，π_ℓ に対する数値計算法が構築できる
  - 適切な切断近似の方法に関する考察は今後の課題