客の待ち時間に制約のある集団到着 M/G/1 待ち行列の解析

井上 文彰

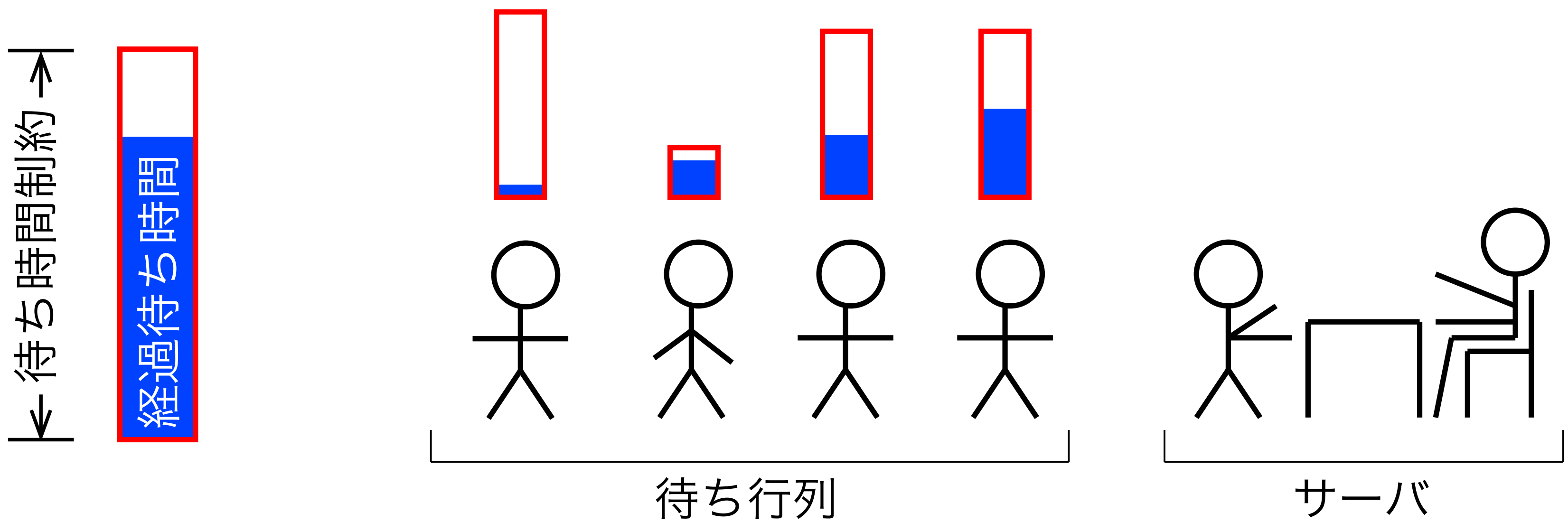
大阪大学工学研究科

本講演は，右記の 3 名との共同研究に基づく．

Onno Boxma (アイントホーフェン工科大学)
David Perry (ハイファ大学)
Shelley Zacks (ビンガムトン大学)

待ち時間制約のある待ち行列モデル

- 待ち時間が長すぎると，客はサービスを受けずに離脱する



- (例) コールセンタ，生鮮品在庫，臓器移植システム
- ケンドールの記法

A	/	B	/	c	+	W
到着間隔		サービス時間		サーバ数		待ち時間制約

待ち時間制約のある単一サーバ待ち行列

- GI/G/1+G 待ち行列
  - [Baccelli et al. (1984)], [Daley (1965)], [Stanford (1979)]
- GI/G/1+D 待ち行列
  - [Cohen (1965)]
- M/G/1+G 待ち行列
  - [Baccelli et al. (1984)], [Boxma et al. (2011)], [Inoue and Takine (2015)], [Kovalenko (1961)]

そのほか,

M/G/1+PH [Brandt and Brandt (2013)], M/G/1+M [Rao (1967)],
M/G/1+D [Bae et al. (2001), Cohen (1969), Daley (1965)]

本研究の動機

- 待ち時間制約のある待ち行列において，
  集団到着のあるモデルはほとんど考察されていない
- 調べた限りでは，[Kim and Kim (2014)] がほぼ唯一の論文
  - ◆ M^{X}/M/c+D の呼損率 P_{loss} を考察
  - ➡ 通常の M^{X}/M/c における待ち時間分布を用いて P_{loss} を表現
- 本研究では，待ち時間制約のある M^{X}/G/1 待ち行列を解析
  - ◆ 特に，待ち時間制約に関して，
    集団到着に特有の 2 種類のモデルを導入

考察するモデル

- 客の集団の到着は率 λ のポアソン過程に従う
  - 集団のサイズは確率関数 p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ に従って i.i.d.
- サービス時間は分布関数 $H(x)$ に従って i.i.d. (密度関数 $h(x)$)
- 待ち時間制約に関し，次の 2 種類のモデルを考察
  - $M^X/G/1+G_{\mathrm{same}}$: 同じ集団内では待ち時間制約長が同一 (集団ごとの待ち時間制約長は i.i.d.)
  - $M^X/G/1+G_{\mathrm{diff}}$: 集団の括りとは無関係に待ち時間制約長は i.i.d.

考察するモデル

- 客の集団の到着は率 λ のポアソン過程に従う
  - 集団のサイズは確率関数 p_n ($n = 1, 2, \ldots$) に従って i.i.d.
- サービス時間は分布関数 $H(x)$ に従って i.i.d. (密度関数 $h(x)$)
- 待ち時間制約に関し，次の 2 種類のモデルを考察
  - $M^X/G/1+G_{\mathrm{same}}$: 同じ集団内では待ち時間制約長が同一
    (集団ごとの待ち時間制約長は i.i.d.)
  - $M^X/G/1+G_{\mathrm{diff}}$: 集団の括りとは無関係に
    待ち時間制約長は i.i.d.
- $G(x)$: 待ち時間制約長の分布関数 ($\overline{G}(x) = 1 - G(x)$: 補分布関数)
  - 一般には $\lim_{x\to\infty} \overline{G}(x) = g_\infty \in [0, 1)$ (制約の無い客の存在)

本発表の概要

はじめに，系内仕事量と呼損率に関して
$M^X/G/1+G_{same}$ と $M^X/G/1+G_{diff}$ を統一的に扱う方法を示す

➡ 待ち時間に依存するサービス時間をもつ待ち行列の
パラメータを求める問題に帰着

次に，その結果をもとに

- $M^X/G/1+G_{same}$ において
  - 系内仕事量に加え，実待ち時間や集団内呼損数を解析
  - 分布を特別化したいくつかのモデルを考察
- $M^X/G/1+G_{diff}$ において
  - 集団サイズが幾何分布に従う場合 ($M^{geo}/G/1+G_{diff}$) を考察

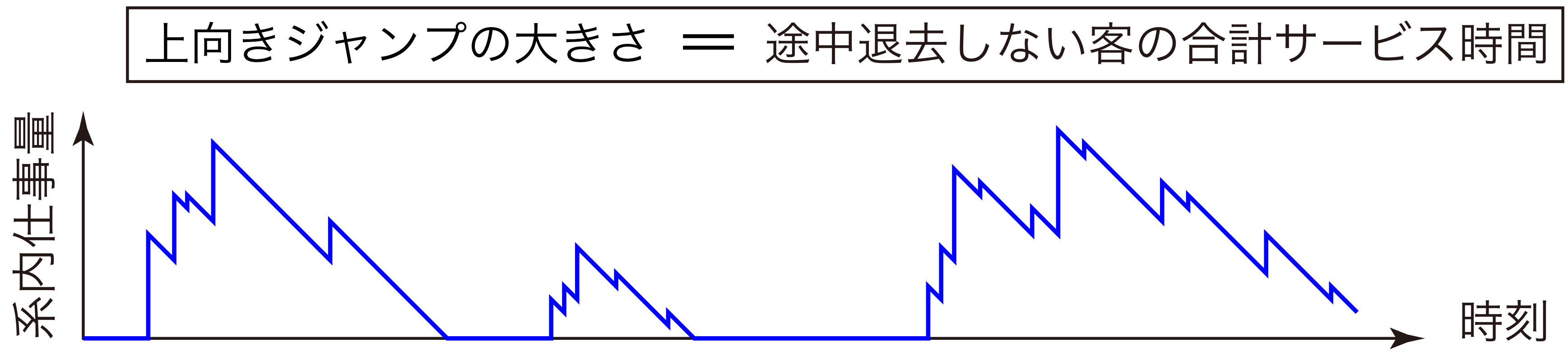
  ➡ $M^X/G/1+G_{same}$ と比べて格段に複雑な結果が得られる

系内仕事量と呼損率に対する統一的取り扱い

基本的な観察

系内仕事量: 現時点で滞在中の客のうち，最終的にサービスを受ける
(途中退去しない) 客の残余サービス時間の総和

- 系内仕事量過程が等価な，単一到着待ち行列を考える
  - 客は率 λ のポアソン過程に従って到着
  - 客に待ち時間制約は無く，サービスを終えるまで系に滞在
  - 待ち時間が y である客のサービス時間は
    分布関数 $H(w \mid y)$ に従って i.i.d.



基本的な観察

系内仕事量: 現時点で滞在中の客のうち，最終的にサービスを受ける
(途中退去しない) 客の残余サービス時間の総和

- 系内仕事量過程が等価な，単一到着待ち行列を考える
  - 客は率 λ のポアソン過程に従って到着
  - 客に待ち時間制約は無く，サービスを終えるまで系に滞在
  - 待ち時間が y である客のサービス時間は
    分布関数 $H(w \mid y)$ に従って i.i.d.

➡ 待ち時間に依存するサービス時間をもつ待ち行列 [Posner (1973)]

サービス時間が待ち時間に依存するモデル

$\overline{H}(w \mid y) \triangleq 1 - H(w \mid y)$: 待ち時間が y の客のサービス時間の補分布

- パラメータ $\overline{H}(w \mid y)$ が与えられれば，以下の結果が得られる
  - 次の条件が満たされるとき，系の安定性が保証される

[Meyn and Tweedie (1993)]

$$\lambda\beta(y) < \infty \ \text{ for all } y \geq 0, \quad \text{かつ} \quad \limsup_{y\to\infty} \lambda\beta(y) < 1$$

ただし，

- $\beta(y) \triangleq \displaystyle\int_{w=0}^{\infty} w\,dH(w \mid y) = \int_{w=0}^{\infty} \overline{H}(w \mid y)\,dw$

(待ち時間が y である客の平均サービス時間)

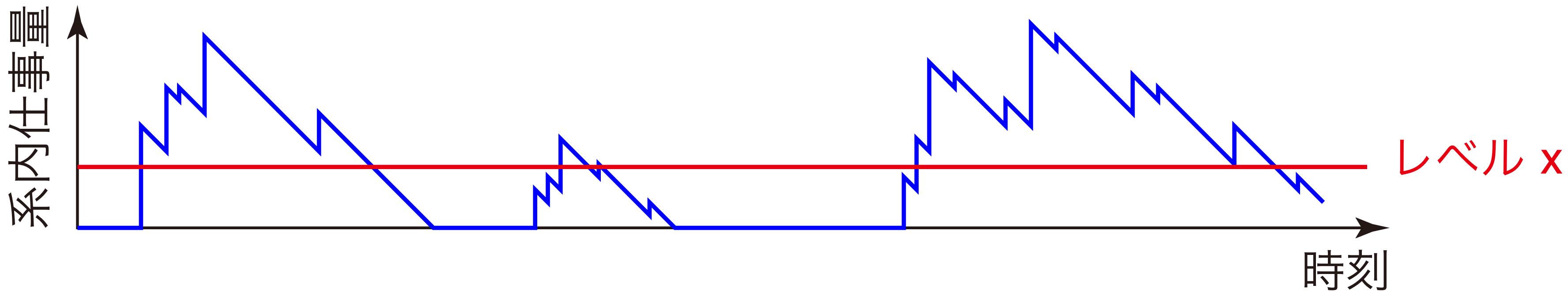
サービス時間が待ち時間に依存するモデル

さらに，系が安定であるとき，

$v(x)$: 定常系内仕事量密度，π_0: 系が空である確率　とおくと

- $v(x) = \lambda \pi_0 \overline{H}(x \mid 0) + \lambda \int_{0+}^{x} v(y) \overline{H}(x-y \mid y) dy$

系内仕事量過程の任意の標本路において，レベル x を
下向きに通過する遷移の数 ＝ 上向きに通過する遷移の数



サービス時間が待ち時間に依存するモデル

さらに，系が安定であるとき，

$v(x)$: 定常系内仕事量密度，π_0: 系が空である確率　とおくと

- $v(x) = \lambda \pi_0 \overline{H}(x \mid 0) + \lambda \int_{0+}^{x} v(y) \overline{H}(x-y \mid y) dy$
  - ➡ これを解くと，$v(x)$ は次式で一意に与えられる

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x)$$

$$\phi_1(x) = \lambda \overline{H}(x \mid 0), \quad \phi_n(x) = \lambda \int_{0+}^{x} \phi_{n-1}(y) \overline{H}(x-y \mid y), \quad n = 2, 3, \ldots$$

- また，π_0 は正規化条件から定められる

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \right]^{-1}, \qquad c_n = \int_{0+}^{\infty} \phi_n(x) dx$$

呼損率 P_{loss}

P_{loss}: ランダムに選ばれた客が，途中退去する確率

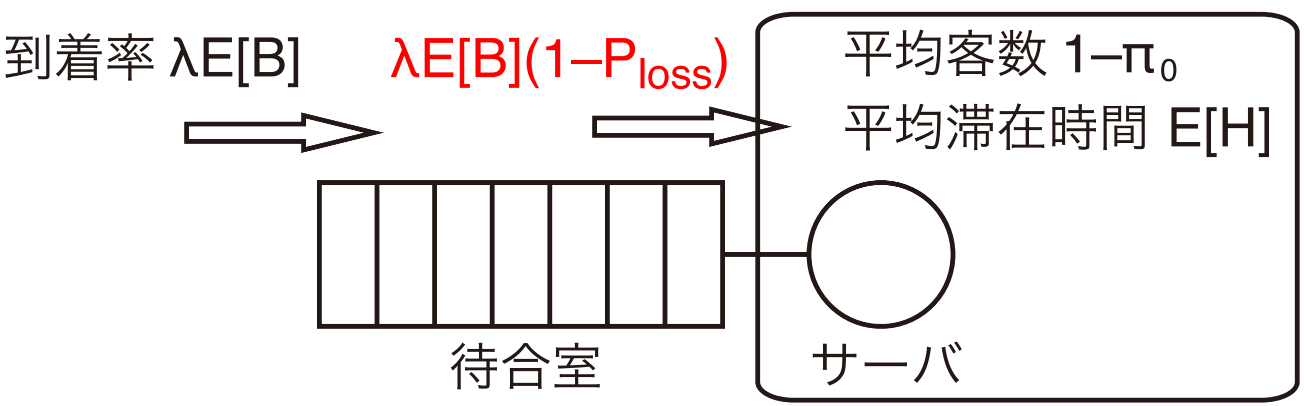
$\mathrm{M^x/G/1+G_{same}}$ と $\mathrm{M^x/G/1+G_{diff}}$ のいずれにおいても下記が成立

- サーバ部分にリトルの公式を適用

$$1 - \pi_0 = \lambda \mathrm{E}[B] \cdot (1 - P_{\mathrm{loss}}) \cdot \mathrm{E}[H]$$

$\boxed{\mathrm{E}[B]\text{: 平均集団サイズ}}$

➡ $$P_{\mathrm{loss}} = 1 - \frac{1-\pi_0}{\rho} \qquad (\rho = \lambda \mathrm{E}[B]\mathrm{E}[H])$$



ここまでのまとめ

- $\mathrm{M^X/G/1{+}G_{same}}$ と $\mathrm{M^X/G/1{+}G_{diff}}$ の系内仕事量と呼損率の解析
  - 待ち時間に依存するサービス時間をもつモデルの解析に帰着
  - それぞれのモデルに対し，$\overline{H}(w \mid y)$ を導出することが必要
    - $\overline{H}(w \mid y)$: 待ち時間が y の客のサービス時間の補分布
- 以降では，これを元に $\mathrm{M^X/G/1{+}G_{same}}$ と $\mathrm{M^X/G/1{+}G_{diff}}$ を考察

$\mathrm{M}^{\mathrm{X}}/\mathrm{G}/1+\mathrm{G}_{\mathrm{same}}$ 待ち行列

モデル (再掲)

- 客の集団の到着は率 λ のポアソン過程に従う
  - 集団のサイズは確率関数 p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ に従って i.i.d.
- サービス時間は分布関数 $H(x)$ に従って i.i.d.
  - 補分布関数 $\overline{H}(x)$，密度関数 $h(x)$
- 同じ集団内の客は同一の待ち時間制約長をもつ
  - 待ち時間制約長は分布関数 $G(x)$ に従って集団ごとに i.i.d.
  - $\overline{G}(x) = 1 - G(x)$: 待ち時間制約長の補分布関数
    - $\lim_{x\to\infty} \overline{G}(x) = g_\infty \in [0, 1)$

g_∞: 待ち時間制約をもたない集団の割合

到着時に持ち込まれる結合仕事量 (1)

ある集団が，到着直前に A の系内仕事量を見たとする

- 次式で定義される結合確率 $F(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ を考える

$$F(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$$
$$\triangleq \Pr(N_{\mathrm{loss}} = n,\, N_{\mathrm{admit}} = k,\, W_1 \le w_1,\, W_2 \le w_2, \ldots, W_k \le w_k \mid A = y)$$

  - N_{loss} ：この集団内の途中退去する客数
  - N_{admit}：この集団内のサービスを受ける客数 ($N_{\mathrm{admit}} \ge 1$)
  - W_i ：この集団で i 番目にサービスを受ける客のサービス時間 ($i = 1, 2, \ldots, N_{\mathrm{admit}}$)

- さらに，$f(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ を次式で定義

$$f(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y) \triangleq \frac{\partial^k F(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)}{\partial w_1 \partial w_2 \cdots \partial w_k}$$

到着時に持ち込まれる結合仕事量 (2)

$$F(n, k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$$

$$= \Pr(N_{\text{loss}} = n,\, N_{\text{admit}} = k,\, W_1 \le w_1,\, W_2 \le w_2,\, \ldots,\, W_k \le w_k \mid A = y)$$

- 定義より, $f(n, k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ は次式で与えられる

$$f(0, k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y) \;=\; p_k \cdot \overline{G}\Big(y + \sum_{m=1}^{k-1} w_m\Big) \cdot \prod_{i=1}^{k} h(w_i)$$

k 人が到着, 0 人が途中退去

末尾の客が途中退去しない

到着時に持ち込まれる結合仕事量 (2)

$$F(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$$
$$= \Pr(N_{\mathrm{loss}} = n,\, N_{\mathrm{admit}} = k,\, W_1 \le w_1,\, W_2 \le w_2, \ldots, W_k \le w_k \mid A = y)$$

- 定義より，$f(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ は次式で与えられる

$$f(0,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y) = p_k \cdot \overline{G}\left(y + \sum_{m=1}^{k-1} w_m\right) \cdot \prod_{i=1}^{k} h(w_i)$$

$$f(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y) = p_{n+k} \cdot \left[\overline{G}\left(y + \sum_{m=1}^{k-1} w_m\right) - \overline{G}\left(y + \sum_{m=1}^{k} w_m\right)\right] \cdot \prod_{i=1}^{k} h(w_i)$$

$n+k$ 人が到着，n 人が途中退去

$k+1$ 番目以降の客が途中退去

$f(n, k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ の周辺化 (1)

- $f_{\mathrm{total}}(n, k;\, w \mid y)$ $(n = 0, 1, \ldots,\ k = 1, 2, \ldots)$ を次式で定義

$$f_{\mathrm{total}}(n, 1;\, w \mid y) = f(n, 1;\, w \mid y)$$

$$f_{\mathrm{total}}(n, k;\, w \mid y) = \int_{w_1=0}^{w} \int_{w_2=0}^{w-w_1} \cdots \int_{w_{k-1}=0}^{w-w_1-w_2-\cdots-w_{k-2}} \cdot f\left(n, k;\, w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}, w - \sum_{m=1}^{k-1} w_m \mid y\right) \cdot dw_{k-1}\, dw_{k-2} \cdots dw_1$$

到着直前に見た仕事量 $= y$ という条件の下で,

- $n + k$ 人が到着, n 人が途中退去
- 持ち込んだ仕事量の合計 $\approx w$

$f(n, k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ の周辺化 (2)

前述の結果を用いると，次式が導かれる
($h^{(n)}(x)$: サービス時間密度の n 重畳み込み)

- 途中退去しない客数 $k = 1$

$$f_{\mathrm{total}}(0, 1;\, w \mid y) = p_1 \overline{G}(y) h(w)$$

$$f_{\mathrm{total}}(n, 1;\, w \mid y) = p_{n+1} \left[\overline{G}(y) - \overline{G}(y + w) \right] h(w), \quad n = 1, 2, \ldots$$

- 途中退去しない客数 $k = 2, 3, \ldots$

$$f_{\mathrm{total}}(0, k;\, w \mid y) = p_k \int_0^w \overline{G}(y + u) h^{(k-1)}(u) h(w - u)\, du$$

$$f_{\mathrm{total}}(n, k;\, w \mid y) = p_{n+k} \int_0^w [\overline{G}(y + u) - \overline{G}(y + w)] \cdot h^{(k-1)}(u) h(w - u)\, du, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$\overline{H}(w \mid y)$ の導出

待ち時間に依存するサービス時間をもつ，等価なモデルにおいて
$\overline{H}(w \mid y)$: 待ち時間が y の客のサービス時間の補分布

- $\overline{H}(w \mid y)$ は次式を満たす

$$\overline{H}(w \mid y) = \int_w^\infty \sum_{n=0}^\infty \sum_{k=1}^\infty f_{\text{total}}(n, k;\, t \mid y)\, dt$$

これより，

$$\overline{H}(w \mid y) = \overline{G}(y)\overline{H}(w) + \int_0^w \overline{G}(y+u) \sum_{k=2}^\infty \overline{p}_k h^{(k-1)}(u)\overline{H}(w-u)\, du$$

$\overline{H}(x)$: サービス時間の補分布，$h^{(n)}(x)$: サービスの n 重畳み込み密度
$\overline{G}(x)$: 待ち時間制約の補分布，$\overline{p}_n$: Pr(集団サイズ $\geq n$) $\left(= \sum_{k=n}^\infty p_k\right)$

安定条件

待ち時間に依存するサービス時間をもつ，等価なモデルにおいて

$\beta(y)$: 待ち時間が y の客の平均サービス時間 $\left(\beta(y) = \int_0^\infty \overline{H}(w \mid y)dw\right)$

- 前述の通り，次式が成り立つとき系は安定

$$\lambda\beta(y) < \infty \text{ for all } y \geq 0, \quad \text{かつ} \quad \limsup_{y\to\infty} \lambda\beta(y) < 1$$

- $\mathrm{M^X/G/1{+}G_{same}}$ では,

$$\beta(y) = \mathrm{E}[H] \sum_{k=1}^{\infty} \overline{p}_k \mathrm{E}\left[\overline{G}\left(y + \sum_{m=1}^{k-1} H_m\right)\right], \qquad \lim_{y\to\infty} \beta(y) = \mathrm{E}[H]\mathrm{E}[B]g_\infty$$

$\{H_n\}_{n=1,2,\ldots}$: サービス時間分布に従う i.i.d. 確率変数列

安定条件

待ち時間に依存するサービス時間をもつ，等価なモデルにおいて

$\beta(y)$: 待ち時間が y の客の平均サービス時間 $\left(\beta(y) = \int_0^\infty \overline{H}(w \mid y)dw\right)$

- 前述の通り，次式が成り立つとき系は安定

$$\lambda\beta(y) < \infty \quad \text{for all } y \geq 0, \quad \text{かつ} \quad \limsup_{y\to\infty} \lambda\beta(y) < 1$$

- $\mathrm{M^X/G/1{+}G_{same}}$ では，

$$\beta(y) = \mathrm{E}[H] \sum_{k=1}^{\infty} \overline{p}_k \mathrm{E}\left[\overline{G}\left(y + \sum_{m=1}^{k-1} H_m\right)\right], \qquad \lim_{y\to\infty} \beta(y) = \mathrm{E}[H]\mathrm{E}[B]g_\infty$$

➡ $\boxed{\text{安定条件:} \ \rho < \infty \ \text{かつ} \ \rho g_\infty < 1}$ $\qquad (\rho = \lambda\mathrm{E}[B]\mathrm{E}[H])$

以降では，この条件が満たされていることを仮定する

系内仕事量と呼損率 (再掲)

$v(x)$: 系内仕事量密度，π_0: 系が空である確率

P_{loss}: 客が途中退去する確率

- $v(x) = \lambda\pi_0\overline{H}(x \mid 0) + \lambda\int_{0+}^{x} v(y)\overline{H}(x-y \mid y)dy$

  ➡ これを解くと，$v(x)$ は次式で一意に与えられる

$$v(x) = \pi_0\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n(x)$$

$$\phi_1(x) = \lambda\overline{H}(x \mid 0), \quad \phi_n(x) = \lambda\int_{0+}^{x}\phi_{n-1}(y)\overline{H}(x-y \mid y), \quad n = 2, 3, \ldots$$

- π_0 は正規化条件から定められ，P_{loss} は π_0 を用いて与えられる

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\right]^{-1}, \quad c_n = \int_{0+}^{\infty}\phi_n(x)dx, \quad P_{\text{loss}} = 1 - \frac{1-\pi_0}{\rho}$$

集団内呼損数

- $P_{\mathrm{loss}}(n)$: ランダムに選ばれた集団において,
  途中退去客数が n である確率

$$P_{\mathrm{loss}}(n) = \pi_0 P_{\mathrm{loss}}(n \mid 0) + \int_{0+}^{\infty} P_{\mathrm{loss}}(n \mid x) v(x) dx$$

  - $P_{\mathrm{loss}}(n \mid x)$: 到着直前に x の仕事量を見た集団において,
    途中退去客数が n である確率

定義より,

$$P_{\mathrm{loss}}(0 \mid x) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_{\mathrm{total}}(0, k; w \mid x) dw$$

$$P_{\mathrm{loss}}(n \mid x) = p_n G(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} f_{\mathrm{total}}(n, k; w \mid x) dw$$

集団内呼損数

- $P_{\mathrm{loss}}(n)$: ランダムに選ばれた集団において，
  途中退去客数が n である確率

$$P_{\mathrm{loss}}(n) = \pi_0 P_{\mathrm{loss}}(n \mid 0) + \int_{0+}^{\infty} P_{\mathrm{loss}}(n \mid x) v(x) dx$$

  - ◆ $P_{\mathrm{loss}}(n \mid x)$：到着直前に x の仕事量を見た集団において，
    途中退去客数が n である確率

定義より，

$$P_{\mathrm{loss}}(0 \mid x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \mathrm{E}\left[\overline{G}\left(x + \sum_{m=1}^{k-1} H_m\right)\right]$$

$$P_{\mathrm{loss}}(n \mid x) = p_n G(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{n+k} \mathrm{E}\left[\overline{G}\left(x + \sum_{m=1}^{k-1} H_m\right) - \overline{G}\left(x + \sum_{m=1}^{k} H_m\right)\right]$$

サービスを受ける客が見る仕事量 (1)

ランダムに選ばれた客に注目して考える

- $Q(0 \mid y)$ と $Q(n; w_1, w_2, \ldots, w_n \mid y)$ を次式で定義する

$$Q(0 \mid y) = \Pr(N_{\text{front}} = 0, G > y \mid \hat{A} = y)$$

$$Q(n; w_1, w_2, \ldots, w_n \mid y)$$
$$= \Pr\Big(N_{\text{front}} = n, G > y + \sum_{i=1}^{n} w_i, \hat{W}_1 \le w_1, \hat{W}_2 \le w_2, \ldots, \hat{W}_n \le w_n \mid \hat{A} = y\Big)$$

- $\hat{A}$ ：自分の属する集団が到着直前に見た仕事量
- N_{front} ：同じ集団内で自分より前に居る客数
- G ：自分 (が属する集団の客) の待ち時間制約長
- $\hat{W}_i$ ：自分が属する集団の i 番目の客のサービス時間 $(i = 1, 2, \ldots, N_{\text{front}})$

サービスを受ける客が見る仕事量 (1)

ランダムに選ばれた客に注目して考える

- $Q(0 \mid y)$ と $Q(n; w_1, w_2, \ldots, w_n \mid y)$ を次式で定義する

$$Q(0 \mid y) = \Pr(N_{\text{front}} = 0, G > y \mid \hat{A} = y)$$

$$Q(n; w_1, w_2, \ldots, w_n \mid y) \\ = \Pr\left(N_{\text{front}} = n, G > y + \sum_{i=1}^{n} w_i, \hat{W}_1 \le w_1, \hat{W}_2 \le w_2, \ldots, \hat{W}_n \le w_n \mid \hat{A} = y\right)$$

- さらに，$q(n; w_1, w_2, \ldots, w_n \mid y)$ を次式で定義する

$$q(n; w_1, w_2, \ldots, w_n \mid y) = \frac{\partial^n Q(n; w_1, w_2, \ldots, w_n \mid y)}{\partial w_1 \partial w_2 \cdots \partial w_n}$$

サービスを受ける客が見る仕事量 (2)

$\overline{p}_n$: 集団サイズの補分布,　　$\mathrm{E}[B]$: 平均集団サイズ

$\overline{G}$: 待ち時間制約の補分布,　$h(x)$: サービス時間密度

- $Q(0 \mid y)$ および $q(n; w_1, w_2, \ldots, w_n \mid y)$ は次式で与えられる

$$Q(0 \mid y) = \underbrace{\frac{1}{\mathrm{E}[B]}}_{\text{自分が集団の先頭}} \cdot \underbrace{\overline{G}(y)}_{\text{途中退去しない}}$$

$$q(n; w_1, w_2, \ldots, w_n \mid y) = \underbrace{\frac{\overline{p}_{n+1}}{\mathrm{E}[B]}}_{\text{集団内で自分の前に } n \text{ 人}} \cdot \underbrace{\overline{G}\Bigl(y + \sum_{m=1}^{n} w_m\Bigr)}_{\text{途中退去しない}} \cdot \prod_{i=1}^{n} h(w_i)$$

サービスを受ける客が見る仕事量 (3)

- $q_{\mathrm{total}}(w \mid y)$ を次式で定義する

$$q_{\mathrm{total}}(w \mid y) = q(1;\, w \mid y) + \sum_{n=2}^{\infty} \int_{w_1=0+}^{w} \int_{w_2=0+}^{w-w_1} \cdots \int_{w_{n-1}=0+}^{w-w_1-w_2-\cdots-w_{n-2}} \cdot q\left(n;\, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, w - \sum_{i=1}^{n-1} w_i \mid y\right) \cdot dw_{n-1}\, dw_{n-2} \cdots dw_1$$

このとき,

$$q_{\mathrm{total}}(w \mid y) = \overline{G}(y + w) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{p}_{n+1}}{\mathrm{E}[B]} \cdot h^{(n)}(w)$$

実待ち時間 (1)

D: ランダムに選ばれた，途中退去しない客の待ち時間

- D の分布関数を $D(x)$，密度関数を $d(x)$ とすると，

$$D(0) = \frac{1}{1-P_{\text{loss}}} \cdot \pi_0 Q(0 \mid 0) = \frac{\pi_0}{(1-P_{\text{loss}})\mathrm{E}[B]}$$

$$d(x) = \frac{1}{1-P_{\text{loss}}}\left[\pi_0 q_{\text{total}}(x \mid 0) + v(x) Q(0 \mid x) + \int_{0+}^{x} v(t) q_{\text{total}}(x-t \mid t)\, dt\right]$$

- 上式をもとに，$d(x)$ は次の積分方程式を満たすことが示される

$$\color{red}{d(x)} = D(0)\overline{G}(x)\left(\lambda \overline{H}_{\text{batch}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{p}_{n+1} h^{(n)}(x)\right)$$
$$+ \lambda \overline{G}(x) \int_{0+}^{x} \color{red}{d(y)} \overline{H}_{\text{batch}}(x-y)\, dy$$

$$\left(\overline{H}_{\text{batch}}(x) \triangleq \int_{x}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_n h^{(n)}(t)\, dt\right)$$

実待ち時間 (2)

- $d(x)$ および $D(0)$ は次式で直接与えられる

$$d(x) = D(0) \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{\mathrm{D},n}(x), \qquad D(0) = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0+}^{\infty} \phi_{\mathrm{D},n}(x)dx\right]^{-1}$$

ただし,

$$\phi_{\mathrm{D},1}(x) = \overline{G}(x)\left(\lambda \overline{H}_{\mathrm{batch}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{p}_{n+1} g^{(n)}(x)\right)$$

$$\phi_{\mathrm{D},n}(x) = \lambda \overline{G}(x) \int_{0+}^{x} \phi_{\mathrm{D},n-1}(y) \overline{H}_{\mathrm{batch}}(x-y)dy, \quad n = 2, 3, \ldots$$

- また, π_0 と P_{loss} は $D(0)$ を用いても表される

$$\pi_0 = \frac{\mathrm{E}[B]D(0)}{\rho + \mathrm{E}[B]D(0)}, \qquad P_{\mathrm{loss}} = 1 - \frac{1-\pi_0}{\rho}$$

$\mathrm{M^X/G/1{+}G_{same}}$ の特別な場合

$\mathrm{M}^{\mathrm{geo}}$/G/1+$\mathrm{G}_{\mathrm{same}}$ 待ち行列

$p_n = (1-\alpha)\alpha^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ を仮定． $\alpha \in [0, 1)$

- このとき，集団内呼損数分布が大幅に単純化される
  - $P_{\mathrm{loss}}(0 \mid x) = \dfrac{\lambda\beta(x)}{\rho}$, $\quad P_{\mathrm{loss}}(n \mid x) = [1 - P_{\mathrm{loss}}(0 \mid x)](1-\alpha)\alpha^{n-1}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$
  - $P_{\mathrm{loss}}(0) = 1 - P_{\mathrm{loss}}$, $\quad P_{\mathrm{loss}}(n) = P_{\mathrm{loss}}(1-\alpha)\alpha^{n-1}$, $\quad n = 1, 2, \ldots$

$$P_{\mathrm{loss}}(0 \mid x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \mathrm{E}\left[\overline{G}\left(x + \sum_{m=1}^{k-1} H_m\right)\right]$$

$$P_{\mathrm{loss}}(n \mid x) = p_n G(x) + \sum_{k=1}^{\infty} p_{n+k} \mathrm{E}\left[\overline{G}\left(x + \sum_{m=1}^{k-1} H_m\right) - \overline{G}\left(x + \sum_{m=1}^{k} H_m\right)\right]$$

$$P_{\mathrm{loss}}(n) = \pi_0 P_{\mathrm{loss}}(n \mid 0) + \int_{0+}^{\infty} P_{\mathrm{loss}}(n \mid x) v(x) dx$$

$M^{geo}/M/1+G_{same}$ 待ち行列 (1)

さらに，$h(x) = \mu \exp[-\mu x]$ を仮定すると

- 系内仕事量分布に関係する量

$$\overline{H}(w \mid y) = \overline{G}(y)\overline{H}(w) + \int_0^w \overline{G}(y+u) \sum_{k=2}^{\infty} \overline{p}_k h^{(k-1)}(u)\overline{H}(w-u)du$$

$$= \exp[-\mu w]\left[\overline{G}(y) + \alpha\mu \int_0^w \overline{G}(y+u)\exp[\alpha\mu u]du\right]$$

- 実待ち時間分布に関係する量

$$\overline{H}_{\mathrm{batch}}(x) = \int_x^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} p_n h^{(n)}(t)dt$$

$$= \exp[-(1-\alpha)\mu x]$$

$M^{geo}/M/1+G_{same}$ 待ち行列 (2)

$$p_n = (1-\alpha)\alpha^{n-1} \ (n = 1, 2, \ldots), \quad h(x) = \mu \exp[-\mu x]$$

D: ランダムに選ばれた，サービスを受ける客の待ち時間

- $D = 0$ である確率 $D(0)$ と D の密度関数 $d(x)$ は次式で与えられる

$$d(x) = (\lambda + \alpha\mu) D(0) \overline{G}(x) \exp\left[\lambda J(x) - (1-\alpha)\mu x\right]$$

$$D(0) = \left[1 + \int_{0+}^{\infty} (\lambda + \alpha\mu) \overline{G}(x) \exp\left[\lambda J(x) - (1-\alpha)\mu x\right] dx\right]^{-1}$$

ただし， $J(x) = \displaystyle\int_0^x \overline{G}(y) dy$

$\mathrm{M}^{\mathrm{geo}}$/M/1+$\mathrm{G}_{\mathrm{same}}$ 待ち行列 (3)

$$D(0) = \left[1 + \int_{0+}^{\infty} (\lambda + \alpha\mu)\overline{G}(x) \exp\left[\lambda J(x) - (1-\alpha)\mu x\right] dx\right]^{-1}$$

- $D(0)$ を用いて，π_0 と P_{loss} は次式で与えられる

$$\pi_0 = \frac{\mathrm{E}[B]D(0)}{\rho + \mathrm{E}[B]D(0)}, \qquad P_{\mathrm{loss}} = 1 - \frac{1-\pi_0}{\rho}$$

- また，集団内呼損数分布 $P_{\mathrm{loss}}(n)$ は次式で与えられる

$$P_{\mathrm{loss}}(0) = 1 - P_{\mathrm{loss}}, \qquad P_{\mathrm{loss}}(n) = P_{\mathrm{loss}}(1-\alpha)\alpha^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$M^X/M/1+M_{\mathrm{same}}$ 待ち行列 (1)

$\overline{H}(x) = \exp[-\mu x]$, $\overline{G}(x) = \exp[-\eta x]$,

ならびに一般の集団サイズ分布 p_n を仮定

- このとき，$\overline{H}(w \mid y)$ は単純化される

$$\overline{H}(w \mid y) = \overline{G}(y)\overline{H}(w) + \int_0^w \overline{G}(y+u) \sum_{k=2}^{\infty} \overline{p}_k h^{(k-1)}(u)\overline{H}(w-u)du$$

$$= \exp[-\eta y - \mu w]\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{p}_k \left(\frac{\mu}{\eta}\right)^{k-1} \int_0^w \frac{\eta \exp[-\eta u](\eta u)^{k-2}}{(k-2)!} du\right]$$

$$= \exp[-\eta y] \cdot \exp[-\mu w]\left[1 + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{p}_k \left(\frac{\mu}{\eta}\right)^{k-1} \sum_{j=k-1}^{\infty} \frac{\exp[-\eta w](\eta w)^j}{j!}\right]$$

$$= \exp[-\eta y] \cdot \overline{R}(w)$$

$\mathrm{M^X/M/1+M_{same}}$ 待ち行列 (2)

$$v(x) = \lambda \pi_0 \overline{H}(x \mid 0) + \lambda \int_{0+}^{x} v(y) \overline{H}(x-y \mid y) dy$$

- $v^*(s)$ を系内仕事量の LST とする

$$v^*(s) = \pi_0 + \int_{0+}^{\infty} \exp[-sx] v(x) dx$$

- このとき，$\overline{H}(w \mid y) = \exp[-\eta y] \cdot \overline{R}(w)$ を用いると次式が示される

$$v^*(s) = \pi_0 + \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \lambda \overline{R}^*(s+k\eta), \qquad \pi_0 = \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=0}^{n} \lambda \overline{R}^*(k\eta) \right]^{-1}$$

ただし，

$$\overline{R}^*(s) = \int_0^{\infty} \exp[-sx] \overline{R}(x) dx = \frac{1}{\mu+s} \sum_{k=1}^{\infty} \overline{p}_k \left(\frac{\mu}{\mu+\eta+s} \right)^{k-1}$$

$\mathrm{M}^{\mathrm{geo}}$/M/1+$\mathrm{M}_{\mathrm{same}}$ 待ち行列

$p_n = (1-\alpha)\alpha^{n-1}$, $\overline{H}(x) = \exp[-\mu x]$, $\overline{G}(x) = \exp[-\eta x]$ を仮定

- 系内仕事量

$$v^*(s) = \pi_0 + \frac{\pi_0 \lambda}{s+\mu} + \frac{\pi_0(\lambda + \alpha\mu)}{s+\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda}{s + k\eta + (1-\alpha)\mu}$$

$$\pi_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda + \alpha\mu}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda}{k\eta + (1-\alpha)\mu} \right]^{-1}$$

- 実待ち時間 $\left(d^*(s) \triangleq D(0) + \int_{0+}^{\infty} \exp[-sx] d(x) dx \right)$

$$d^*(s) = D(0) + D(0) \cdot \frac{\lambda + \alpha\mu}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda}{s + k\eta + (1-\alpha)\mu}$$

$$D(0) = \left[1 + \frac{\lambda + \alpha\mu}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \prod_{k=1}^{n+1} \frac{\lambda}{k\eta + (1-\alpha)\mu} \right]^{-1}$$

M^X/G/1+D 待ち行列 (1)

$$\overline{G}(x) = \begin{cases} 1, & x < \tau, \\ 0, & x \geq \tau \end{cases}$$ を仮定 ($\tau > 0$).

- このとき，$\overline{H}(w \mid y)$ は次のように単純化される

$$\overline{H}(w \mid y) = \overline{G}(y)\overline{H}(w) + \int_0^w \overline{G}(y+u) \sum_{k=2}^{\infty} \overline{p}_k h^{(k-1)}(u) \overline{H}(w-u) du$$

$$= \begin{cases} \overline{H}_{\mathrm{batch}}(w), & y < \tau,\ w < \tau - y, \\ \overline{H}(w) + \sum_{k=2}^{\infty} \overline{p}_k \int_0^{\tau-y} h^{(k-1)}(u) \overline{H}(w-u) du, & y < \tau,\ w \geq \tau - y, \\ 0, & y \geq \tau \end{cases}$$

$\mathrm{M^X/G/1+D}$ 待ち行列 (2)

- 系内仕事量密度 $v(x)$ は次式で与えられる

$$v(x) = \pi_0 \phi(x), \qquad \pi_0 = \left[1 + \int_{0+}^{\infty} \phi(x)dx\right]^{-1}$$

ただし,

$$\phi(x) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \tilde{h}_{\mathrm{batch}}^{(n)}(x), & 0 < x < \tau, \\ \displaystyle\rho \overline{H}_{\mathrm{batch}}(x \mid 0) + \lambda \int_{0+}^{\tau} \phi(y) \overline{H}(x - y \mid y) dy, & x \geq \tau \end{cases}$$

$$\tilde{h}_{\mathrm{batch}}^{(1)}(x) = \frac{\overline{H}_{\mathrm{batch}}(x)}{\mathrm{E}[B]\mathrm{E}[H]}, \qquad \tilde{h}_{\mathrm{batch}}^{(n)}(x) = \tilde{h}_{\mathrm{batch}}^{(n-1)} * \tilde{h}_{\mathrm{batch}}^{(1)}(x)$$

したがって, $\rho < 1$ のとき

$v_{\mathrm{M^x/G/1}}(x)$: 通常の $\mathrm{M^x/G/1}$ での系内仕事量密度

$$v(x) = \frac{\pi_0}{1-\rho} \cdot v_{\mathrm{M^x/G/1}}(x), \qquad 0 < x < \tau$$

M^{X}/G/1+D 待ち行列 (3)

- 実待ち時間密度 $d(x)$ が満たす方程式も単純化される

$$d(x) = D(0)\overline{G}(x)\left(\lambda \overline{H}_{\mathrm{batch}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{p}_{n+1} h^{(n)}(x)\right) + \lambda \overline{G}(x) \int_{0+}^{x} d(y) \overline{H}_{\mathrm{batch}}(x-y)\, dy$$

$$= \begin{cases} D(0)\left(\lambda \overline{H}_{\mathrm{batch}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{p}_{n+1} h^{(n)}(x)\right) \\ \qquad + \lambda \int_{0+}^{x} d(y) \overline{H}_{\mathrm{batch}}(x-y)\, dy, & 0 < x < \tau, \\ 0, & x \geq \tau \end{cases}$$

$\mathrm{M^X/G/1+D}$ 待ち行列 (4)

- 実待ち時間密度 $d(x)$ は次式で与えられる

$$d(x) = \begin{cases} D(0)\Bigg[\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} \overline{p}_{m+1} h^{(m)}(x) \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \Bigg(\tilde{h}^{(n)}_{\mathrm{batch}}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{p}_{m+1} h^{(m)} * \tilde{h}^{(n)}_{\mathrm{batch}}(x)\Bigg)\Bigg], \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 < x < \tau, \\ 0, \quad x \geq \tau \end{cases}$$

$$D(0) = \Bigg[1 + \int_{0+}^{\tau} \Bigg\{ \sum_{m=1}^{\infty} \overline{p}_{m+1} h^{(m)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \Bigg(\tilde{h}^{(n)}_{\mathrm{batch}}(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \overline{p}_{m+1} h^{(m)} * \tilde{h}^{(n)}_{\mathrm{batch}}(x)\Bigg)\Bigg\} dx\Bigg]^{-1}$$

したがって，$\rho < 1$ のとき

$d_{\mathrm{M^X/G/1}}(x)$: 通常の $\mathrm{M^X/G/1}$ での実待ち時間密度

$$d(x) = \frac{\mathrm{E}[B]D(0)}{1-\rho} \cdot d_{\mathrm{M^X/G/1}}(x), \qquad 0 < x < \tau$$

M^{X}/G/1+$\mathrm{G}_{\mathrm{same}}$ のまとめ

同じ集団内では待ち時間制約長が同一と仮定

- 待ち時間に依存するサービス時間をもつモデルの $\overline{H}(w \mid y)$

$$\overline{H}(w \mid y) = \overline{G}(y)\overline{H}(w) + \int_0^w \overline{G}(y+u) \sum_{k=2}^{\infty} \overline{p}_k h^{(k-1)}(u)\overline{H}(w-u)\,du$$

- 系内仕事量，呼損率，集団内呼損数，実待ち時間を解析
- いくつかの特別な場合を考察
  - $\mathrm{M}^{\mathrm{geo}}$/G/1+$\mathrm{G}_{\mathrm{same}}$ ➡ 集団内呼損数が単純化
  - $\mathrm{M}^{\mathrm{geo}}$/M/1+$\mathrm{G}_{\mathrm{same}}$ ➡ 実待ち時間密度が単純化
  - M^{X}/M/1+$\mathrm{M}_{\mathrm{same}}$ ➡ 系内仕事量の LST が単純化
  - M^{X}/G/1+D ➡ 通常の M^{X}/G/1 との対応づけ

$\mathrm{M}^{\mathrm{geo}}/\mathrm{G}/1+\mathrm{G}_{\mathrm{diff}}$ 待ち行列

モデル

- 客の集団の到着は率 λ のポアソン過程に従う
  - 集団のサイズは幾何分布 $p_n = (1-\alpha)\alpha^{n-1}$ に従って i.i.d.
- サービス時間は分布関数 $H(x)$ に従って i.i.d.
  - 補分布関数 $\overline{H}(x)$,　密度関数 $h(x)$
- 客の待ち時間制約長は集団の括りとは無関係に i.i.d.
  - $\overline{G}(x) = 1 - G(x)$: 待ち時間制約長の補分布関数
    - $\lim_{x\to\infty} \overline{G}(x) = g_\infty \in [0, 1)$

g_∞: 待ち時間制約をもたない客の割合

到着時に持ち込まれる結合仕事量 (1)

ある集団が，到着直前に A の系内仕事量を見たとする

- $\mathrm{M^X/G/1+G_{same}}$ の場合と同様に $F(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ を定義

$$F(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$$
$$\triangleq \Pr(N_{\mathrm{loss}} = n,\, N_{\mathrm{admit}} = k,\, W_1 \le w_1,\, W_2 \le w_2, \ldots, W_k \le w_k \mid A = y)$$

  - N_{loss} ：この集団内の途中退去する客数
  - N_{admit} ：この集団内のサービスを受ける客数 ($N_{\mathrm{admit}} \ge 1$)
  - W_i ：この集団で i 番目にサービスを受ける客のサービス時間 ($i = 1, 2, \ldots, N_{\mathrm{admit}}$)

- また，$f^*(z,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ を次式で定義

$$f^*(z,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \frac{\partial^k F(n,k;\, w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)}{\partial w_1 \partial w_2 \cdots \partial w_k}$$

到着時に持ち込まれる結合仕事量 (2)

- $f^*(z, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ を導出するために，次の量を考える

$$\hat{F}(n, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$$

$$\triangleq \Pr(N_{\mathrm{admit}} \geq k, N_{\mathrm{loss}}^{(k)} = n, W_1 \leq w_1, W_2 \leq w_2, \ldots, W_k \leq w_k \mid A = y)$$

  - N_{admit} ：この集団内のサービスを受ける客数 ($N_{\mathrm{admit}} \geq 1$)
  - $N_{\mathrm{loss}}^{(k)}$ ：この集団内で k 番目の途中退去しない客より前に位置し，かつ途中退去する客数
  - W_i ：この集団で i 番目にサービスを受ける客のサービス時間 ($i = 1, 2, \ldots, N_{\mathrm{admit}}$)

- さらに，$\hat{f}^*(z, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ を次式で定義

$$\hat{f}^*(z, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y) \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \frac{\partial^k \hat{F}(n, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)}{\partial w_1 \partial w_2 \cdots \partial w_k}$$

結合密度 $\hat{f}^*(z, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$

$N_{\text{rest}}^{(k)}$ ：この集団内で k 番目の途中退去しない客より後ろに位置する客数 $(\Pr(N_{\text{rest}}^{(k)} = n) = (1-\alpha)\alpha^n)$

- $\hat{f}^*(z, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ は次式を満たす

$$\hat{f}^*(z, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$$

$$= \hat{f}^*(z, k-1; w_1, w_2, \ldots, w_{k-1} \mid y)$$

$$\cdot \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(N_{\text{rest}}^{(k-1)} = n)}_{\text{後ろに残り } n \text{ 人}} \sum_{i=0}^{n-1} z^i \underbrace{\left\{G\left(y + \sum_{m=1}^{k-1} w_m\right)\right\}^i \cdot \overline{G}\left(y + \sum_{m=1}^{k-1} w_m\right)}_{n \text{ 人のうち，前から } i \text{ 人は途中退去し，} i+1 \text{ 番目の客はサービスを受ける}} h(w_k)$$

結合密度 $\hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)$

$N_{\text{rest}}^{(k)}$ ：この集団内で k 番目の途中退去しない客より後ろに位置する客数 $(\Pr(N_{\text{rest}}^{(k)}=n)=(1-\alpha)\alpha^n)$

- $\hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)$ は次式を満たす

$$\hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)$$

$$= \hat{f}^*(z,k-1;w_1,w_2,\ldots,w_{k-1} \mid y)$$

$$\cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(N_{\text{rest}}^{(k-1)}=n) \sum_{i=0}^{n-1} z^i \left\{G\left(y+\sum_{m=1}^{k-1} w_m\right)\right\}^i \cdot \overline{G}\left(y+\sum_{m=1}^{k-1} w_m\right) h(w_k)$$

$$= \hat{f}^*(z,k-1;w_1,w_2,\ldots,w_{k-1} \mid y) \cdot \alpha \overline{G}_\alpha^*\left(z, y+\sum_{m=1}^{k-1} w_m\right) h(w_k)$$

◆ $\overline{G}_\alpha^*(z,y) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty} (1-\alpha)\alpha^{n-1} \sum_{m=1}^{n-1} z^n \{G(y)\}^n \overline{G}(y) = \dfrac{\overline{G}(y)}{1-z\alpha G(y)}$

結合密度 $f^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)$

- $\hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)$ は次式で与えられる

$$\hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y) = \overline{G}^*_\alpha(z,y)h(w_1)\prod_{i=2}^{k}\alpha\overline{G}^*_\alpha\left(z, y+\sum_{j=1}^{i-1}w_j\right)h(w_i)$$

- さらに，$f^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)$ は次式で与えられる

$$\begin{aligned} &f^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y) \\ &\qquad = \hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)\alpha^n\cdot\{G(y)\}^n z^n \end{aligned}$$

後ろに客が居ないか，
後ろの客は全て途中退去

結合密度 $f^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)$

- $\hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)$ は次式で与えられる

$$\hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y) = \overline{G}^*_\alpha(z,y)h(w_1)\prod_{i=2}^{k}\alpha\overline{G}^*_\alpha\left(z, y+\sum_{j=1}^{i-1} w_j\right)h(w_i)$$

- さらに，$f^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)$ は次式で与えられる

$$\begin{aligned} &f^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y) \\ &\quad = \hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(1-\alpha)\alpha^n\cdot\{G(y)\}^n z^n \\ &\quad = \hat{f}^*(z,k;w_1,w_2,\ldots,w_k \mid y)\cdot\left[1-\alpha+\alpha G^*_\alpha\left(z, y+\sum_{m=1}^{k} w_m\right)\right] \end{aligned}$$

  - $G^*_\alpha(z,y) \triangleq \sum_{n=1}^{\infty}(1-\alpha)\alpha^{n-1}\{G(y)\}^n z^n \;=\; zG(y)\cdot\dfrac{1-\alpha}{1-z\alpha G(y)}$

$\hat{f}^*(z, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ の周辺化 (1)

- $\hat{f}^*_{\text{total}}(z, k; w \mid y)$ を次式で定義

$$\hat{f}^*_{\text{total}}(z, 1; w \mid y) = \hat{f}^*(z, 1; w \mid y)$$

$$\hat{f}^*_{\text{total}}(z, k; w \mid y) = \int_{w_1=0}^{w} \int_{w_2=0}^{w-w_1} \cdots \int_{w_{k-1}=0}^{w-w_1-w_2-\cdots-w_{k-2}} \cdot \hat{f}^*\left(z, k; w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}, w - \sum_{m=1}^{k-1} w_m \mid y\right) \cdot dw_{k-1} dw_{k-2} \cdots dw_1$$

- さらに，$\hat{f}^*_{\text{total}}(z; w \mid y)$ を次式で定義

$$\hat{f}^*_{\text{total}}(z; w \mid y) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_{\text{total}}(z, k; w \mid y)$$

$\hat{f}^*(z, k; w_1, w_2, \ldots, w_k \mid y)$ の周辺化 (2)

$$\hat{f}^*_{\mathrm{total}}(z; w \mid y) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_{\mathrm{total}}(z, k; w \mid y)$$

- $\hat{f}^*_{\mathrm{total}}(z, k; w \mid y)$ は次の漸化式を満たす

$$\hat{f}^*_{\mathrm{total}}(z, 1; w \mid y) = \overline{G}^*_{\alpha}(z, y) h(w)$$

$$\hat{f}^*_{\mathrm{total}}(z, k; w \mid y) = \int_{0+}^{w} \hat{f}^*_{\mathrm{total}}(z, k-1; u \mid y) \cdot \alpha \overline{G}^*_{\alpha}(z, y+u) h(w-u) \, du$$

➡ 固定された z と y に対し,
$\hat{f}^*_{\mathrm{total}}(z; w \mid y)$ は次の積分方程式の解として得られる

$$\hat{f}^*_{\mathrm{total}}(z; w \mid y) = \overline{G}^*_{\alpha}(z, y) h(w) + \int_{0+}^{w} \hat{f}_{\mathrm{total}}(z; u \mid y) \cdot \alpha \overline{G}^*_{\alpha}(z, y+u) h(w-u) \, du$$

$\overline{H}(w \mid y)$ の導出

待ち時間に依存するサービス時間をもつ，等価なモデルにおいて
$\overline{H}(w \mid y)$: 待ち時間が y の客のサービス時間の補分布

- 以上の結果をもとに計算すると，$\overline{H}(w \mid y)$ が得られる

$$\overline{H}(w \mid y) = \int_w^\infty \frac{1-\alpha}{1-\alpha G(t)} \cdot \hat{f}_{\text{total}}(t \mid y) dt$$

ただし，固定された y に対して $\hat{f}_{\text{total}}(w \mid y)$ は
次の積分方程式の解として与えられる

$$\hat{f}_{\text{total}}(w \mid y) = \frac{\overline{G}(w)h(w)}{1-\alpha G(w)} + \int_{0+}^{w} \frac{\alpha \overline{G}(y+u)}{1-\alpha G(y+u)} \cdot \hat{f}_{\text{total}}(u \mid y) h(w-u) du$$

集団内呼損数

- $P^*_{\mathrm{loss}}(z)$: ランダムに選ばれた集団における途中退去客数の確率母関数

$$P^*_{\mathrm{loss}}(z) = \pi_0 P^*_{\mathrm{loss}}(z \mid 0) + \int_{0+}^{\infty} P^*_{\mathrm{loss}}(z \mid x) v(x) dx$$

  - ◆ $P^*_{\mathrm{loss}}(z \mid x)$: 到着直前に x の仕事量を見た集団における途中退去客数の確率母関数

- $P^*_{\mathrm{loss}}(z \mid x)$ は次式で与えられることが示せる

$$P^*_{\mathrm{loss}}(z \mid x) = G^*_{\alpha}(z, y) + \overline{G}^*_{\alpha}(z, x) \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[\left\{\prod_{i=2}^{k} \alpha \overline{G}^*_{\alpha}\left(z, x + \sum_{j=1}^{i-1} H_j\right)\right\} \cdot \left[1 - \alpha + \alpha G^*_{\alpha}\left(z, x + \sum_{m=1}^{k} H_m\right)\right]\right]$$

まとめ

- 待ち時間に制約のある集団到着 M/G/1 待ち行列を考察
  - $M^X/G/1+G_{\mathrm{same}}$: 同じ集団内では待ち時間制約長が同一
    (集団ごとの待ち時間制約長は i.i.d.)
  - $M^X/G/1+G_{\mathrm{diff}}$: 集団の括りとは無関係に
    待ち時間制約長は i.i.d.
- $M^X/G/1+G_{\mathrm{same}}$ において
  - 系内仕事量に加え，実待ち時間や集団内呼損数を解析
  - 分布を特別化したいくつかのモデルを考察
- $M^X/G/1+G_{\mathrm{diff}}$ において
  - 集団サイズが幾何分布に従う場合 ($M^{\mathrm{geo}}/G/1+G_{\mathrm{diff}}$) を考察

  ➡ $M^X/G/1+G_{\mathrm{same}}$ と比べて格段に複雑な結果