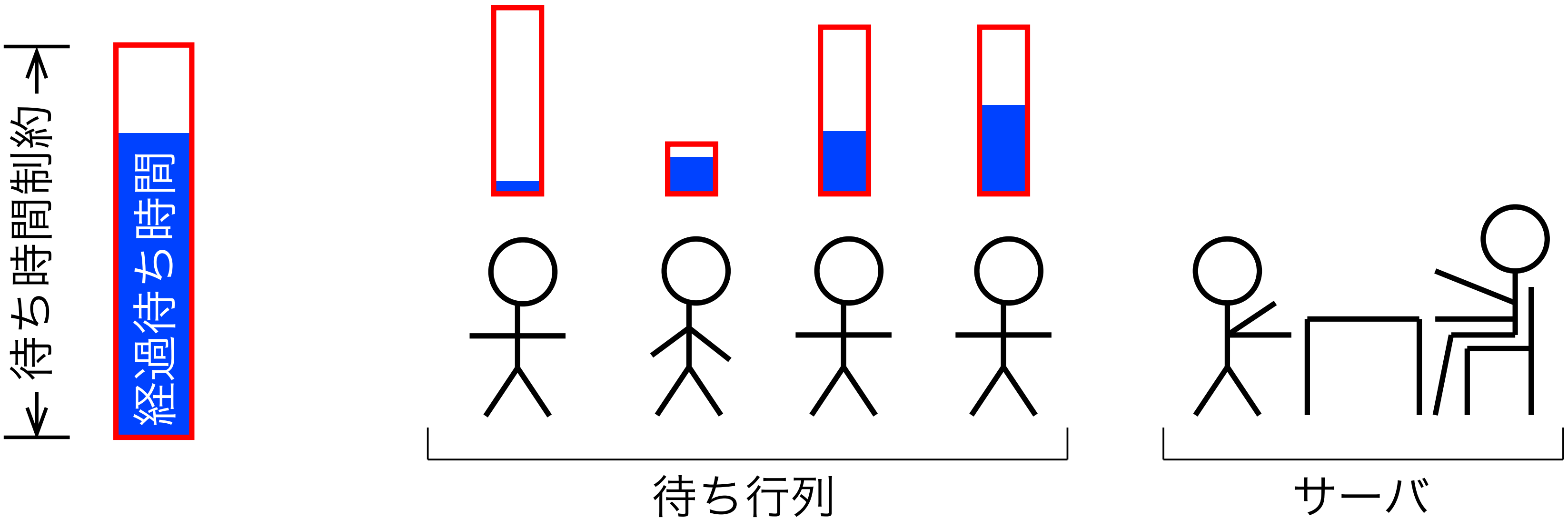
M/G/1+PH 待ち行列における系内客数分布の数値計算法

井上 文彰

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

待ち時間制約のある待ち行列モデル

- 待ち時間が長すぎると，客はサービスを受けずに離脱する



- (例) 遅延制約のあるデータ通信，コールセンタ
- ケンドールの記法

A	/	B	/	c	+	W
到着間隔		サービス時間		サーバ数		待ち時間制約

考察するモデル (M/G/1+PH)

- 客の到着は率 λ のポアソン過程に従う
- サービス時間は分布関数 $H(x)$ (平均 $\mathrm{E}[H]$) に従って i.i.d.
  - 簡単のため $H(0) = 0$ を仮定
- 待ち時間制約は相型分布 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$ に従って i.i.d.
  - 補分布関数 $\overline{G}(x) = \boldsymbol{\alpha} \exp[\boldsymbol{T} x] \boldsymbol{e}$

    $\boldsymbol{\alpha}$: 確率ベクトル, $\boldsymbol{T}$: 劣無限小生成作用素

    $\boldsymbol{e}$: 要素が全て 1 の列ベクトル
- $\mathrm{E}[G]$: 平均待ち時間制約長

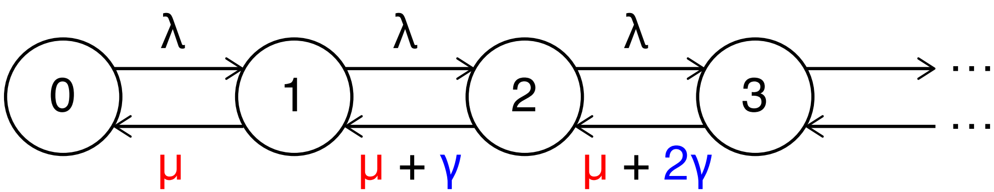
  $\mathrm{E}[G] = \boldsymbol{\alpha}(-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{e} < \infty$ ➡ 系は常に安定 [Baccelli et al. (1984)]

系内客数 L

本発表では，M/G/1+PH の定常系内客数 L を考察

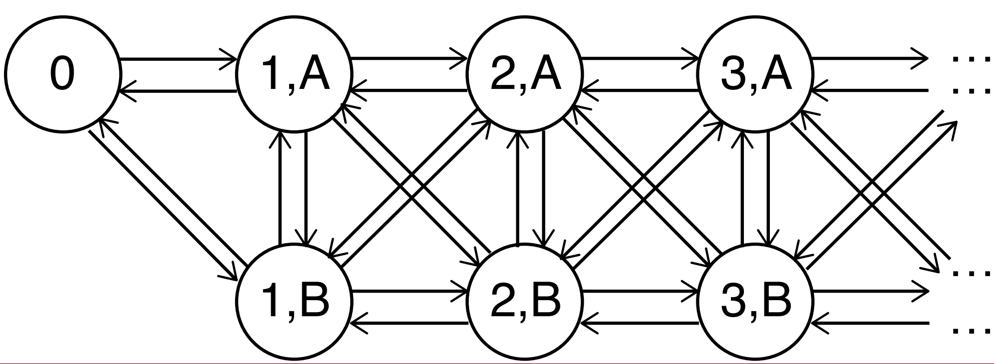
- L : 系内に滞在中である客の総数
  - 将来的に途中退去する客を含める

(例 1) M/M/1+M の系内客数過程



(レベル依存)
出生死滅過程

(例 2) M/PH/1+M の系内客数過程 (客数, サービスの相)



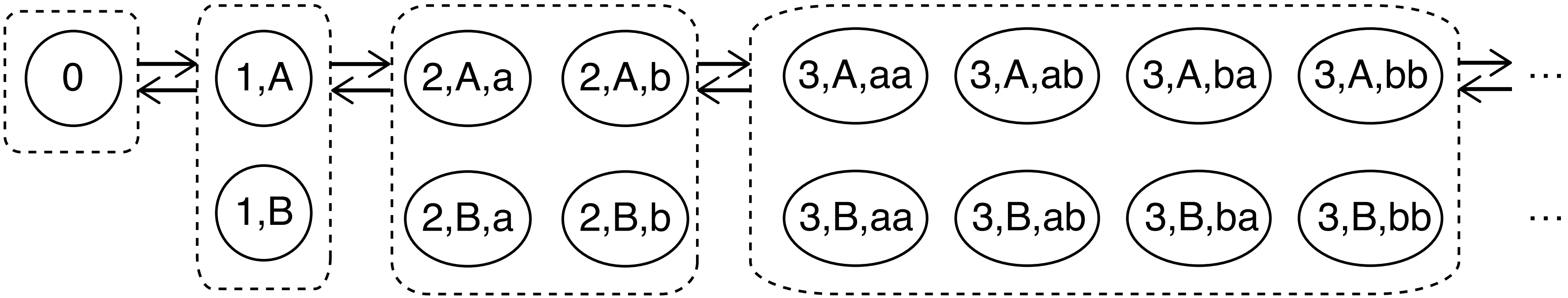
(レベル依存)
準出生死滅過程

系内客数 L

本発表では，M/G/1+PH の定常系内客数 L を考察

(例 3) M/PH/1+PH の系内客数過程
(客数，サービスの相，待ち時間制約の相)

(レベル依存)
準出生死滅過程



- 系内客数が増えるに従い，背後状態数が指数関数的に増大

➡ 定常分布を直接計算することは極めて困難

発表の概要

- M/G/1+PH における系内客数分布の数値計算法を考察
  - M/G/1+PH の仮待ち時間に対する結果 [井上，滝根 (2015)]
  - 仮待ち時間分布による系内客数分布の表現
  - ➡ 系内客数分布の計算を，無限次元の行列計算に帰着
- 計算機上で実行可能な切断近似法を考察
  - 特に，切断誤差の上界を導出
- 最後に，いくつかの数値例を示す

M/G/1+PH の仮待ち時間

仮待ち時間分布

- 定常仮待ち時間 V：系内に滞在中であり，かつ最終的にサービスを受ける客の残余サービス時間の総和
  - 将来的に途中退去する客の仕事は含まない
- V の分布は次の二つの量で表現される
  - π_0：系が空である確率，　$v(x)$ ($x > 0$): V の密度関数

    正規化条件より，$\pi_0 + \int_{0+}^{\infty} v(x)\,dx = 1$
- 一般の待ち時間制約分布 (M/G/1+G) の下で成り立つ結果 [Baccelli et al. (1984), Kovalenko (1961)]
  - $v(x)$ はヴォルテラ積分方程式の解として与えられる

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

$h_e(x)$: サービスの平衡分布の密度

- 確率フローの平衡より，次式が導かれる ($\rho \triangleq \lambda \mathrm{E}[H]$)

$$v(x) = \rho \pi_0 h_e(x) + \rho \int_{0+}^{x} v(y) \overline{G}(y) h_e(x-y) dy, \qquad x > 0$$

➡ この積分方程式から，$v(x)$ ($x > 0$) は一意に定められる

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)$$

$$u(1;x) = \rho h_e(x), \quad u(n;x) = \rho \int_{0+}^{x} u(n-1;y) \overline{G}(y) h_e(x-y) dy, \ \ n = 2, 3, \ldots$$

- 空である確率 π_0 は，正規化条件より次式で与えられる

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0+}^{\infty} u(n;x) dx \right]^{-1}$$

M/G/1+PH に特別化した場合 [井上，滝根 (2015)]

- 待ち時間制約の補分布関数 $\overline{G}(x)$ $(x \geq 0)$ を変形

$$\overline{G}(x) = \boldsymbol{\alpha} \exp[\boldsymbol{T} x] \boldsymbol{e} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!} \cdot \overline{g}^{[m]}$$

θ: $\boldsymbol{T}$ の対角要素の最大の絶対値, $\quad \overline{g}^{[m]} \triangleq \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{T})^m \boldsymbol{e}$

- $b_j(k,m)$ および $h_{\mathrm{e}}^{[m]}(j\theta)$ を次式で定義する

$$b_j(k,m) = \binom{k}{m} \left[\frac{j}{j+1}\right]^m \left[\frac{1}{j+1}\right]^{k-m}$$

二項分布 $\left(k, \dfrac{j}{j+1}\right)$ の確率関数

$$h_{\mathrm{e}}^{[m]}(j\theta) = \int_0^{\infty} \frac{\exp[-j\theta x](j\theta x)^m}{m!} \cdot h_{\mathrm{e}}(x)\,dx$$

サービス分布から計算可能な確率関数

離散化された仮待ち時間

$$v^{[k]}(j\theta) = \int_{0+}^{\infty} \frac{\exp[-j\theta x](j\theta x)^k}{k!} \cdot v(x)dx$$

以降では，無限次元ベクトル $(x^{[0]}, x^{[1]}, \ldots)$ を $\boldsymbol{x}^\star$ と表記する

- $\boldsymbol{v}^\star(j\theta)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ は次式を満たす

$$\boldsymbol{v}^\star(j\theta) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta)$$

$$\boldsymbol{u}^\star(1; j\theta) = \rho \boldsymbol{h}_{\mathrm{e}}^\star(j\theta), \quad \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta) = \boldsymbol{u}^\star(n-1; (j+1)\theta) \cdot \rho \overline{\boldsymbol{B}}_j \boldsymbol{H}_{\mathrm{e},j}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

ただし，

$$\overline{\boldsymbol{B}}_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_j(1,0)\overline{g}^{[1]} & b_j(1,1) & 0 & \cdots \\ b_j(2,0)\overline{g}^{[2]} & b_j(2,1)\overline{g}^{[1]} & b_j(2,2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{H}_{\mathrm{e},j} = \begin{pmatrix} h_{\mathrm{e}}^{[0]}(j\theta) & h_{\mathrm{e}}^{[1]}(j\theta) & h_{\mathrm{e}}^{[2]}(j\theta) & \cdots \\ 0 & h_{\mathrm{e}}^{[0]}(j\theta) & h_{\mathrm{e}}^{[1]}(j\theta) & \cdots \\ 0 & 0 & h_{\mathrm{e}}^{[0]}(j\theta) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

離散化された仮待ち時間

$$v^{[k]}(j\theta) = \int_{0+}^{\infty} \frac{\exp[-j\theta x](j\theta x)^k}{k!} \cdot v(x)dx$$

以降では，無限次元ベクトル $(x^{[0]}, x^{[1]}, \ldots)$ を $\boldsymbol{x}^\star$ と表記する

- $\boldsymbol{v}^\star(j\theta)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ は次式を満たす

$$\boldsymbol{v}^\star(j\theta) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta)$$

$$\boldsymbol{u}^\star(1; j\theta) = \rho \boldsymbol{h}_{\mathrm{e}}^\star(j\theta), \quad \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta) = \boldsymbol{u}^\star(n-1; (j+1)\theta) \cdot \rho \overline{\boldsymbol{B}}_j \boldsymbol{H}_{\mathrm{e},j}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$\boxed{\begin{aligned} & v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} u(n; x) \\ & u(1; x) = \rho h_{\mathrm{e}}(x), \ u(n; x) = \int_{0+}^{x} u(n-1; y) \rho \overline{G}(y) h_{\mathrm{e}}(x-y) dy, \ n = 2, 3, \ldots \end{aligned}}$$

離散化された仮待ち時間

$$v^{[k]}(j\theta) = \int_{0+}^{\infty} \frac{\exp[-j\theta x](j\theta x)^k}{k!} \cdot v(x)dx$$

以降では，無限次元ベクトル $(x^{[0]}, x^{[1]}, \ldots)$ を $\boldsymbol{x}^\star$ と表記する

- $\boldsymbol{v}^\star(j\theta)$ $(j = 1, 2, \ldots)$ は次式を満たす

$$\boldsymbol{v}^\star(j\theta) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta)$$

$$\boldsymbol{u}^\star(1; j\theta) = \rho \boldsymbol{h}_{\mathrm{e}}^\star(j\theta), \quad \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta) = \boldsymbol{u}^\star(n-1; (j+1)\theta) \cdot \rho \overline{\boldsymbol{B}}_j \boldsymbol{H}_{\mathrm{e},j}, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

➡ π_0 は次式で与えられる

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{u}^\star(n; j\theta)\boldsymbol{e} \right]^{-1}$$

[井上，滝根 (2015)] では，π_0 に対する誤差上界付きの計算法を考案

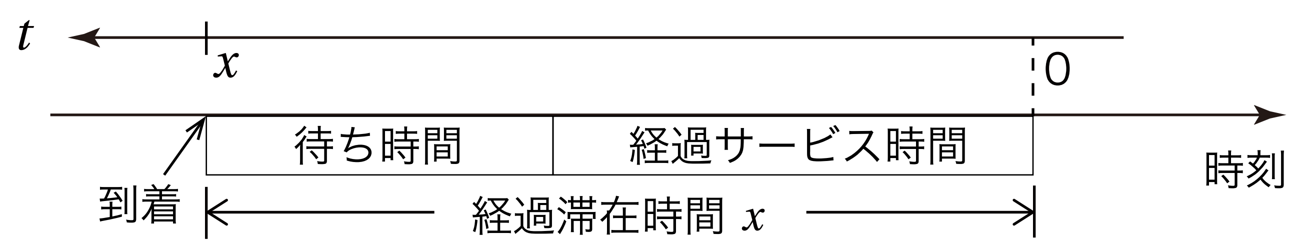
M/G/1+PH の系内容数分布

待ち客数 $\hat{L}$

サーバが稼働中 ($L > 0$) である期間に注目

- A: Attained waiting time
  - サービス中の客の経過滞在時間
  - A の密度関数は仮待ち時間密度 $v(x)$ と一致
    [Sakasegawa and Wolff (1990)]
- $\hat{L}$: 系内で待っている客の数
  - A の間に到着して，まだ途中退去していない客数に等しい
  - $\hat{\pi}_\ell \triangleq \Pr(\hat{L} = \ell,$ 客がサービス中)

現時点で残っている待ち客だけに注目すると,
到着率 $\lambda\overline{G}(t)$ の非斉時ポアソン到着と等価



待ち客数 $\hat{L}$

$\hat{L}$: 系内で待っている客の数，$\hat{\pi}_\ell \triangleq \Pr(\hat{L} = \ell,$ 客がサービス中$)$
$v(x)$: 仮待ち時間の密度関数

- 以上の観察から，次式が得られる

$$\boxed{\hat{\pi}_\ell = \int_{0+}^{\infty} p_\ell(x) v(x) dx}$$

ただし，

$$p_\ell(x) = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \binom{m}{\ell} \{G_\mathrm{e}(x)\}^\ell \{\overline{G}_\mathrm{e}(x)\}^{m-\ell}$$

$G_\mathrm{e}(x)$, $\overline{G}_\mathrm{e}(x)$: 待ち時間制約の平衡分布の分布関数，補分布関数

$$\left(\text{参考: } \sum_{\ell=0}^{\infty} z^\ell p_\ell(x) = \exp\left[\lambda(z-1)\int_0^x \overline{G}(t) dt\right] \right)$$

待ち客数 $\hat{L}$

$\hat{L}$: 系内で待っている客の数， $\hat{\pi}_\ell \triangleq \Pr(\hat{L} = \ell$, 客がサービス中)

$v(x)$: 仮待ち時間の密度関数

- 以上の観察から，次式が得られる

$$\boxed{\hat{\pi}_\ell = \int_{0+}^{\infty} p_\ell(x) v(x) dx}$$

ただし，

$$p_\ell(x) = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot K_{m,\ell}(x)$$

$$K_{m,\ell}(x) \triangleq \binom{m}{\ell} \{\mathrm{G_e}(x)\}^\ell \{\overline{\mathrm{G}}_\mathrm{e}(x)\}^{m-\ell}, \qquad \ell = 0, 1, \ldots, m, \ \ m = 0, 1, \ldots$$

待ち客数 $\hat{L}$

$$\hat{\pi}_\ell = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \int_{0+}^{\infty} K_{m,\ell}(x)\,v(x)\,dx$$

- 前述の通り，仮待ち時間密度 $v(x)$ は次式で与えられる

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)$$

$$u(1;x) = \rho h_{\mathrm{e}}(x), \quad u(n;x) = \rho \int_{0+}^{x} u(n-1;y)\overline{G}(y)h_{\mathrm{e}}(x-y)\,dy, \ \ n = 2,3,\ldots$$

➡ $$\hat{\pi}_\ell = \pi_0 \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0+}^{\infty} K_{m,\ell}(x)\,u(n;x)\,dx$$

待ち客数 $\hat{L}$

$$\hat{\pi}_\ell = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \int_{0+}^{\infty} K_{m,\ell}(x) v(x) dx$$

- 前述の通り，仮待ち時間密度 $v(x)$ は次式で与えられる

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)$$

$$u(1;x) = \rho h_{\mathrm{e}}(x), \quad u(n;x) = \rho \int_{0+}^{x} u(n-1;y)\overline{G}(y) h_{\mathrm{e}}(x-y) dy, \ n = 2, 3, \ldots$$

➡ $$\hat{\pi}_\ell = \pi_0 \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{r}_{m,\ell}(n)$$

$$\hat{r}_{m,\ell}(n) \triangleq \int_{0+}^{\infty} K_{m,\ell}(x) u(n;x) dx$$

系内客数 L

$$\hat{\pi}_\ell = \pi_0 \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{r}_{m,\ell}(n)$$

- 系内客数分布 π_ℓ (系内客数 ＝ 待ち客数＋１)

$$\begin{aligned}\pi_\ell &= \hat{\pi}_{\ell-1} \\ &= \pi_0 \cdot \underline{\sum_{m=\ell-1}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{r}_{m,\ell-1}(n)} \\ &\qquad \triangleq r_\ell\end{aligned}$$

正規化条件より，π_ℓ $(\ell = 0, 1, \ldots)$ は次式で定められる

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} r_\ell\right]^{-1}, \qquad \pi_\ell = \pi_0 r_\ell, \quad \ell = 1, 2, \ldots$$

系内客数 L

$$u(1;x) = \rho h_{\mathrm{e}}(x), \quad u(n;x) = \rho \int_{0+}^{x} u(n-1;y)\overline{G}(y) h_{\mathrm{e}}(x-y)\,dy, \ \ n = 2,3,\ldots$$

- 以上をまとめると,

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} r_\ell\right]^{-1}, \qquad \pi_\ell = \pi_0 r_\ell, \quad \ell = 1,2,\ldots$$

ただし,

$$r_\ell = \sum_{m=\ell-1}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{r}_{m,\ell-1}(n)$$

$$\hat{r}_{m,\ell}(n) = \int_{0+}^{\infty} K_{m,\ell}(x) u(n;x)\,dx \qquad \left(K_{m,\ell}(x) = \binom{m}{\ell} \{G_{\mathrm{e}}(x)\}^{\ell} \{\overline{G}_{\mathrm{e}}(x)\}^{m-\ell}\right)$$

M/G/1+PH に特別化した場合

- 待ち時間制約の補分布 $\overline{G}(x)$

$$\overline{G}(x) = \boldsymbol{\alpha} \exp[\boldsymbol{T} x] \boldsymbol{e} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!} \cdot \overline{g}^{[m]}$$

- $G_\mathrm{e}(x)$ と $\overline{G}_\mathrm{e}(x)$ も同様に，一様化によって書き換えられる

$$G_\mathrm{e}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!} \cdot g_\mathrm{e}^{[m]}, \qquad \overline{G}_\mathrm{e}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta x](\theta x)^m}{m!} \cdot \overline{g}_\mathrm{e}^{[m]}$$

ただし，

$$g_\mathrm{e}^{[0]} = 0, \qquad g_\mathrm{e}^{[m]} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\overline{g}^{[k]}}{\theta \mathrm{E}[G]}, \quad m = 1, 2, \ldots$$

$$\overline{g}_\mathrm{e}^{[m]} = 1 - g_\mathrm{e}^{[m]}, \qquad m = 0, 1, \ldots$$

$K_{m,\ell}(x)$ の離散化

$$\hat{r}_{m,\ell}(n) = \int_{0+}^{\infty} K_{m,\ell}(x) u(n;x) dx, \qquad K_{m,\ell}(x) = \binom{m}{\ell} \{\mathrm{G_e}(x)\}^{\ell} \{\overline{\mathrm{G}}_{\mathrm{e}}(x)\}^{m-\ell}$$

- $K_{m,\ell}(x)$ は次の形で表される ($\kappa_{m,\ell}^{[i]}$ の求め方は後述)

$$K_{m,\ell}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\exp[-m\theta x](m\theta x)^i}{i!} \cdot \kappa_{m,\ell}^{[i]}$$

- $\boldsymbol{\kappa}_{m,\ell}^{\star}$: $\kappa_{m,\ell}^{[i]}$ を第 i 要素とする縦ベクトル

  ➡ $\hat{r}_{m,\ell}(n) = \boldsymbol{u}^{\star}(n;m\theta)\boldsymbol{\kappa}_{m,\ell}^{\star}$

(前述の通り，$\boldsymbol{u}^{\star}(n;m\theta)$ は漸化式を用いて求められる

$$\boldsymbol{u}^{\star}(1;j\theta) = \rho \boldsymbol{h}_{\mathrm{e}}^{\star}(j\theta), \quad \boldsymbol{u}^{\star}(n;j\theta) = \rho \boldsymbol{u}^{\star}(n-1;(j+1)\theta)\overline{\boldsymbol{B}}_j \boldsymbol{H}_{\mathrm{e},j}, \quad n = 2,3,\ldots$$
)

$K_{m,\ell}(x)$ の離散版 $\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,\ell}$

- $\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{1,0} = \overline{\boldsymbol{g}}^{\star}_{\mathrm{e}}$, $\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{1,1} = \boldsymbol{g}^{\star}_{\mathrm{e}}$ および次の漸化式より $\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,\ell}$ は定められる

$$\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,0} = \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m-1,0}$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,\ell} = \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m-1,\ell} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m-1,\ell-1}, \quad \ell = 1, 2, \ldots, m-1$$

$$\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,m} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m-1,m-1}$$

ただし,

$$\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g},m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots \\ b_m(1,0)\overline{\mathrm{g}}^{[1]}_{\mathrm{e}} & b_m(1,1) & 0 & \cdots \\ b_m(2,0)\overline{\mathrm{g}}^{[2]}_{\mathrm{e}} & b_m(2,1)\overline{\mathrm{g}}^{[1]}_{\mathrm{e}} & b_m(2,2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \boldsymbol{B}_{\mathrm{g},m} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_m(1,0)\mathrm{g}^{[1]}_{\mathrm{e}} & 0 & 0 & \cdots \\ b_m(2,0)\mathrm{g}^{[2]}_{\mathrm{e}} & b_m(2,1)\mathrm{g}^{[1]}_{\mathrm{e}} & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,\ell}$ の計算における注意点

$\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{1,0} = \overline{\boldsymbol{g}}^{\star}_{\mathrm{e}}, \quad \boldsymbol{\kappa}^{\star}_{1,1} = \boldsymbol{g}^{\star}_{\mathrm{e}}$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,0} &= \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m-1,0} \\
\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,\ell} &= \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m-1,\ell} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m-1,\ell-1}, \quad \ell = 1,2,\dots,m-1 \\
\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,m} &= \boldsymbol{B}_{\mathrm{g},m}\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m-1,m-1}
\end{aligned}
$$

- $\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,\ell}$ は無限次元 $(\infty \times 1)$ のベクトル
  - 実際に計算を行なう際，有限サイズで近似することが必要
- しかし，定義より，任意の m について次式が成立

$$\sum_{\ell=0}^{m} \boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,\ell} = \boldsymbol{e} \quad (\ell \text{ について足し上げると，全ての要素が 1 になる})$$

➡ $\boldsymbol{\kappa}^{\star}_{m,\ell}$ を高精度に有限次元近似することは困難

$\boldsymbol{\kappa}_{m,\ell}^{\star}$ に対する切断近似法

- 数値計算で最終的に求めるのは，系内客数分布 π_ℓ
    - $\hat{r}_{m,\ell}(n) = \boldsymbol{u}^{\star}(n; m\theta)\boldsymbol{\kappa}_{m,\ell}^{\star}$ を良い精度で計算できれば十分
- $\boldsymbol{u}^{\star}(n; m\theta)$ は確率ベクトル
    - 要素数を大きく取れば，有限次元ベクトルで近似可能

$$\boldsymbol{u}^{\star}(n; m\theta) \simeq (\text{有限次元ベクトル}, \mathbf{0})$$

➡ $\hat{r}_{m,\ell}(n)$ の計算では，$\boldsymbol{\kappa}_{m,\ell}$ も有限の要素数しか用いずにすむ

- 実際の計算手順では，$\boldsymbol{\kappa}_{m,\ell}$ の切断サイズ k^* を入力に取る
  ($\boldsymbol{u}^{\star}(n; m\theta)$ を陽に求めないため)
    - k^* の大きさが適切かは，次に述べる誤差上界で事後評価

誤差上界

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} r_\ell\right]^{-1}, \qquad \pi_\ell = \pi_0 r_\ell, \quad \ell = 1,2,\ldots$$

- r_ℓ^{comp}: 数値計算で得られる，r_ℓ に対する近似値
  - $r_\ell^{\mathrm{comp}} \le r_\ell$ ($\ell = 1,2,\ldots$) が成立

r_ℓ^{comp} を用いて π_ℓ の近似値 π_ℓ^{comp} を計算すると，次式が成立

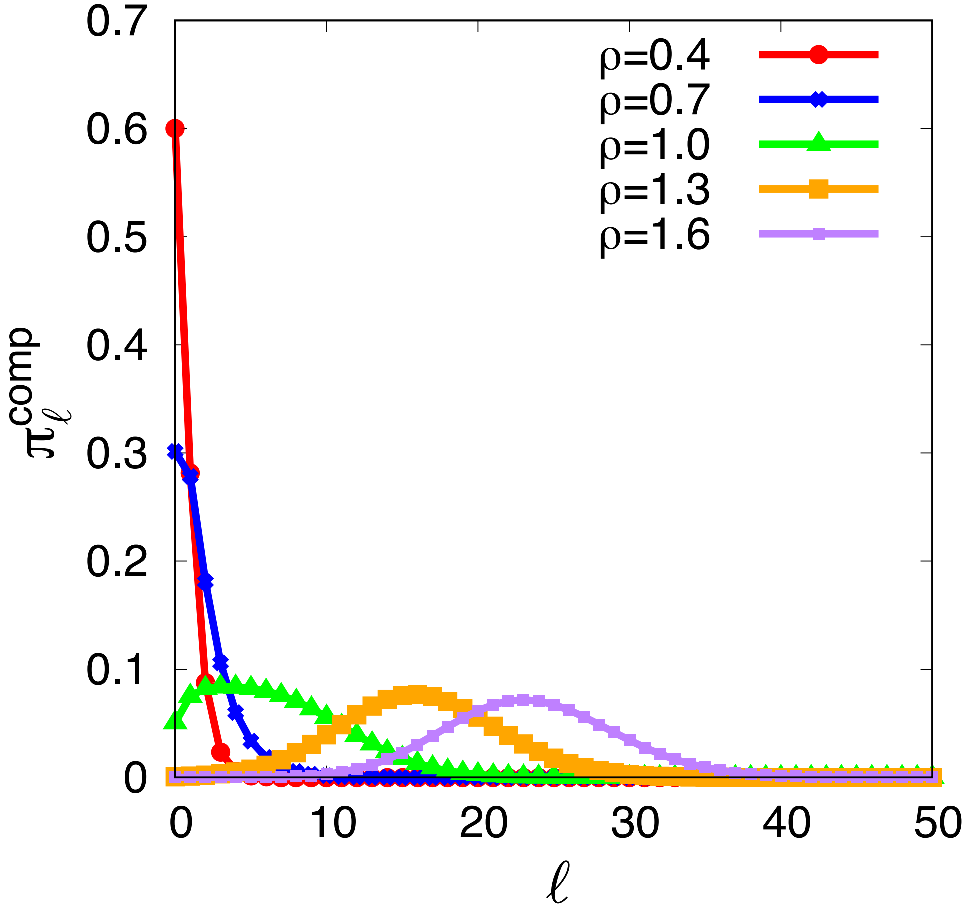
$$\left|\pi_\ell^{\mathrm{comp}} - \pi_\ell\right| \le 1 - \frac{\pi_0}{\pi_0^{\mathrm{comp}}}, \quad \ell = 1,2,\ldots$$

- π_0 に対する，計算可能な下界値 π_0^{low} [井上，滝根 (2015)] を利用
  - ➡ π_ℓ ($\ell = 1,2,\ldots$) に対する，単一の誤差上界が得られる

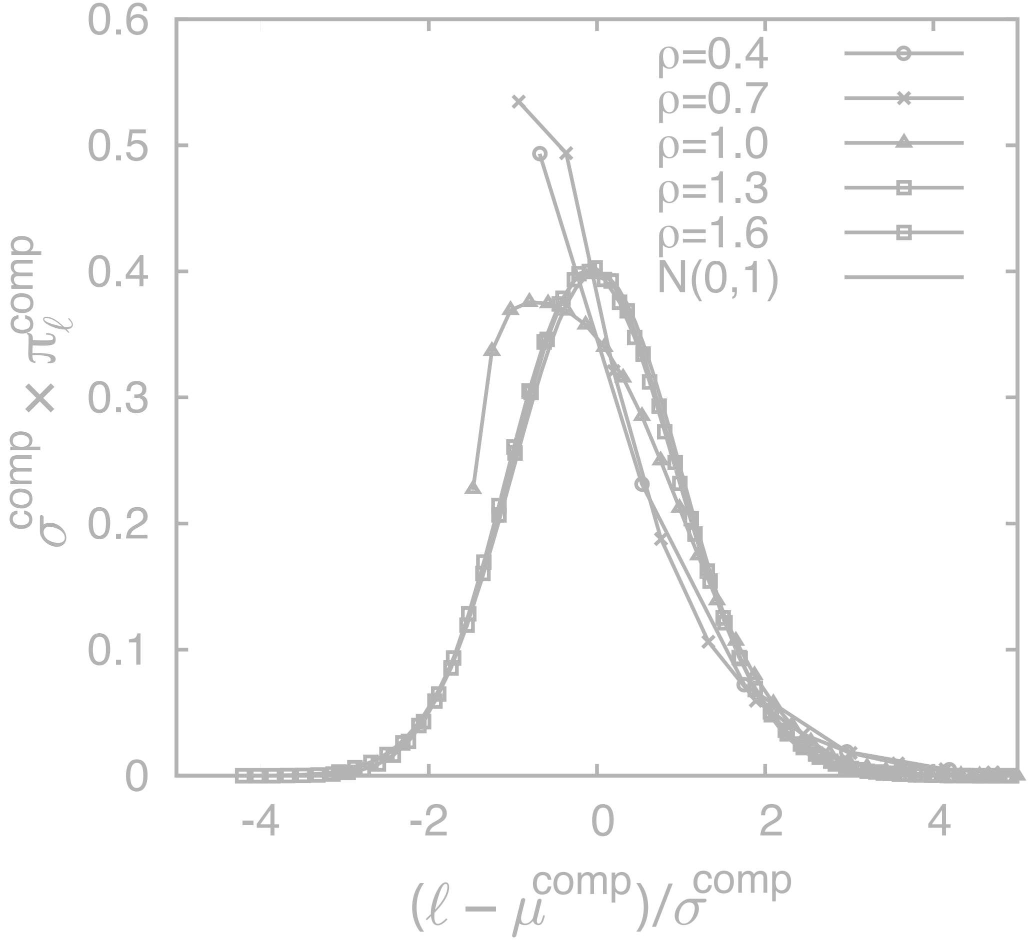
数値例

M/Er$_5$/1+Er$_5$ 待ち行列 ($\mathrm{E}[H] = 1$, $\mathrm{E}[G] = 20$)

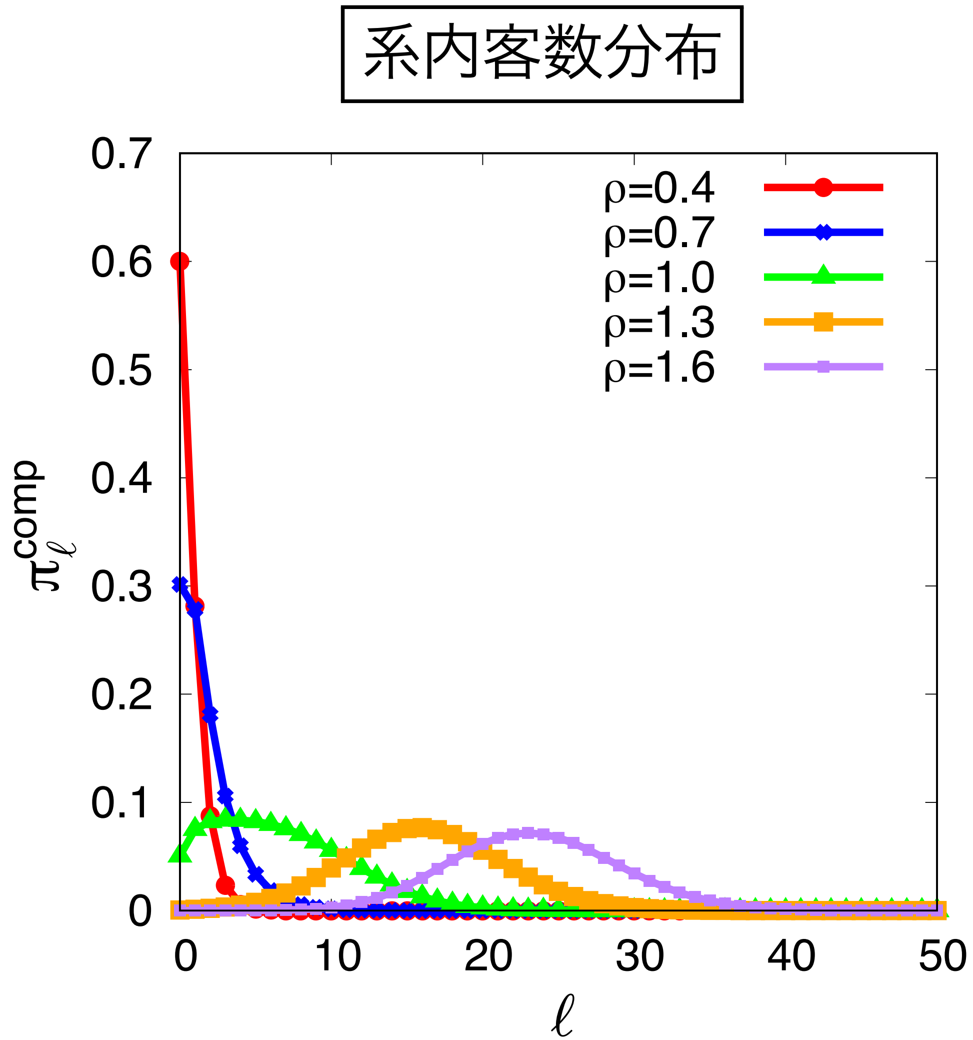
系内客数分布

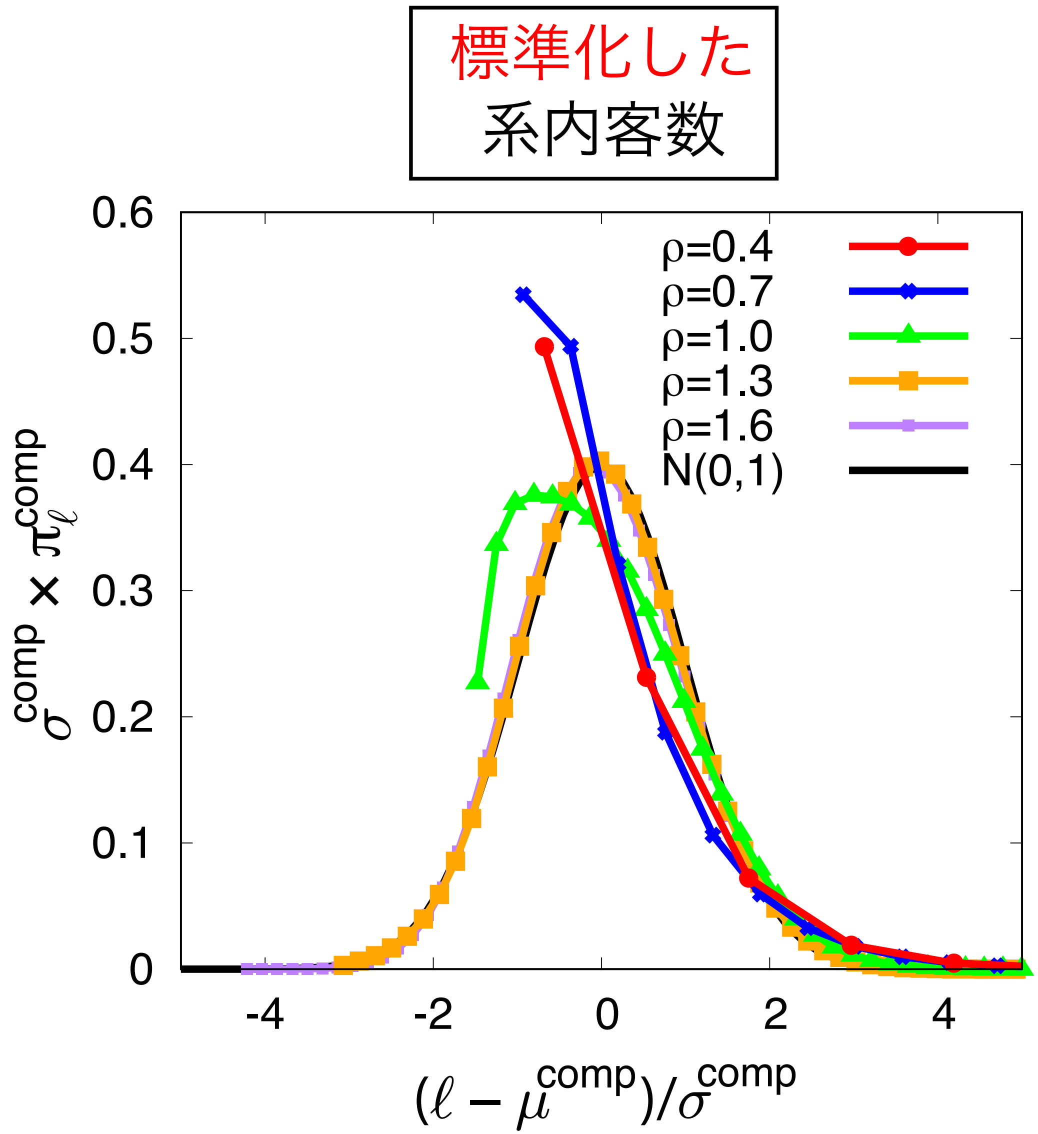


標準化した
系内客数



M/Er$_5$/1+Er$_5$ 待ち行列 ($\mathrm{E}[H] = 1$, $\mathrm{E}[G] = 20$)

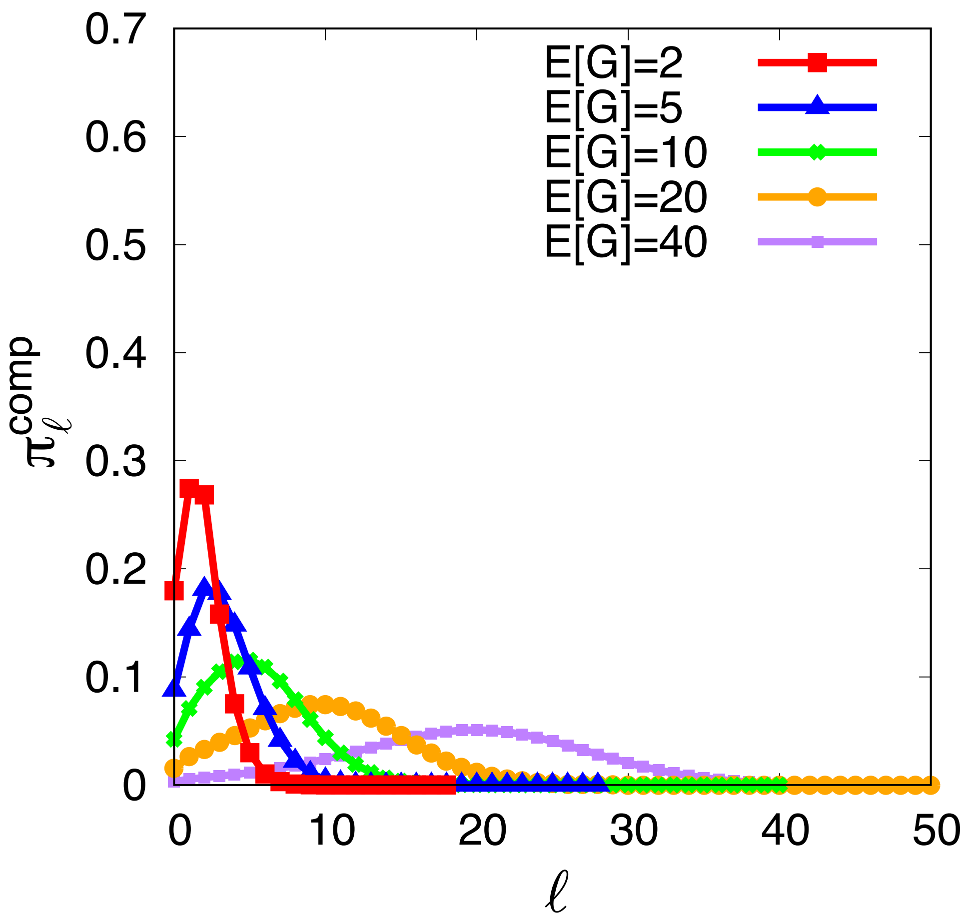




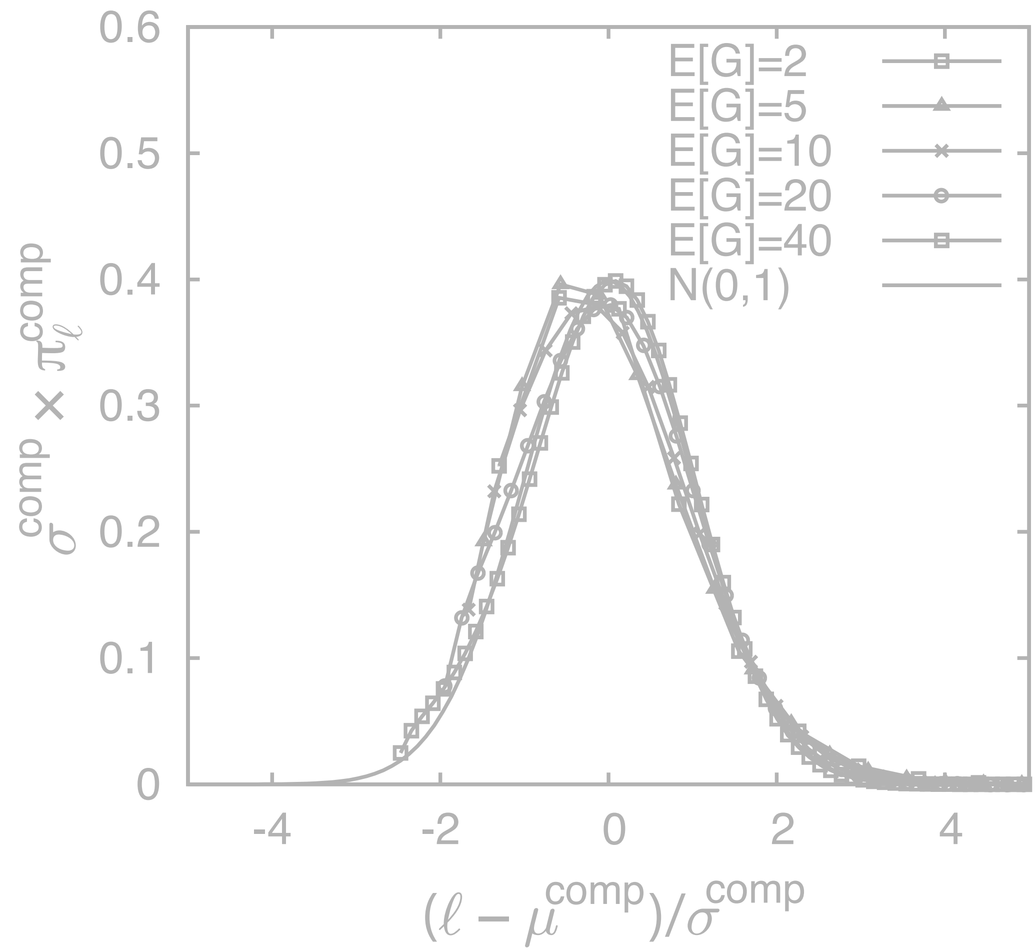
μ^{comp}, σ^{comp}: L の平均と標準偏差

M/Er$_5$/1+Er$_5$ 待ち行列 ($\mathrm{E}[H] = 1$, $\rho = 1.1$)

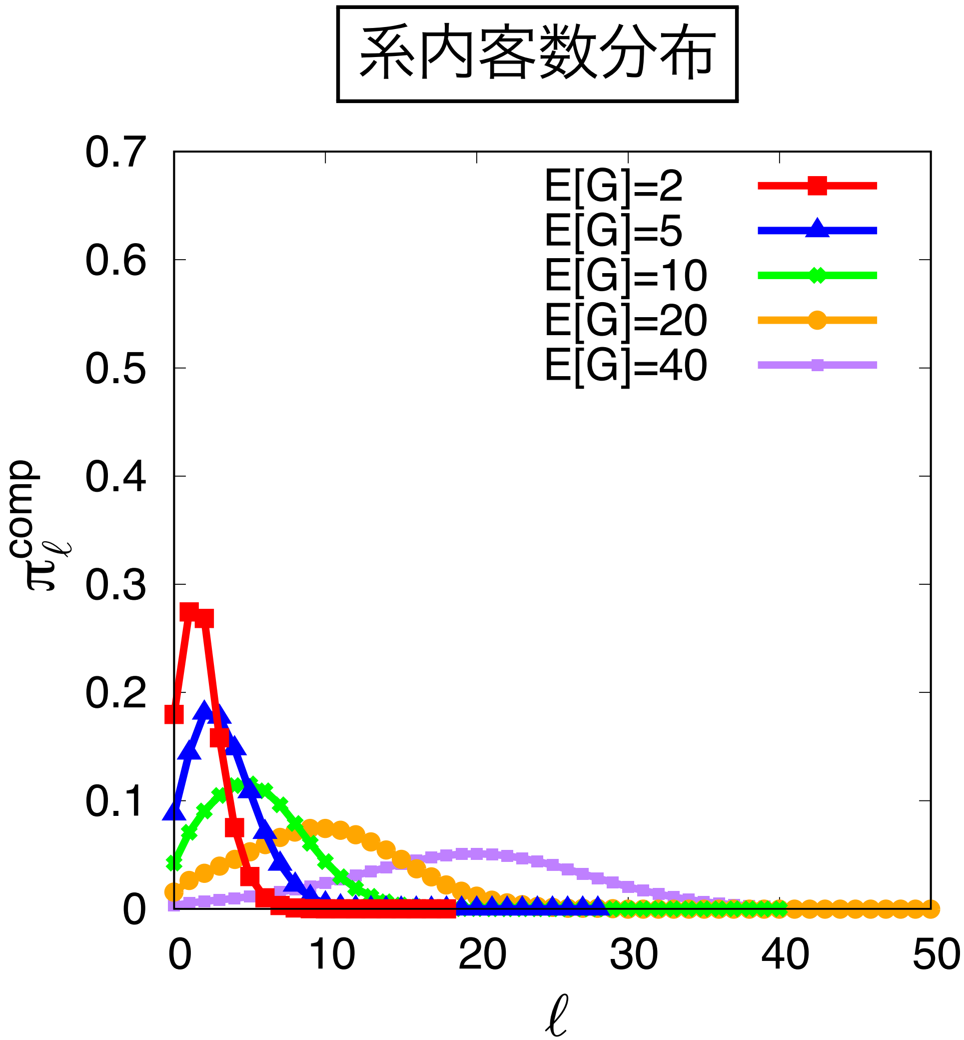
系内客数分布

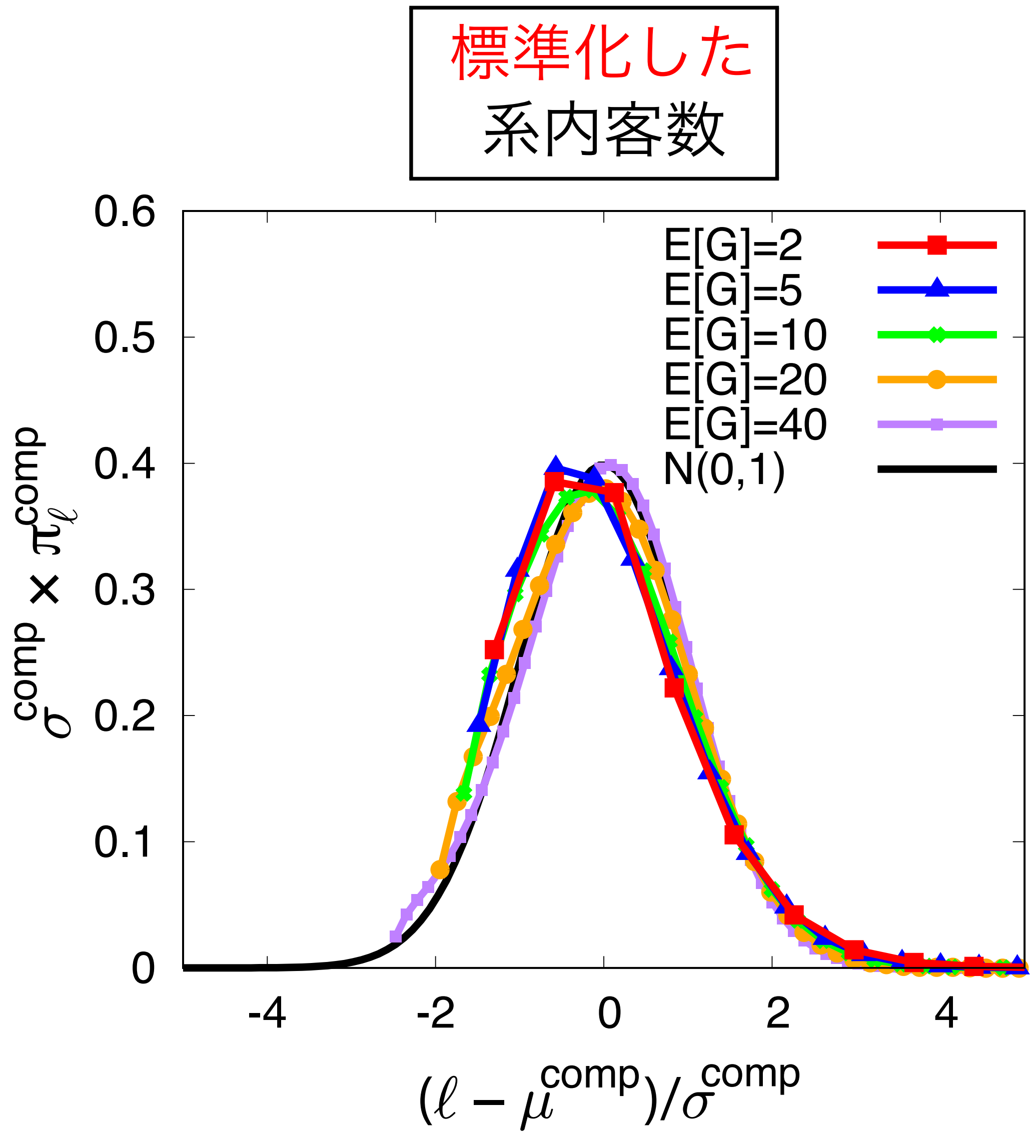


標準化した
系内客数



M/Er$_5$/1+Er$_5$ 待ち行列 ($\mathrm{E}[H] = 1$, $\rho = 1.1$)





μ^{comp}, σ^{comp}: L の平均と標準偏差

まとめ

M/G/1+PH における系内客数分布 π_ℓ の数値計算法を考察

- 系内客数分布を仮待ち時間分布を用いて表現
- 仮待ち時間に対する結果 [井上，滝根 (2015)] を利用し，
  π_ℓ に対する数値計算アルゴリズムを構築
- 数値計算時に生じる切断誤差に対し，計算可能な上界を導出

さらに，

- 数値例を通じて，$\rho > 1$ における π_ℓ を観察
  - ◆ 負荷が大きいとき，標準化された π_ℓ は標準正規分布に漸近
  - ➡ これに対する理論的な証明は今後の課題