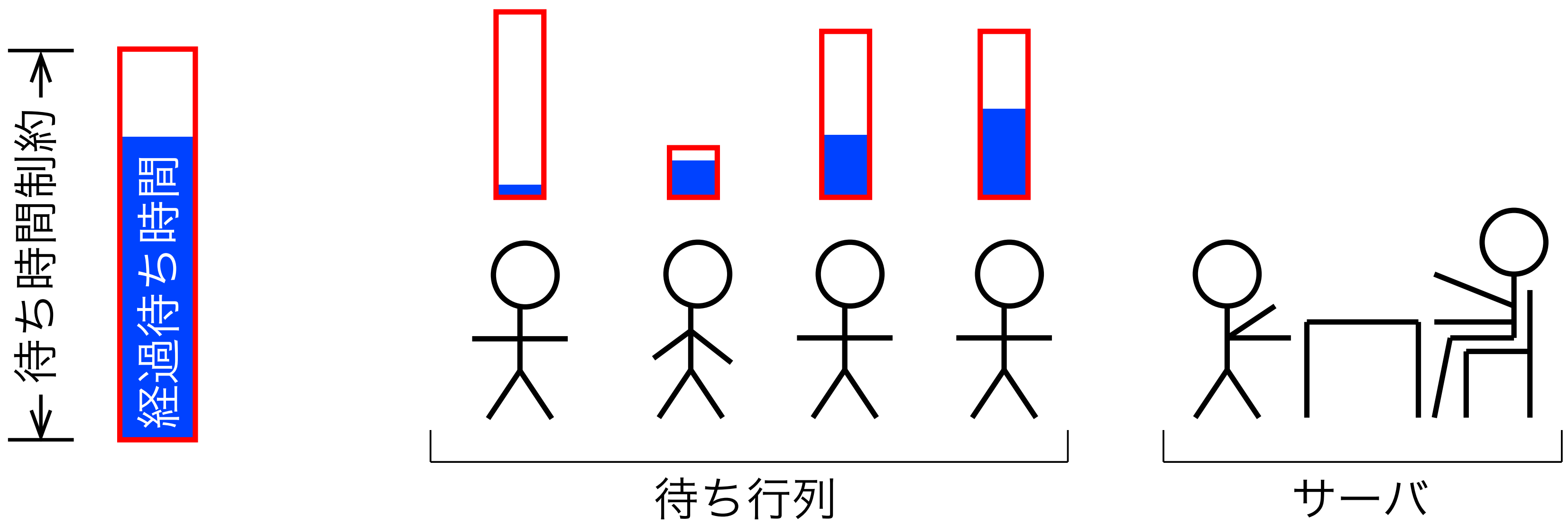
M/G/1+PH 待ち行列における系内客数分布の階乗積率

井上 文彰

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

待ち時間制約のある待ち行列モデル

- 待ち時間が長すぎると，客はサービスを受けずに離脱する



- (例) 遅延制約のあるデータ通信，コールセンタ
- ケンドールの記法

A	/	B	/	c	+	W
到着間隔		サービス時間		サーバ数		待ち時間制約

考察するモデル (M/G/1+PH)

- 客の到着は率 λ のポアソン過程に従う
- サービス時間は分布関数 $H(x)$ (平均 $\mathrm{E}[H]$) に従って i.i.d.
  - 簡単のため $H(0) = 0$ を仮定
- 待ち時間制約は相型分布 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T})$ に従って i.i.d.
  - 補分布関数 $\overline{G}(x) = \boldsymbol{\alpha} \exp[\boldsymbol{T} x] \boldsymbol{e}$

    $\boldsymbol{\alpha}$: 確率ベクトル, $\boldsymbol{T}$: 劣無限小生成作用素
    $\boldsymbol{e}$: 要素が全て 1 の列ベクトル
- $\mathrm{E}[G]$: 平均待ち時間制約長

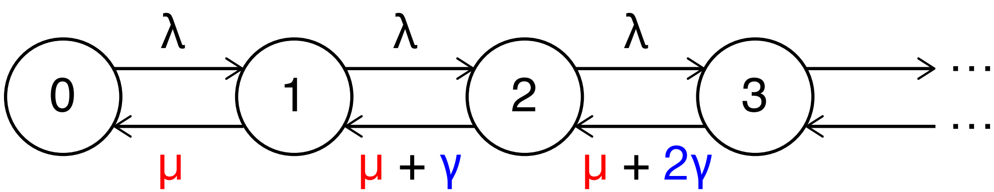
  $\mathrm{E}[G] = \boldsymbol{\alpha}(-\boldsymbol{T})^{-1}\boldsymbol{e} < \infty$ ➡ 系は常に安定 [Baccelli et al. (1984)]

系内客数 L

本発表では，M/G/1+PH の定常系内客数 L を考察

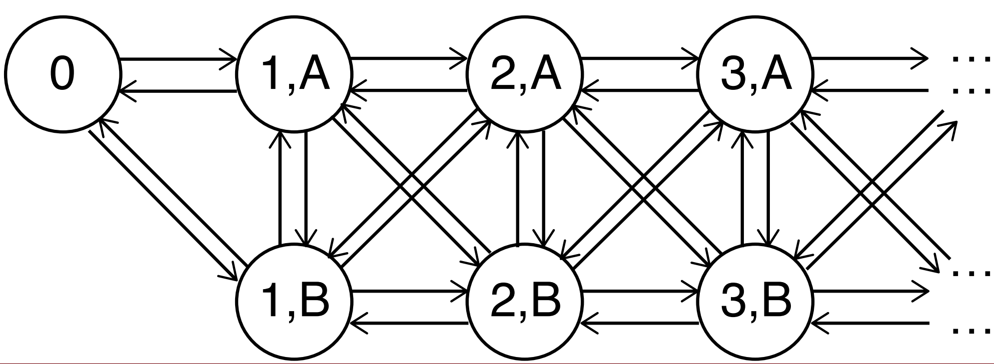
- L : 系内に滞在中である客の総数
  - 将来的に途中退去する客を含める

(例 1) M/M/1+M の系内客数過程



(レベル依存)
出生死滅過程

(例 2) M/PH/1+M の系内客数過程 (客数, サービスの相)



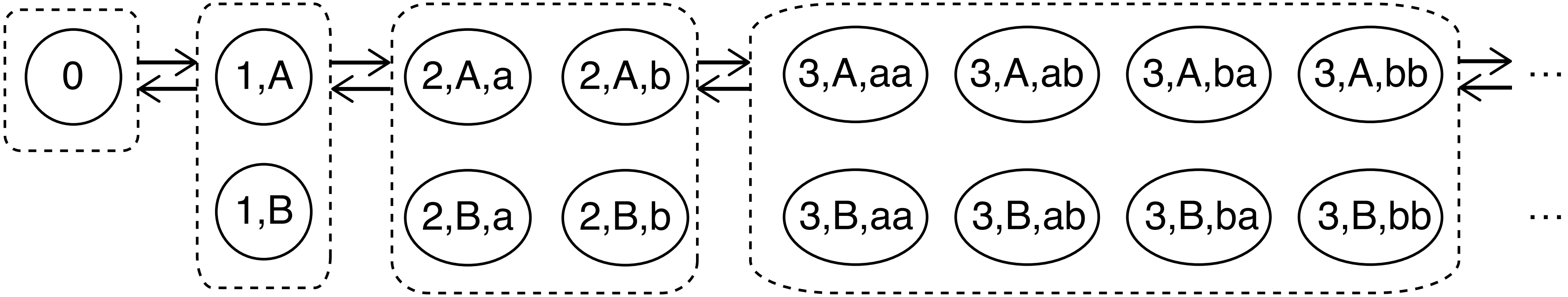
(レベル依存)
準出生死滅過程

系内客数 L

本発表では，M/G/1+PH の定常系内客数 L を考察

(例 3) M/PH/1+PH の系内客数過程
(客数，サービスの相，待ち時間制約の相)

(レベル依存)
準出生死滅過程



- 系内客数が増えるに従い，背後状態数が指数関数的に増大

➡ 定常分布を直接計算することは極めて困難

発表の概要

- M/G/1+PH における系内客数分布 π_ℓ の数値計算法 [井上 (2017)]
  - M/G/1+PH の仮待ち時間に対する結果 [井上，滝根 (2015)]
  - 仮待ち時間分布による系内客数分布の表現

➡ 系内客数分布 π_ℓ の計算を，無限次元の行列計算に帰着

本発表では，系内客数分布の階乗積率 $M_{(k)}$ $(k = 1,2,\ldots)$ を考察

$$M_{(k)} = \sum_{\ell=k}^{\infty} \pi_\ell \cdot \ell(\ell-1)(\ell-2)\cdot\cdots\cdot(\ell-k+1)$$

- <u>$M_{(k)}$ は π_ℓ $(\ell = 1,2,\ldots)$ よりも単純な表現式を満たすことを示す</u>

系内容数分布に関する既存の結果

仮待ち時間分布

- 定常仮待ち時間 V：系内に滞在中であり，かつ最終的にサービスを受ける客の残余サービス時間の総和
  - 将来的に途中退去する客の仕事は含まない
- V の分布は次の二つの量で表現される
  - π_0：系が空である確率，　$v(x)$ ($x > 0$): V の密度関数

  正規化条件より，$\pi_0 + \int_{0+}^{\infty} v(x)dx = 1$

- 一般の待ち時間制約分布 (M/G/1+G) の下で成り立つ結果 [Baccelli et al. (1984), Kovalenko (1961)]
  - $v(x)$ はヴォルテラ積分方程式の解として与えられる

M/G/1+G の仮待ち時間分布 [Baccelli et al. (1984)]

$h_{\mathrm{e}}(x)$: サービスの平衡分布の密度

- 確率フローの平衡より，次式が導かれる ($\rho \triangleq \lambda \mathrm{E}[H]$)

$$v(x) = \rho\pi_0 h_{\mathrm{e}}(x) + \rho \int_{0+}^{x} v(y)\overline{G}(y)h_{\mathrm{e}}(x-y)dy, \qquad x > 0$$

➡ この積分方程式から，$v(x)$ ($x > 0$) は一意に定められる

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)$$

$$u(1;x) = \rho h_{\mathrm{e}}(x), \quad u(n;x) = \rho \int_{0+}^{x} u(n-1;y)\overline{G}(y)h_{\mathrm{e}}(x-y)dy, \;\; n = 2,3,\ldots$$

- 空である確率 π_0 は，正規化条件より次式で与えられる

$$\pi_0 = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{0+}^{\infty} u(n;x)dx\right]^{-1}$$

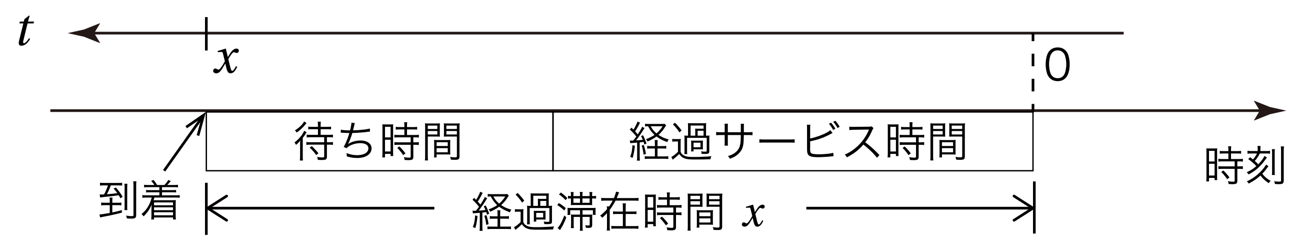
待ち客数 $\hat{L}$

サーバが稼働中 ($L > 0$) である期間に注目

- A: Attained waiting time
  - サービス中の客の経過滞在時間
  - A の密度関数は仮待ち時間密度 $v(x)$ と一致

    [Sakasegawa and Wolff (1990)]
- $\hat{L}$: 系内で待っている客の数
  - A の間に到着して，まだ途中退去していない客数に等しい
  - $\hat{\pi}_\ell \triangleq \Pr(\hat{L} = \ell,$ 客がサービス中$)$

現時点で残っている待ち客だけに注目すると，
到着率 $\lambda \overline{G}(t)$ の非斉時ポアソン到着と等価



待ち客数 $\hat{L}$

$\hat{L}$: 系内で待っている客の数，$\hat{\pi}_\ell \triangleq \Pr(\hat{L} = \ell$, 客がサービス中)

$v(x)$: 仮待ち時間の密度関数

- 以上の観察から，次式が得られる

$$\boxed{\hat{\pi}_\ell = \int_{0+}^{\infty} p_\ell(x) v(x) dx}$$

ただし，

$$p_\ell(x) = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]] (\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \binom{m}{\ell} \{G_\mathrm{e}(x)\}^\ell \{\overline{G}_\mathrm{e}(x)\}^{m-\ell}$$

$G_\mathrm{e}(x)$, $\overline{G}_\mathrm{e}(x)$: 待ち時間制約の平衡分布の分布関数，補分布関数

待ち客数 $\hat{L}$

$$\hat{\pi}_\ell = \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \int_{0+}^{\infty} \binom{m}{\ell} \{G_\mathrm{e}(x)\}^\ell \{\overline{G}_\mathrm{e}(x)\}^{m-\ell} v(x) dx$$

- 前述の通り，仮待ち時間密度 $v(x)$ は次式で与えられる

$$v(x) = \pi_0 \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)$$

$$u(1;x) = \rho h_\mathrm{e}(x), \quad u(n;x) = \rho \int_{0+}^{x} u(n-1;y)\overline{G}(y) h_\mathrm{e}(x-y) dy, \ \ n = 2,3,\ldots$$

➡ $$\hat{\pi}_\ell = \pi_0 \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \hat{r}_{m,\ell}$$

$$\hat{r}_{m,\ell} \triangleq \int_{0+}^{\infty} \binom{m}{\ell} \{G_\mathrm{e}(x)\}^\ell \{\overline{G}_\mathrm{e}(x)\}^{m-\ell} \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x) dx$$

系内客数 L

$$\hat{\pi}_\ell = \pi_0 \sum_{m=\ell}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \hat{r}_{m,\ell}$$

- 系内客数分布 π_ℓ (系内客数 ＝ 待ち客数＋１)

$$\begin{aligned}\pi_\ell &= \hat{\pi}_{\ell-1} \\ &= \pi_0 \sum_{m=\ell-1}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \hat{r}_{m,\ell-1}\end{aligned}$$

- M/G/1+PH において，次の結果が得られている
  - π_0 の数値計算法 [井上，滝根 (2015)]
  - $\hat{r}_{m,\ell}$ $(m = 1, 2, \ldots,\ \ell = 0, 1, \ldots, m)$ の数値計算法 [井上 (2017)]
    - ➡ $\hat{r}_{\ell-1,\ell-1}$, $\hat{r}_{\ell,\ell-1}$, $\hat{r}_{\ell+1,\ell-1}$ … を用いて π_ℓ の計算が可能

系内客数分布の階乗積率

系内客数分布の母関数と階乗積率

母関数 $X^*(z)$ の k 階導関数を $X^{(k)}(z)$ と表すことにする

- 系内客数分布の母関数 $L^*(z)$ は次式を満たす

$$L^*(z) = \pi_0 + \pi_0 z \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell-1} \sum_{m=\ell-1}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \hat{r}_{m,\ell-1}$$

$$= \pi_0 + \pi_0 z \cdot R^*(z)$$

➡ 系内客数分布の階乗積率 $M_{(k)}$ は次式で与えられる

$$M_{(k)} = L^{(k)}(1) = \pi_0 \left\{ k R^{(k-1)}(1) + R^{(k)}(1) \right\}$$

- さらに，$R^{(k)}(1)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ は次式で与えられることが示される

$$R^{(k)}(1) = (\lambda \mathrm{E}[G])^k \cdot \hat{r}_{k,k}$$

証明の概略 (1)

$$\hat{r}_{m,\ell} = \int_{0+}^{\infty} \binom{m}{\ell} \{G_{\mathrm{e}}(x)\}^{\ell} \{\overline{G}_{\mathrm{e}}(x)\}^{m-\ell} \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)dx$$

- 定義より，$R^*(z)$ は次のように書き換えられる

$$R^*(z) = \sum_{\ell=1}^{\infty} z^{\ell-1} \sum_{m=\ell-1}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \hat{r}_{m,\ell-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \sum_{\ell=1}^{m+1} z^{\ell-1} \cdot \hat{r}_{m,\ell-1}$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda \mathrm{E}[G]](\lambda \mathrm{E}[G])^m}{m!} \cdot \int_{0+}^{\infty} \{zG_{\mathrm{e}}(x) + \overline{G}_{\mathrm{e}}(x)\}^m \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)dx$$

証明の概略 (2)

$$\hat{r}_{m,\ell} = \int_{0+}^{\infty} \binom{m}{\ell} \{G_e(x)\}^{\ell} \{\overline{G}_e(x)\}^{m-\ell} \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)dx$$

$$R^*(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda E[G]](\lambda E[G])^m}{m!} \cdot \int_{0+}^{\infty} \{zG_e(x) + \overline{G}_e(x)\}^m \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)dx$$

ここで,

$$\frac{d^k}{dz^k}\{zG_e(x) + \overline{G}_e(x)\}^m = \frac{m!}{(m-k)!} \cdot \{G_e(x)\}^k \cdot \{zG_e(x) + \overline{G}_e(x)\}^{m-k}$$

に注意すると，次式を得る

$$R^{(k)}(1) = \sum_{m=k}^{\infty} \frac{\exp[-\lambda E[G]](\lambda E[G])^{m-k}}{(m-k)!} \cdot (\lambda E[G])^k \int_{0+}^{\infty} \{G_e(x)\}^k \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)dx$$

$$= (\lambda E[G])^k \cdot \hat{r}_{k,k}$$

まとめ

M/G/1+PH における系内客数分布の階乗積率を考察

- 系内客数分布 π_ℓ $(\ell = 1, 2, \ldots)$
  - π_0 および $\hat{r}_{\ell-1,\ell-1}$, $\hat{r}_{\ell,\ell-1}$, $\hat{r}_{\ell+1,\ell-1}$ … を用いて計算が可能

$$\hat{r}_{m,\ell} = \int_{0+}^{\infty} \binom{m}{\ell} \{G_{\mathrm{e}}(x)\}^{\ell} \{\overline{G}_{\mathrm{e}}(x)\}^{m-\ell} \sum_{n=1}^{\infty} u(n;x)\,dx, \qquad \ell = 0, 1, \ldots, m,\ m = 0, 1, \ldots$$

- 系内客数分布の階乗積率 $M_{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$
  - π_0, $\hat{r}_{k-1,k-1}$ および $\hat{r}_{k,k}$ のみを用いて与えられる

$$\boxed{M_{(k)} = \pi_0(\lambda \mathrm{E}[G])^{k-1}\left\{k \cdot \hat{r}_{k-1,k-1} + \lambda \mathrm{E}[G] \cdot \hat{r}_{k,k}\right\}}$$