連続時間非斉時マルコフ連鎖の特別なクラスに対する一様化法

井上 文彰

大阪大学工学研究科
電気電子情報工学専攻

連続時間有限状態マルコフ連鎖

- 有限状態の連続時間マルコフ連鎖を考える
  - $\mathscr{M}$: 状態空間
  $$\mathscr{M} = \{1, 2, \ldots, M\}$$
  - $\boldsymbol{\pi}(t)$: 時刻 t における状態確率ベクトル
  $$\boldsymbol{\pi}(t) = \big(\Pr(X(t) = 1), \Pr(X(t) = 2), \ldots, \Pr(X(t) = M)\big)$$
  - $\boldsymbol{Q}(t)$: 時刻 t における遷移速度行列
- $\boldsymbol{\pi}(t)$ は次の微分方程式より定められる
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\pi}(t)\boldsymbol{Q}(t), \qquad t \geq 0$$

遷移が斉時である場合

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\pi}(t)\boldsymbol{Q}(t)$$

- $\boldsymbol{Q}(t) = \boldsymbol{Q}$ (t によらず一定) である場合

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)\exp[\boldsymbol{Q}t], \qquad t \geq 0$$

➡ $\boldsymbol{\pi}(t)$ は一様化法により数値計算可能

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0)\exp[-\theta t]\exp[(\boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{Q})\theta t]$$

$$= \boldsymbol{\pi}(0)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\exp[-\theta t](\theta t)^n}{n!}\cdot\boldsymbol{P}^n$$

$\boxed{\boldsymbol{I}\text{: 単位行列}}$

$$\boldsymbol{P} \triangleq \boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{Q}, \qquad \theta \geq \max_{i\in\mathcal{M}}[-\boldsymbol{Q}]_{i,i}$$

(確率行列)　　(遷移速度の最大値以上の実数)

遷移が非斉時である場合 (1)

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\pi}(t)}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\pi}(t)\boldsymbol{Q}(t)$$

- $\boldsymbol{Q}(t)$ が t に依存する場合 [van Moorsel and K. Wolter (1998)]

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \sum_{k=0}^{\infty} \int_{u_1=0}^{t} \int_{u_2=u_1}^{t} \cdots \int_{u_k=u_{k-1}}^{t} \boldsymbol{Q}(u_1)\boldsymbol{Q}(u_2)\cdots\boldsymbol{Q}(u_k) \cdot \mathrm{d}u_k \mathrm{d}u_{k-1} \cdots \mathrm{d}u_1, \quad t \geq 0$$

これは次式の形に書き換えられる

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta t](\theta t)^n}{n!} \cdot \boldsymbol{P}_n(t)$$

$\boldsymbol{P}_n(t)$: 次のスライドで定義, (確率行列)

$\theta \geq \sup_{t \geq 0, i \in \mathscr{M}} [-\boldsymbol{Q}(t)]_{i,i}$ (遷移速度の上限値以上の実数)

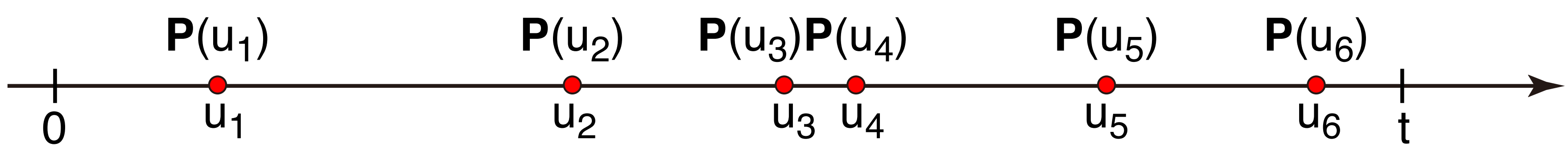
遷移が非斉時である場合 (2)

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta t](\theta t)^n}{n!} \cdot \boldsymbol{P}_n(t)$$

- $\boldsymbol{P}_0(t) = \boldsymbol{I}$ であり，$\boldsymbol{P}_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は次式で定義される

$$\boldsymbol{P}_n(t) = \int_{u_n=0}^{t} \int_{u_{n-1}=0}^{u_n} \cdots \int_{u_1=0}^{u_2} \boldsymbol{P}(u_1)\boldsymbol{P}(u_2)\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{P}(u_n) \cdot \frac{n!}{t^n} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_n$$

ただし，$\underline{\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{Q}(t)}$



遷移が非斉時である場合 (2)

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta t](\theta t)^n}{n!} \cdot \boldsymbol{P}_n(t)$$

- $\boldsymbol{P}_0(t) = \boldsymbol{I}$ であり，$\boldsymbol{P}_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は次式で定義される

$$\boldsymbol{P}_n(t) = \int_{u_n=0}^{t} \int_{u_{n-1}=0}^{u_n} \cdots \int_{u_1=0}^{u_2} \boldsymbol{P}(u_1)\boldsymbol{P}(u_2) \cdot \cdots \cdot \boldsymbol{P}(u_n) \cdot \frac{n!}{t^n} \mathrm{d}u_1 \mathrm{d}u_2 \cdots \mathrm{d}u_n$$

ただし，$\underline{\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{Q}(t)}$

- [van Moorsel and K. Wolter (1998)] では，上式の積分を離散的に近似
  - ◆ 時間区間 $[0, t]$ を K 個の小区間に分割すると，

$$\boldsymbol{P}_n(t) \simeq \sum_{k_n=1}^{K} \sum_{k_{n-1}=1}^{k_n} \cdots \sum_{k_1=1}^{k_2} \boldsymbol{P}_{k_1} \boldsymbol{P}_{k_2} \cdots \boldsymbol{P}_{k_n} \cdot p_K(k_1, k_2, \ldots, k_n)$$

$\boldsymbol{P}_k$: 第 k 小区間での $\boldsymbol{P}(t)$ の代表値，　$p_K(k_1, k_2, \ldots, k_n)$: 重み係数

本発表の概要

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta t](\theta t)^n}{n!} \cdot \boldsymbol{P}_n(t) \qquad \boxed{\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{Q}(t)}$$

$$\boldsymbol{P}_n(t) = \int_{u_n=0}^{t} \int_{u_{n-1}=0}^{u_n} \cdots \int_{u_1=0}^{u_2} \boldsymbol{P}(u_1)\boldsymbol{P}(u_2)\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{P}(u_n)\cdot\frac{n!}{t^n}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n$$

- 遷移速度行列 $\boldsymbol{Q}(t)$ が次の特別な形で表される場合を考える

$$\boldsymbol{Q}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\gamma t](\gamma t)^m}{m!} \cdot \boldsymbol{Q}^{(m)}$$

γ: 正の実数,　　$\boldsymbol{Q}^{(m)}$: 遷移速度行列

$\left(\theta = \sup_{i\in\mathscr{M}, m=0,1,\ldots} [-\boldsymbol{Q}^{(m)}]_{i,i}\right.$ と置ける$\left.\right)$

➡ このとき，時間軸の離散化近似を要さずに
$\boldsymbol{P}_n(t)$ が直接求められることを示す

仮定を満たす $\boldsymbol{Q}(t)$ の例

時刻 t に依存する到着率 $\lambda(t)$ をもつ M/M/1/K 待ち行列の系内客数

- $\lambda(t)$ が次式で与えられる場合を考える

$$\lambda(t) = \Lambda \cdot \boldsymbol{\alpha} \exp[\boldsymbol{S} t](-\boldsymbol{S})\boldsymbol{e}, \qquad t \geq 0$$

Λ: 正の実数, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{S})$: 相型分布のパラメータ

$\boldsymbol{e}$: 要素が全て 1 の列ベクトル

➡ $\lambda(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\gamma t](\gamma t)^m}{m!} \cdot \lambda^{(m)}, \qquad \lambda^{(m)} \triangleq \Lambda \cdot \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{I} + \gamma^{-1}\boldsymbol{S})^m \boldsymbol{e}$

($K = 4$ の例)

$$\boldsymbol{Q}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\gamma t](\gamma t)^m}{m!} \begin{pmatrix} -\lambda^{(m)} & \lambda^{(m)} & 0 & 0 \\ \mu & -\lambda^{(m)} - \mu & \lambda^{(m)} & 0 \\ 0 & \mu & -\mu - \lambda^{(m)} & \lambda^{(m)} \\ 0 & 0 & \mu & -\mu \end{pmatrix}$$

特別な非斉時マルコフ連鎖に対する解析

解析の準備 (1)

$$\boldsymbol{P}_0(t) = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{P}_n(t) = \int_{u_n=0}^{t}\int_{u_{n-1}=0}^{u_n}\cdots\int_{u_1=0}^{u_2}\boldsymbol{P}(u_1)\boldsymbol{P}(u_2)\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{P}(u_n)\cdot\frac{n!}{t^n}\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n$$

- $\boldsymbol{B}_n(t)$ $(t \geq 0)$ を次式で定義する

$$\boldsymbol{B}_n(t) = \frac{t^n}{n!}\cdot\boldsymbol{P}_n(t), \qquad n = 0, 1, \ldots$$

➡ $\boldsymbol{B}_0(t) = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{B}_n(t) = \int_{u_n=0}^{t}\int_{u_{n-1}=0}^{u_n}\cdots\int_{u_1=0}^{u_2}\boldsymbol{P}(u_1)\boldsymbol{P}(u_2)\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{P}(u_n)\cdot\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n$

- 定義より，$\boldsymbol{B}_n(t)$ は次の漸化式で与えられる

$$\boldsymbol{B}_0(t) = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{B}_n(t) = \int_0^t \boldsymbol{B}_{n-1}(u)\boldsymbol{P}(u)\mathrm{d}u, \ \ n = 1, 2, \ldots$$

解析の準備 (2)

$$\boldsymbol{B}_0(t) = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{B}_n(t) = \int_0^t \boldsymbol{B}_{n-1}(u)\boldsymbol{P}(u)\mathrm{d}u, \; n = 1, 2, \ldots$$

- 遷移速度行列 $\boldsymbol{Q}(t)$ が次式を満たすとする

$$\boldsymbol{Q}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\gamma t](\gamma t)^m}{m!} \cdot \boldsymbol{Q}^{(m)}$$

➡ このとき，$\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{Q}$ より次式を得る

$$\boldsymbol{P}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\gamma t](\gamma t)^m}{m!} \cdot \boldsymbol{P}^{(m)}$$

ただし，$\boldsymbol{P}^{(m)} \triangleq \boldsymbol{I} + \theta^{-1}\boldsymbol{Q}^{(m)}$ (確率行列)

- これを用いると，$\boldsymbol{B}_n(t)$ の積分を書き換えることができる

$\boldsymbol{B}_n(t)$ が満たす表現式

$$\boldsymbol{B}_n(t) = \int_0^t \boldsymbol{B}_{n-1}(u)\boldsymbol{P}(u)\mathrm{d}u, \qquad \boldsymbol{P}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\gamma t](\gamma t)^m}{m!} \cdot \boldsymbol{P}^{(m)}$$

- $\boldsymbol{B}_n^{(m)}$ を次の漸化式で定められる確率行列とする

$$\boldsymbol{B}_1^{(m)} = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{P}^{(k)}, \qquad \boldsymbol{B}_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,n-1}(k) \sum_{k_1=0}^{k} b_{n-1}(k,k_1)\boldsymbol{B}_{n-1}^{(k_1)}\boldsymbol{P}^{(k-k_1)},$$

$$n = 2,3,\ldots$$

ただし,

$$\alpha_{m,n}(k) = \binom{n+k}{n} \Big/ \binom{m+n+1}{n+1}, \qquad b_n(m,k) = \binom{m}{k}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k \left(\frac{1}{n+1}\right)^{m-k}$$

k に関する総和はいずれも 1

- このとき, $\boldsymbol{B}_n(t)$ は次式で与えられる

$$\boldsymbol{B}_n(t) = \frac{t^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-n\gamma t](n\gamma t)^m}{m!} \cdot \boldsymbol{B}_n^{(m)}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

$P_n(t)$ が満たす表現式

- $B_n(t)$ は次式で与えられる

$$B_n(t) = \frac{t^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-n\gamma t](n\gamma t)^m}{m!} \cdot B_n^{(m)}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

- 一方，$B_n(t)$ の定義より，

$$B_n(t) = \frac{t^n}{n!} \cdot P_n(t)$$

➡ $P_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ は次式で与えられる

$$P_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-n\gamma t](n\gamma t)^m}{m!} \cdot B_n^{(m)}$$

$\boldsymbol{\pi}(t)$ が満たす表現式

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta t](\theta t)^n}{n!} \cdot \boldsymbol{P}_n(t)$$

$$\boldsymbol{P}_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-n\gamma t](n\gamma t)^m}{m!} \cdot \boldsymbol{B}_n^{(m)}$$

- 以上の結果より，状態確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}(t)$ は次式で求められる

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta t](\theta t)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-n\gamma t](n\gamma t)^m}{m!} \cdot \boldsymbol{B}_n^{(m)}$$

ただし，

$$\boldsymbol{B}_1^{(m)} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{P}^{(k)},$$

$$\boldsymbol{B}_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,n-1}(k) \sum_{k_1=0}^{k} b_{n-1}(k,k_1) \boldsymbol{B}_{n-1}^{(k_1)} \boldsymbol{P}^{(k-k_1)}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

まとめ

有限状態の連続時間非斉時マルコフ連鎖を考察

- 遷移確率行列 $\boldsymbol{Q}(t)$ が特別な形をとると仮定

$$\boldsymbol{Q}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-\gamma t](\gamma t)^m}{m!} \cdot \boldsymbol{Q}^{(m)}$$

➡ このとき状態確率ベクトル $\boldsymbol{\pi}(t)$ が次式で求まることを示した

$$\boldsymbol{\pi}(t) = \boldsymbol{\pi}(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\exp[-\theta t](\theta t)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp[-n\gamma t](n\gamma t)^m}{m!} \cdot \boldsymbol{B}_n^{(m)}$$

$$\boldsymbol{B}_1^{(m)} = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \boldsymbol{P}^{(k)}, \quad \boldsymbol{B}_n^{(m)} = \sum_{k=0}^{m} \alpha_{m,n-1}(k) \sum_{k_1=0}^{k} b_{n-1}(k,k_1) \boldsymbol{B}_{n-1}^{(k_1)} \boldsymbol{P}^{(k-k_1)}$$

- これを利用した数値計算アルゴリズムの構築は今後の課題