

Age of Information (Aol) と待ち行列モデル

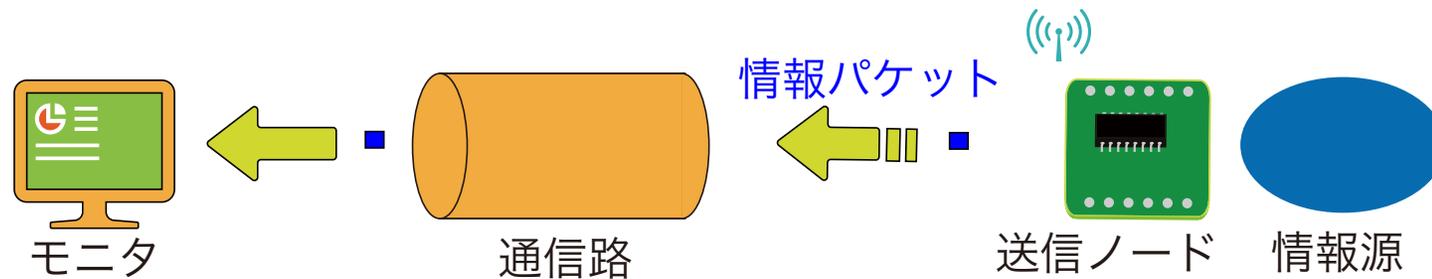
井上 文彰

大阪大学大学院工学研究科

※本講演の内容は、田中利幸 教授 (京都大学), 滝根哲哉 教授 (大阪大学)
増山博之 准教授 (京都大学) との共同研究に基づく

情報更新システム

時間変化する情報源を遠隔地からモニタリング



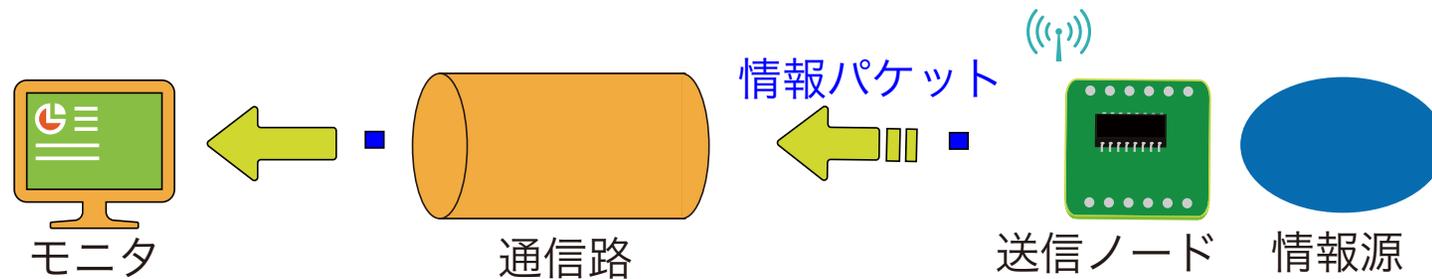
- 送信ノード
 - ◆ 情報源をサンプリングし，得られたサンプルをモニタに送信
- 受信ノード (モニタ)
 - ◆ 送信ノードから受信した最新の情報を画面に表示

モニタに表示されている情報は「過去」のもの

➡ 現在の情報源の状態に関して，部分的な情報しか得られない

情報更新システム

時間変化する情報源を遠隔地からモニタリング



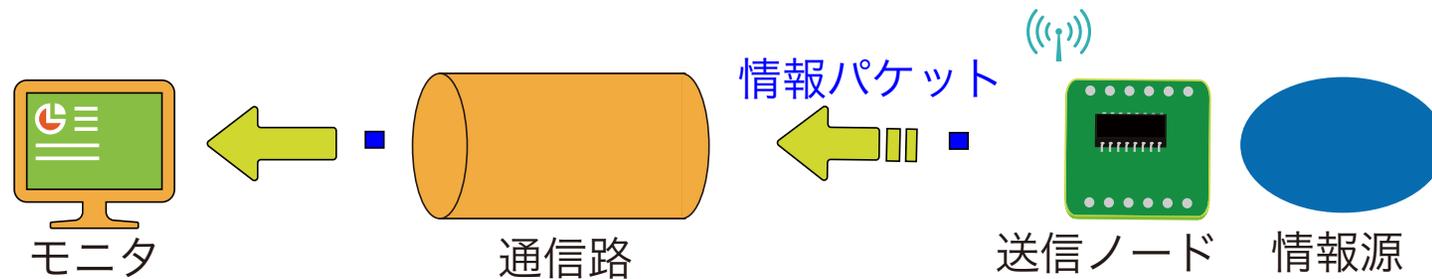
- 送信ノード
 - ◆ 情報源をサンプリングし，得られたサンプルをモニタに送信
- 受信ノード (モニタ)
 - ◆ 送信ノードから受信した最新の情報を画面に表示

モニタに表示されている情報は「過去」のもの

➡ 現在の情報源の状態に関して，部分的な情報しか得られない

情報更新システム

時間変化する情報源を遠隔地からモニタリング



モニタに表示されている情報は「過去」のもの

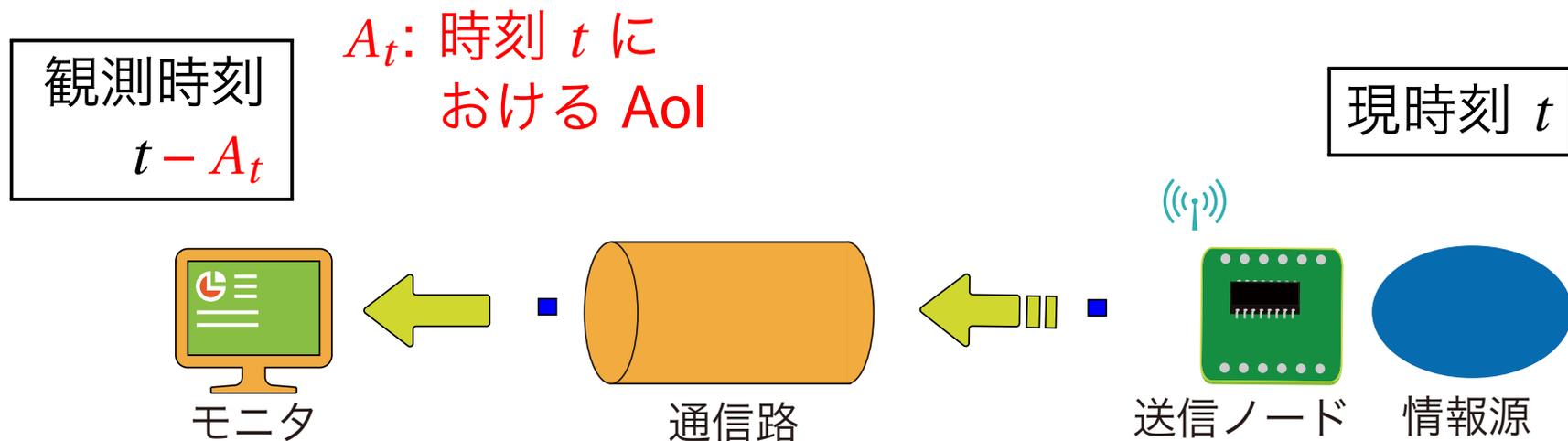
➡ 現在の情報源の状態に関して、部分的な情報しか得られない

● Age of Information (Aol)

- ◆ 情報の鮮度を定量的に表現する指標
- ◆ 直訳すると「情報の年齢」

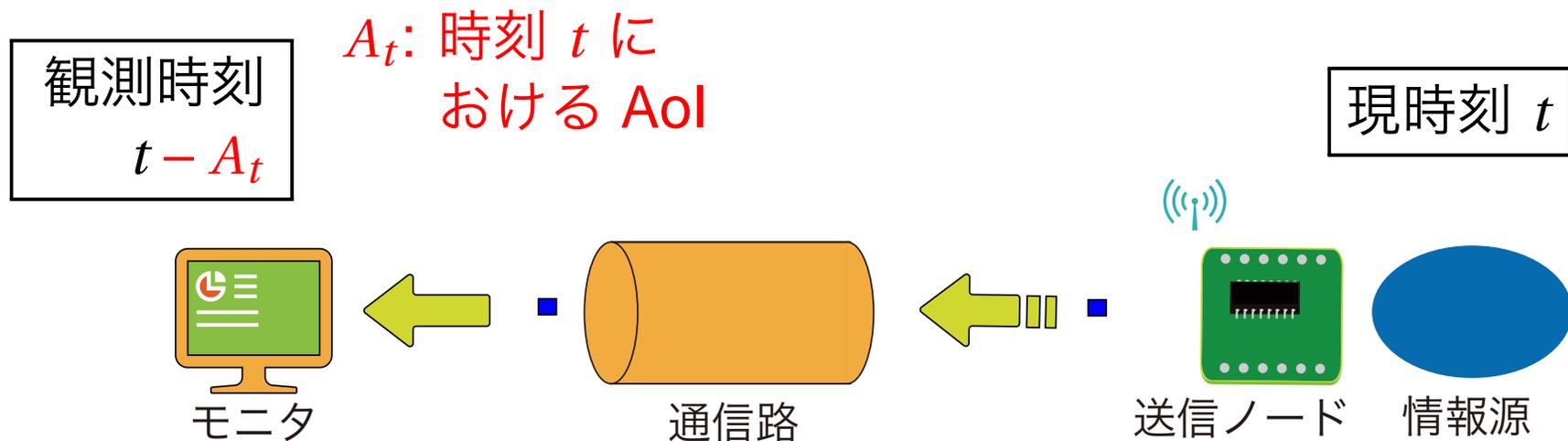
Age of Information (AoI)

- **AoI**: モニタに表示中である情報の、観測時点からの経過時間
 - ◆ 「情報の鮮度」の低さを表す
- AoI の定義は情報源の種類に依存しない
 - ➔ 幅広いシステムにおいて「情報の鮮度」を定量化可能



Age of Information (AoI)

- **AoI**: モニタに表示中である情報の、観測時点からの経過時間
 - ◆ 「情報の鮮度」の低さを表す
- AoI の定義は情報源の種類に依存しない
 - ➔ 幅広いシステムにおいて「情報の鮮度」を定量化可能



Aol に関する研究動向

過去数年間において、Aol に関する研究報告が急増

- IEEE 国際会議での発表件数 (※ 講演者により確認できた限り)
 - ◆ 2012 年: ISIT (1 件), INFOCOM (1 件)
 - ◆ 2013 年: ISIT (1 件)
 - ◆ 2014 年: ISIT (2 件)
 - ◆ 2015 年: ISIT (3 件), ICC (2 件)
 - ◆ 2016 年: ISIT (4 件), INFOCOM (1 件), ICC (1 件)
 - ◆ 2017 年: ISIT (12 件), INFOCOM (1 件), ICC (1 件),
GLOBECOM (5 件)
 - ◆ 2018 年: ISIT (13 件)

本講演の構成

- 前半では、最近の AoI 研究の「火付け役」となった研究を紹介
 - ◆ 車車間アドホックネットワーク (VANET) の性能評価 [1]
 - ◆ 待ち行列モデルを用いた AoI の理論的解析 [2]
- 後半は、講演者らによる研究成果を紹介
 - ◆ 先行研究の大半は、AoI の平均のみを議論
 - ◆ 本研究では、AoI の確率分布を考察
 - AoI の分布が満たす不変式を標本路解析により導出
 - この不変式を単一サーバ待ち行列へ応用

[1] S. Kaul et al., IEEE SECON 2011.

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

Aol の導入と待ち行列モデル化

車車間アドホックネットワーク (VANET)

- 無線通信機能を搭載した自動車が相互通信
- 走行の安全に関わる情報を車両間で共有 (ブロードキャスト)
 - ◆ 自身の位置・走行速度
 - ◆ センサやカメラで観測した情報
 - 付近の車両の位置・走行速度
 - 路面の状態

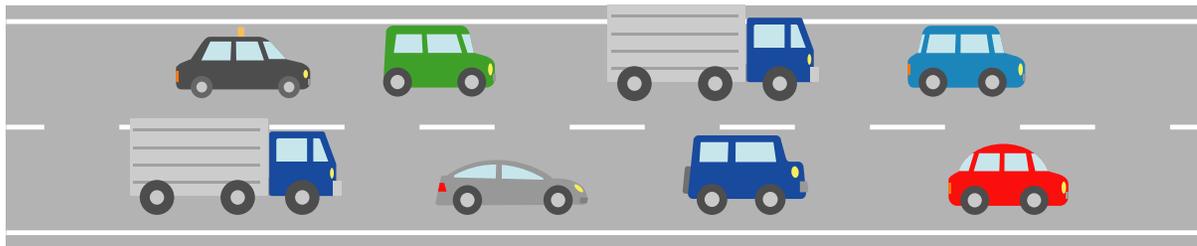


VANET における性能指標

- 車両の周囲の状況は時々刻々と変化
 - ◆ 時間が経つと、すぐに情報の価値が無くなる
- ➡ スループットは適切な性能指標とは言えない
- 情報の鮮度 (AoI) を性能指標として利用 [1]

車両 i から見た、車両 j の AoI = $t - T_{i,j}$ (t : 現時刻)

- $T_{i,j}$: i が j から最後に受け取った情報のタイムスタンプ

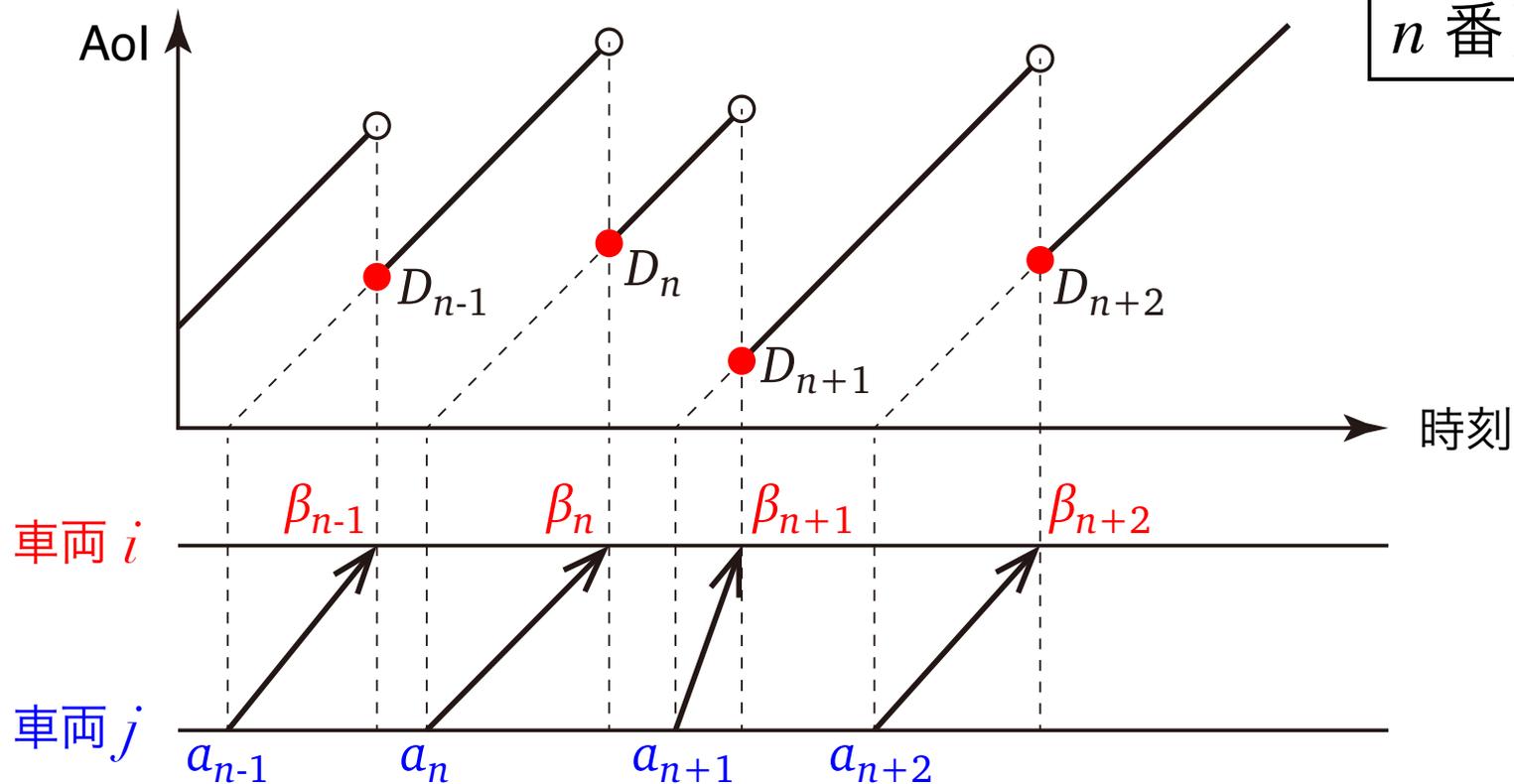


[1] S. Kaul et al., IEEE SECON 2011.

Aol の標本路

特定の車両の組 (i, j) に注目

- α_n : n 番目の情報 (サンプル) の生成時刻
- β_n : n 番目のサンプルの受信時刻



$$D_n := \beta_n - \alpha_n$$

n 番目の遅延時間

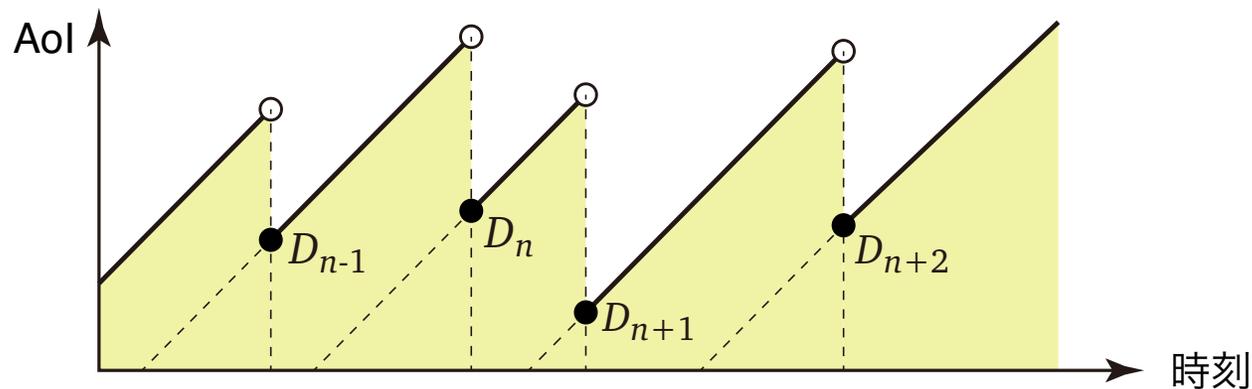
平均 AoI

- [1] では, 観測期間長 T における AoI の時間平均 (平均 AoI)

$$\frac{1}{T} \int_0^T A_t dt \quad \text{を性能指標として採用}$$

A_t : 時刻 t における AoI

- ◆ メッセージ配送方式が平均 AoI に与える影響を
シミュレーション実験により評価



[1] S. Kaul et al., IEEE SECON 2011.

Aol の基本性質 (1)

Aol の大きさを決める基本要素

1. サンプリング間隔 G_n

- ◆ 間隔が長すぎる場合、情報更新がなかなか起こらない

2. 通信路の遅延時間 D_n

- ◆ 通信路で大きな遅延が生じる場合、
サンプリング間隔が短くても、情報の即時性が保たれない



Aol の基本性質 (2)

- Aol が小さくなる (情報の鮮度が高くなる) 状況
 1. サンプルング間隔 G_n が短い
 2. 通信路の遅延時間 D_n が小さい
- 一方で, G_n と D_n はトレードオフの関係にある
 - ◆ G_n が短くなると通信路の負荷が増大 ➡ D_n は大きくなる

すなわち, 最適なサンプルング間隔 G_n が存在



Aol の基本性質 (2)

- Aol が小さくなる (情報の鮮度が高くなる) 状況
 1. サンプル間隔 G_n が短い
 2. 通信路の遅延時間 D_n が小さい
- 一方で, G_n と D_n はトレードオフの関係にある
 - ◆ G_n が短くなると通信路の負荷が増大 ➡ D_n は大きくなる

すなわち, 最適なサンプル間隔 G_n が存在



AoI の理論解析: 待ち行列モデル化

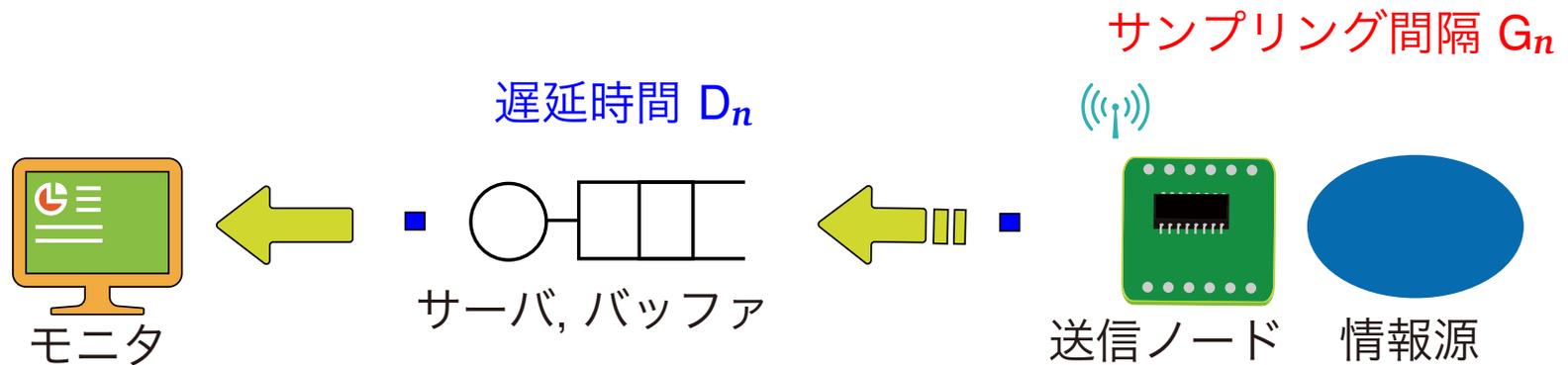
- 遅延時間を待ち行列モデルにより定式化 [2]



[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

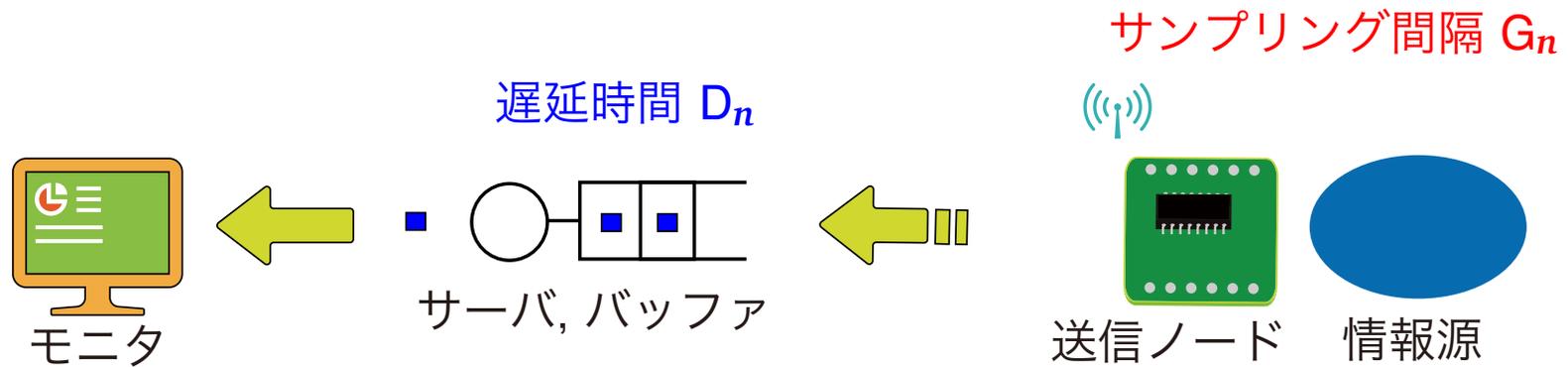
AoI の理論解析: 待ち行列モデル化

- 遅延時間を待ち行列モデルにより定式化 [2]



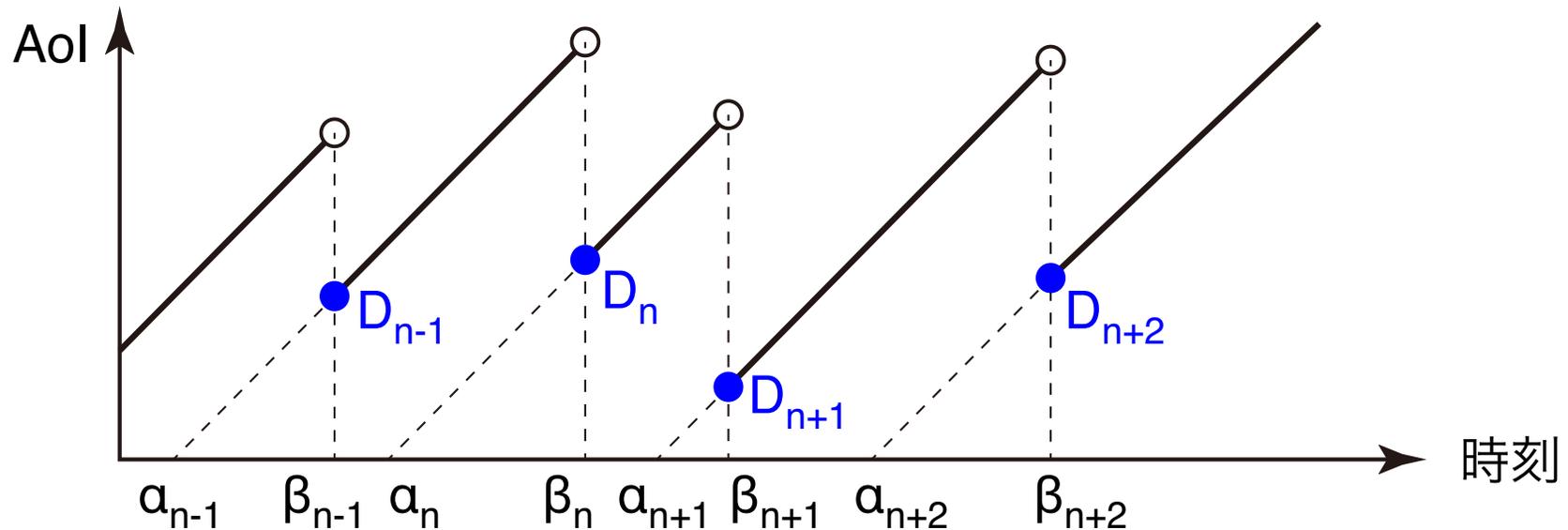
[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

Aol の理論解析: 平均 Aol の公式 (1)



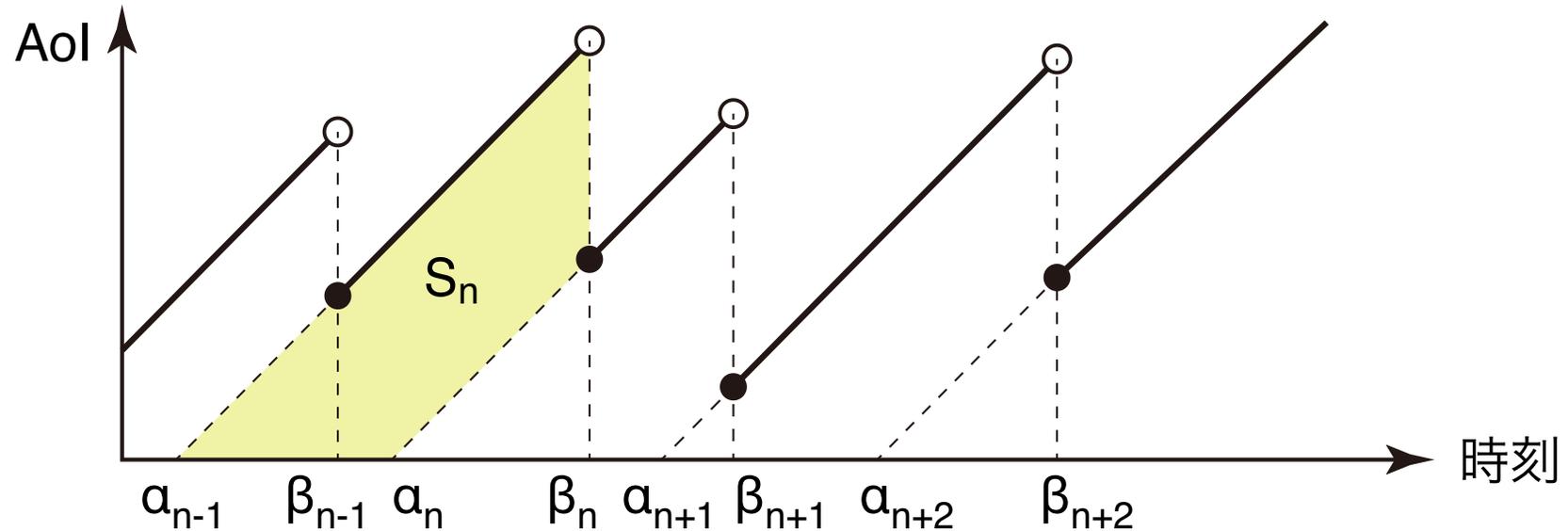
- α_n : n 番目の情報 (サンプル) の生成時刻
- β_n : n 番目のサンプルの受信時刻

$$G_n = \alpha_n - \alpha_{n-1}$$
$$D_n = \beta_n - \alpha_n$$



Aol の理論解析: 平均 Aol の公式 (2)

- 平均 Aol $E[A]$ は以下の手順で求められる [2]



$$E[A] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{M_T} S_n, \quad S_n = \frac{(\beta_n - \alpha_{n-1})^2}{2} - \frac{(\beta_n - \alpha_n)^2}{2}$$

M_t : 時刻 t までに受信したサンプル数

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

Aol の理論解析: 平均 Aol の公式 (3)

$$E[A] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{M_T} S_n, \quad S_n = \frac{(\beta_n - \alpha_{n-1})^2}{2} - \frac{(\beta_n - \alpha_n)^2}{2}$$

- S_n は次式で書き換えられる

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{[(\beta_n - \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha_{n-1})]^2}{2} - \frac{(\beta_n - \alpha_n)^2}{2} \\ &= \frac{(D_n + G_n)^2 - D_n^2}{2} \\ &= \frac{G_n^2}{2} + G_n D_n \end{aligned}$$

- ◆ G_n : $n-1$ 番目と n 番目のサンプリング間隔
- ◆ D_n : n 番目のサンプルの遅延時間

AoI の理論解析: 平均 AoI の公式 (4)

G_n : $n-1$ 番目と n 番目のサンプリング間隔

D_n : n 番目のサンプルの遅延時間

$$E[A] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M_T}{T} \cdot \frac{1}{M_T} \sum_{n=0}^{M_T} S_n, \quad S_n = \frac{G_n^2}{2} + G_n D_n$$

- システムが定常かつエルゴード的であるとき, 次式を得る [2]

$$E[A] = \frac{\frac{E[G^2]}{2} + E[G_n D_n]}{E[G]}$$

- 一般に, G_n と D_n は独立ではない

➡ $E[A]$ の解析は $E[G_n D_n]$ の導出に帰着される

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

AoI の理論解析: 平均 AoI の公式 (4)

G_n : $n-1$ 番目と n 番目のサンプリング間隔

D_n : n 番目のサンプルの遅延時間

$$E[A] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M_T}{T} \cdot \frac{1}{M_T} \sum_{n=0}^{M_T} S_n, \quad S_n = \frac{G_n^2}{2} + G_n D_n$$

- システムが定常かつエルゴード的であるとき, 次式を得る [2]

$$E[A] = \frac{\frac{E[G^2]}{2} + E[G_n D_n]}{E[G]}$$

- 一般に, G_n と D_n は独立ではない

➡ $E[A]$ の解析は $E[G_n D_n]$ の導出に帰着される

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

Aol の理論解析: 平均 Aol の公式 (5)

[2] では, 3 種類のモデルに対し $E[A]$ が考察されている

$E[H]$: 平均サービス時間, ρ : トラヒック強度 ($= E[H]/E[G]$)

$$(M/M/1) \quad E[A] = \left(1 + \frac{1}{\rho} + \frac{\rho^2}{1-\rho} \right) E[H]$$

$$(M/D/1) \quad E[A] = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2(1-\rho)} + \frac{1-\rho}{\rho e^{-\rho}} \right) E[H]$$

※ M/D/1 の陽形式解は [Y. Inoue et al., IEEE ISIT 2017] による

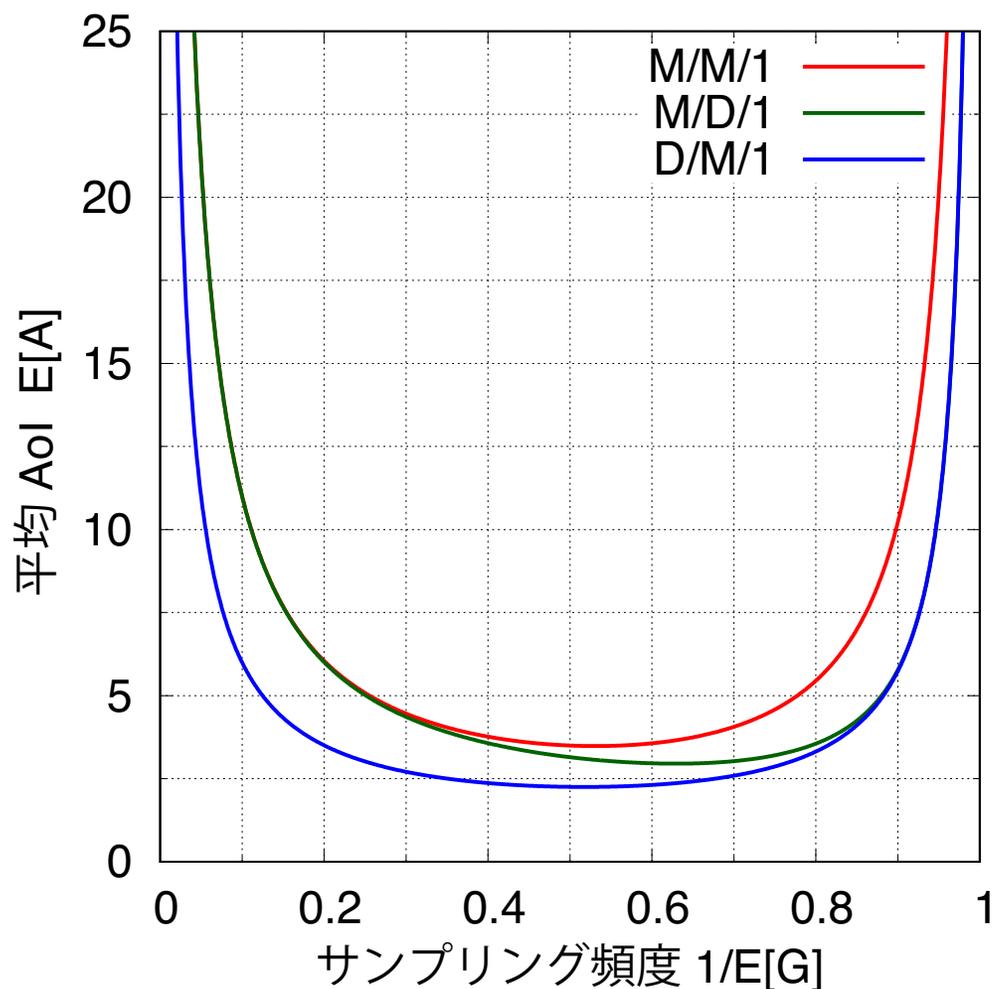
$$(D/M/1) \quad E[A] = \left(\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{1-\gamma} \right) E[H]$$

γ は, 方程式 $x = e^{-(1-x)/\rho}$ の $0 < x < 1$ における一意解

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

AoI の理論解析: 平均 AoI の公式 (6)

- 平均伝送時間 $E[H] = 1$ とおく



- サンプリング頻度に関して平均 AoI は U 字型の関数

- ◆ サンプリング頻度と遅延時間のトレードオフ

また, 平均 AoI の観点では一定間隔のサンプリングが効果的

本講演の構成

- 前半では、最近の AoI 研究の「火付け役」となった研究を紹介
 - ◆ 車車間アドホックネットワーク (VANET) の性能評価 [1]
 - ◆ 待ち行列モデルを用いた AoI の理論的解析 [2]
- 後半は、講演者らによる研究成果を紹介
 - ◆ 先行研究の大半は、AoI の平均のみを議論

$$E[A] = \frac{\frac{E[G^2]}{2} + E[G_n D_n]}{E[G]} \quad \text{における } E[G_n D_n] \text{ の導出が主}$$

- ◆ 本研究では AoI の確率分布を考察

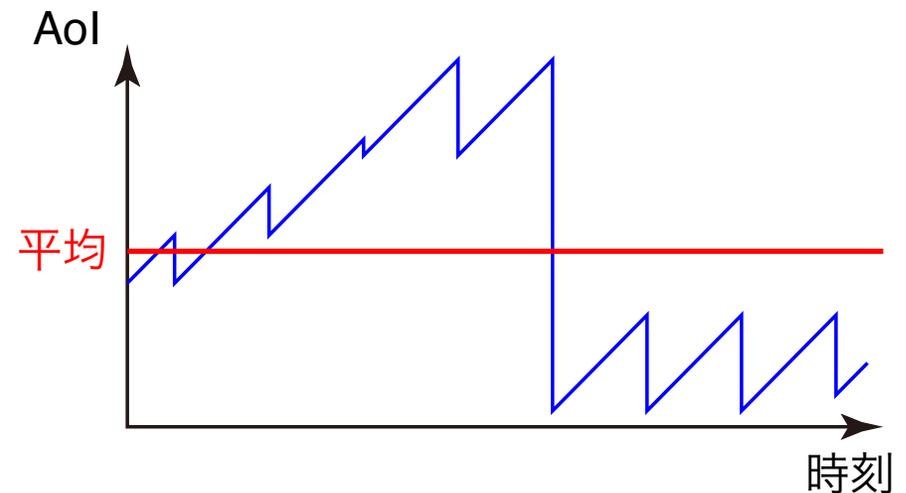
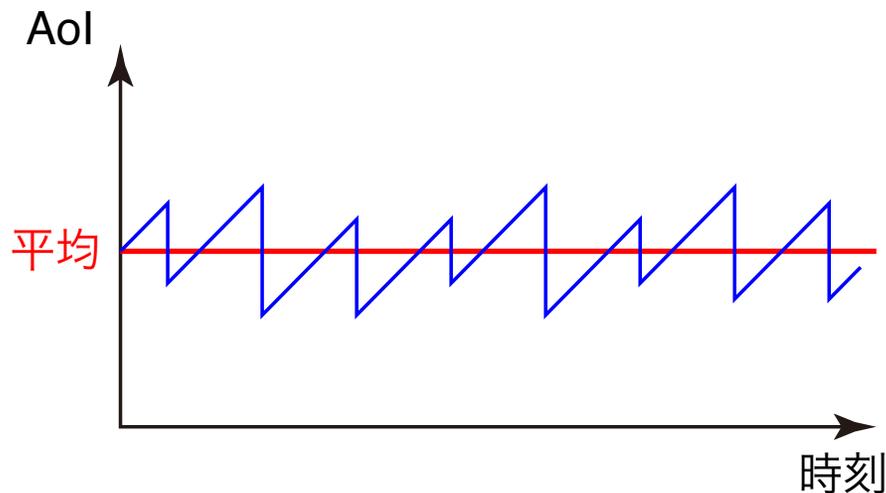
[1] S. Kaul et al., IEEE SECON 2011.

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

本研究の動機: AoI の確率分布 (1)

- 時間平均 $E[A]$ は AoI に関する主要な性能指標であるが, AoI 過程の挙動を特徴付けるには十分でない

◆ 特に, 平均からの偏差を評価できない



- AoI の詳細な特徴付けには, 確率分布 $A(x)$ に関する考察が必要

$A(x)$ ($x \geq 0$): AoI が x 以下に留まっている時間割合

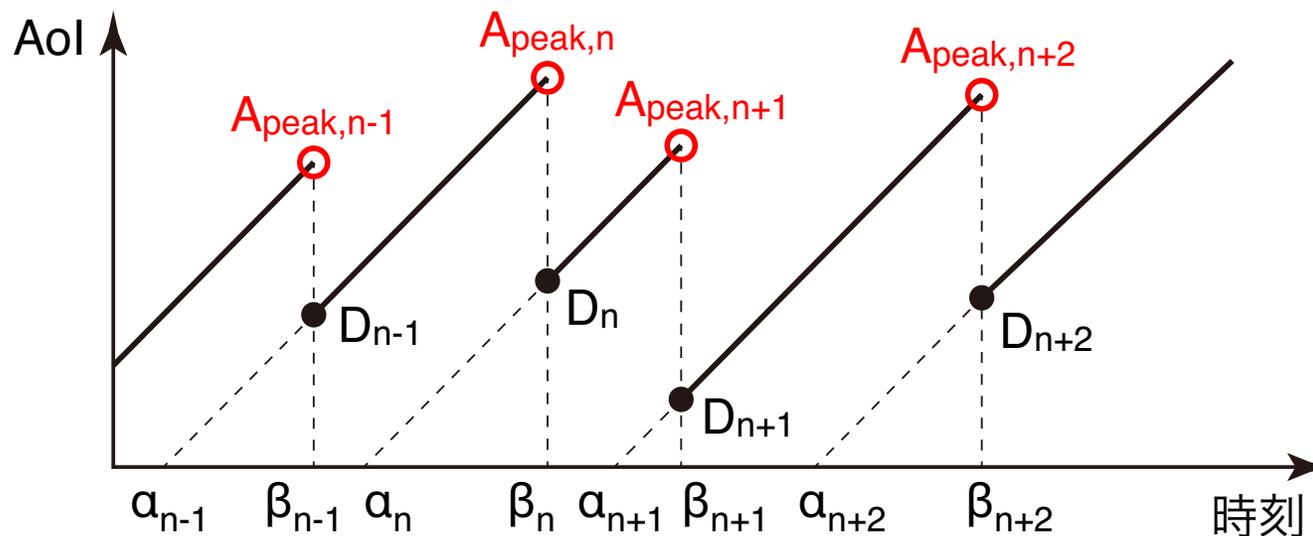
本研究の動機: AoI の確率分布 (2)

- ピーク AoI については確率分布の解析が比較的容易 [3]
(\triangleq 情報更新の直前における AoI)

$$A_{\text{peak},n+1} = D_n + (\beta_{n+1} - \beta_n)$$

D_n : n 番目の情報パケットの遅延

β_n : n 番目の情報パケットの配信完了時刻



[3] M. Costa et al., IEEE Trans. Inf. Theory, 62, 2016.

本研究の概要

- 幅広い状況下で AoI の確率分布 $A(x)$ が満たす不変式を導出:

$$A(x) = \frac{1}{E[G]} \int_0^x (D(y) - A_{\text{peak}}(y)) dy$$

$D(x)$: 遅延時間分布, $A_{\text{peak}}(x)$: ピーク AoI 分布

- さらに, この不変式から $E[A]$ に関する代替公式を得る
- 上記の結果の応用として, 一般の先着順処理 GI/GI/1 を考察
 - ◆ AoI の分布は, 遅延時間の分布を用いて与えられる
- 最後に, GI/GI/1 を特別化したモデルを考察
 - ◆ M/GI/1, GI/M/1, ならびにそれらの特別な場合

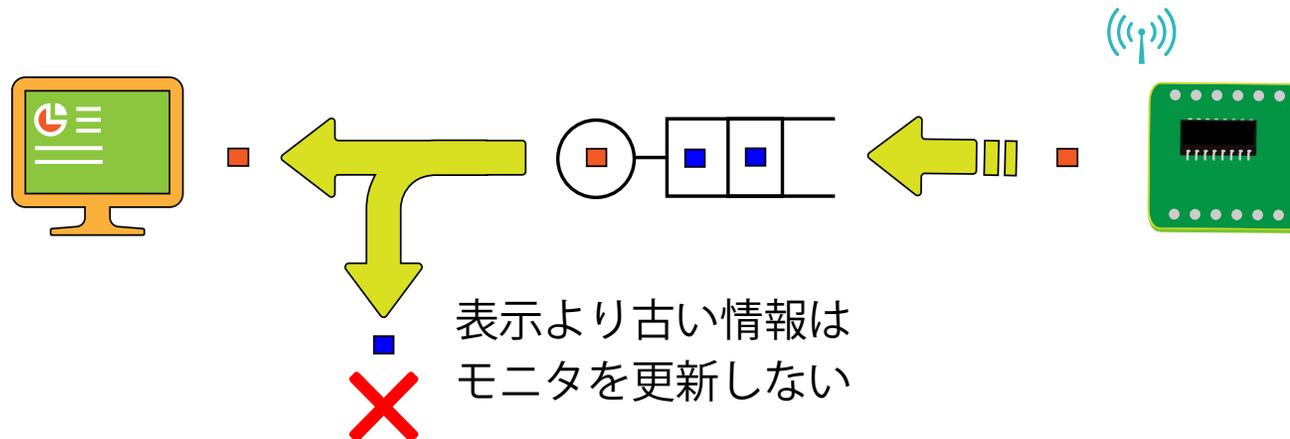
Aol の分布が満たす不変式

情報パケットの分類

- 一般に、情報更新システムには二種類のパケットが存在
 - ◆ **更新パケット**: モニタの情報を更新する**新しい**パケット
 - ◆ **非更新パケット**: モニタの情報よりも**古い**パケット

(例 1) 先着順サービス ➡ パケットは全て**更新パケット**

(例 2) 後着順サービス ➡ **更新パケット**と**非更新パケット**が混在



特に、**更新パケット**のみに注目すると常に **FIFO (First-In-First-Out)**

情報更新システムの定式化

システムの一つの標本路に注目 (確定的なモデル)

- 更新パケットの到着・離脱時刻の系列としてシステムを定式化

α_n ($n = 0, 1, \dots$): n 番目の更新パケットの到着時刻

β_n ($n = 0, 1, \dots$): n 番目の更新パケットの離脱時刻

※ これらはただの数列であり、確率変数列ではない

- α_n と β_n について以下のことを仮定

(i) $\alpha_n \leq \alpha_{n+1}$ (パケットには到着順に番号を付す)

(ii) $\alpha_n \leq \beta_n$ (パケットの離脱は到着より後に起こる)

(iii) $\beta_n \leq \beta_{n+1}$ (パケットの離脱順序は **FIFO**)

(iv) $\alpha_0 \leq \beta_0 = 0 < \alpha_1$ (時刻 0 に最初のパケットが離脱し、空になる)

Aol とピーク Aol (1)

α_n, β_n : n 番目の更新パケットの到着, 離脱時刻

- M_t : 時刻 t までの累積離脱数
(= 最後に離脱したパケットの番号)

$$M_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\beta_n \leq t\}$$

$$\mathbb{1}\{X\} = \begin{cases} 1, & X \text{ が真} \\ 0, & X \text{ が偽} \end{cases}$$

- A_t : 時刻 t における Aol

$$A_t = t - \alpha_{M_t} \quad (= \text{現時刻} - \text{表示中の情報の到着時刻})$$

- $A_{\text{peak},n}$: n 番目のピーク Aol

$$A_{\text{peak},n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} A_{\beta_n - \Delta t} \quad (= n \text{ 番目の離脱が起こる直前の Aol})$$

Aol とピーク Aol (2)

α_n, β_n : n 番目の更新パケットの到着, 離脱時刻

A_t : 時刻 t における Aol, $A_{\text{peak},n}$: n 番目のピーク Aol

- $A_t = t - \alpha_{M_t}$ (= 現時刻 - 表示中の情報の到着時刻)

- $A_{\text{peak},n} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} A_{\beta_n - \Delta t}$
= $\beta_n - \alpha_{n-1}$ (= 離脱時刻 - 表示中の情報の到着時刻)
= $(\beta_n - \alpha_n) + (\alpha_n - \alpha_{n-1})$
= $D_n + G_n$

- ◆ D_n : n 番目のパケットの遅延時間

- ◆ G_n : n 番目と $n-1$ 番目のパケットの到着間隔

標本路上の経験分布関数

A_t : 時刻 t における AoI, $A_{\text{peak},n}$: n 番目のピーク AoI

D_n : n 番目のパケットの遅延時間

- $A^\#(x) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}\{A_t \leq x\} dt$ ($A_t \leq x$ となる時間割合)

- $A_{\text{peak}}^\#(x) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{1}\{A_{\text{peak},n} \leq x\}$ ($A_{\text{peak},n} \leq x$ となる個数割合)

- $D^\#(x) \triangleq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{1}\{D_n \leq x\}$ ($D_n \leq x$ となる個数割合)

以降では、これら三つの極限の存在を仮定

AoI が満たす不変式

$A^\#(x)$: AoI の経験分布, $A_{\text{peak},n}^\#(x)$: ピーク AoI の経験分布
 $D^\#(x)$: 遅延時間の経験分布

- 仮定 1: パケットの到着率 λ は有限かつ非零の値を取る

$$\lambda \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\alpha_n \leq T\} \in (0, \infty)$$

- 仮定 2: システムは安定である

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\beta_n \leq T\}}_{\text{離脱率}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}\{\alpha_n \leq T\}}_{\text{到着率}} \quad (= \lambda)$$

これらの仮定の下, $A^\#(x)$ と $A_{\text{peak}}^\#(x)$ および $D^\#(x)$ の間に次式が成立

$$A^\#(x) = \lambda \int_0^x \left(D^\#(y) - A_{\text{peak}}^\#(y) \right) dy$$

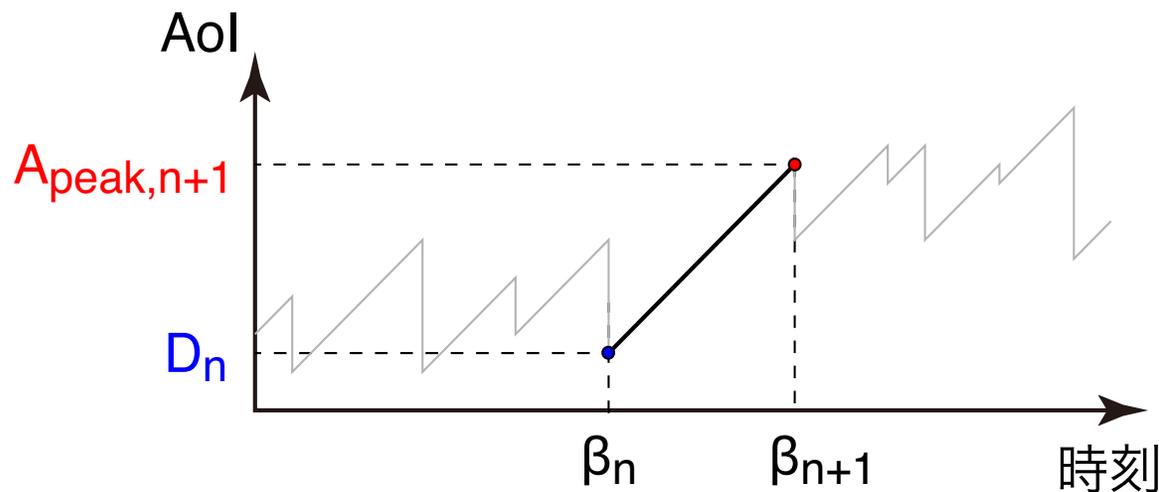
証明の概略 (1)

n 番目と $n+1$ 番目の離脱の間 $[\beta_n, \beta_{n+1})$ に注目

● パケットの離脱直後における AoI は遅延時間 D_n に等しい

➡ AoI は D_n から $A_{\text{peak},n+1}$ まで傾き 1 で線形に増加

$$\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \leq x\} dt = \int_{D_n}^{A_{\text{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \leq x\} du$$

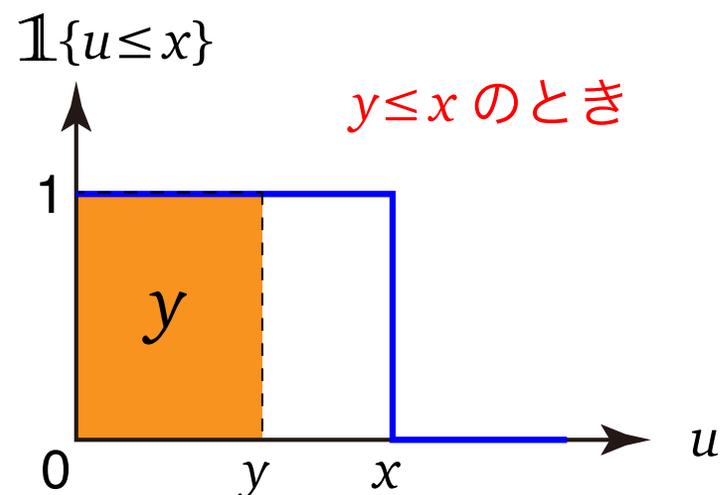
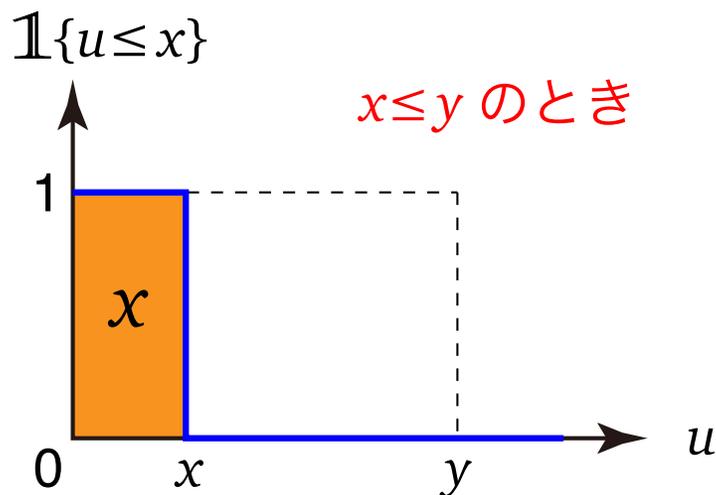


証明の概略 (2)

$$\begin{aligned}\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \leq x\} dt &= \int_{D_n}^{A_{\text{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \leq x\} du \\ &= \int_0^{A_{\text{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \leq x\} du - \int_0^{D_n} \mathbb{1}\{u \leq x\} du\end{aligned}$$

- 任意の $x \geq 0, y \geq 0$ に対し, 次の恒等式が成立

$$\int_0^y \mathbb{1}\{u \leq x\} du = \min(x, y) = \int_0^x \mathbb{1}\{u \leq y\} du$$



証明の概略 (2)

$$\begin{aligned}\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \leq x\} dt &= \int_{D_n}^{A_{\text{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \leq x\} du \\ &= \int_0^{A_{\text{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \leq x\} du - \int_0^{D_n} \mathbb{1}\{u \leq x\} du\end{aligned}$$

- 任意の $x \geq 0$, $y \geq 0$ に対し, 次の恒等式が成立

$$\begin{aligned}\int_0^y \mathbb{1}\{u \leq x\} du &= \min(x, y) = \int_0^x \mathbb{1}\{u \leq y\} du \\ &= \int_0^x (1 - \mathbb{1}\{y \leq u\}) du\end{aligned}$$

証明の概略 (2)

$$\begin{aligned}\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \leq x\} dt &= \int_{D_n}^{A_{\text{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \leq x\} du \\ &= \int_0^{A_{\text{peak},n+1}} \mathbb{1}\{u \leq x\} du - \int_0^{D_n} \mathbb{1}\{u \leq x\} du\end{aligned}$$

- 任意の $x \geq 0, y \geq 0$ に対し, 次の恒等式が成立

$$\begin{aligned}\int_0^y \mathbb{1}\{u \leq x\} du &= \min(x, y) = \int_0^x \mathbb{1}\{u \leq y\} du \\ &= \int_0^x (1 - \mathbb{1}\{y \leq u\}) du\end{aligned}$$

したがって, 次式を得る

$$\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \leq x\} dt = \int_0^x \mathbb{1}\{D_n \leq u\} du - \int_0^x \mathbb{1}\{A_{\text{peak},n+1} \leq u\} du$$

証明の概略 (3)

$$\int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \leq x\} dt = \int_0^x \mathbb{1}\{D_n \leq u\} du - \int_0^x \mathbb{1}\{A_{\text{peak},n+1} \leq u\} du$$

- 以上より, AoI の分布 $A^\#(x)$ は次式で与えられる

$$\begin{aligned} A^\#(x) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{1}\{A_t \leq x\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{M_T} \int_{\beta_n}^{\beta_{n+1}} \mathbb{1}\{A_t \leq x\} dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{M_T}{T} \cdot \frac{1}{M_T} \sum_{n=0}^{M_T} \left[\int_0^x \mathbb{1}\{D_n \leq u\} du - \int_0^x \mathbb{1}\{A_{\text{peak},n+1} \leq u\} du \right] \\ &= \lambda \int_0^x \left(D^\#(y) - A_{\text{peak}}^\#(y) \right) dy \end{aligned}$$

M_t : 時刻 t までの累積離脱数, λ : パケットの到着率

Aol が満たす不変式 (まとめ)

- 更新パケットの到着時刻 $\{\alpha_n\}_{n=0,1,\dots}$ と 離脱時刻 $\{\beta_n\}_{n=0,1,\dots}$
 - ◆ 確定的な数値の列として与えられているとする
- $\{\alpha_n\}_{n=0,1,\dots}$ と $\{\beta_n\}_{n=0,1,\dots}$ が満たすべき条件
 - ◆ 仮定 0: 経験分布 $A^\sharp(x)$, $A_{\text{peak}}^\sharp(x)$, $D^\sharp(x)$ が各 $x \geq 0$ で存在
 - ◆ 仮定 1: パケットの到着率 λ は有限かつ非零の値を取る
 - ◆ 仮定 2: システムは安定である

➡ このとき, $A^\sharp(x) = \lambda \int_0^x (D^\sharp(y) - A_{\text{peak}}^\sharp(y)) dy$ が成立

次に, システムが確率モデルである場合を考える

- ◆ 上記の結果は標本路ごとに成立

確率分布に関する記法

以降では一貫して、次の記法を用いる

- 任意の非負確率分布関数 $F(x)$ ($x \geq 0$) に対し,

- ◆ F : 分布関数 $F(x)$ に従う確率変数

$$\Pr(F \leq x) = F(x)$$

- ◆ $f(x)$: $F(x)$ に対応する確率密度関数 (存在するとき)

$$f(x) = \frac{d}{dx}F(x), \quad x \geq 0$$

- ◆ $f^*(s)$: $F(x)$ のラプラス・ステイスキュス変換 (LST)

$$f^*(s) = \mathbb{E}\left[e^{-sF}\right] = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x), \quad \operatorname{Re}(s) > 0$$

AoI の定常分布が満たす不変式

$A(x)$: AoI の定常分布

$A_{\text{peak}}(x)$: ピーク AoI の定常分布, $D(x)$: 遅延時間の定常分布

- AoI の定常分布の密度関数

$$a(x) = \frac{D(x) - A_{\text{peak}}(x)}{E[G]}, \quad x \geq 0$$

- AoI の定常分布の LST

$$a^*(s) = \frac{d^*(s) - a_{\text{peak}}^*(s)}{sE[G]}, \quad \text{Re}(s) > 0$$

- AoI の定常分布の k 次モーメント ($k = 1, 2, \dots$)

$$E[A^k] = \frac{E[(A_{\text{peak}})^{k+1}] - E[D^{k+1}]}{(k+1)E[G]}$$

平均 AoI の公式

- 平均 AoI $E[A]$ の公式 [2]

$$(i) \quad E[A] = \frac{\frac{E[G^2]}{2} + E[G_n D_n]}{E[G]}$$

- 前述の結果から, $E[A]$ の代替公式を得る

$$(ii) \quad E[A] = \frac{E[(A_{\text{peak}})^2] - E[D^2]}{2E[G]}$$

$$(iii) \quad E[A] = \lim_{s \rightarrow 0^+} (-1) \cdot \frac{d}{ds} [a^*(s)], \quad a^*(s) = \frac{d^*(s) - a_{\text{peak}}^*(s)}{sE[G]}$$

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

AoI の定常分布が満たす不変式 (再掲)

- AoI の分布は、遅延時間 と ピーク AoI の分布から求められる

$$A(x) = \lambda \int_0^x (D(y) - A_{\text{peak}}(y)) dy$$

- ◆ 遅延時間は、従来の待ち行列理論で幅広く取り扱われている
- ◆ ピーク AoI については、個別の解析が必要

以下では、単一サーバ先着順処理待ち行列を考察

- GI/GI/1 での ピーク AoI の分布を遅延時間分布を用いて表現
 - ➡ AoI 分布は遅延時間分布を用いて与えられる
- この結果を M/GI/1 と GI/M/1 に適用
 - ◆ 遅延時間分布に関する既知の結果が利用可能

単一サーバ先着順処理システムへの応用

GI/GI/1 待ち行列モデル

- パケットの到着間隔は独立かつ同一に分布
 - ◆ $G(x)$: 到着間隔が従う分布関数
 - ◆ $E[G]$: 平均到着間隔 ($\Rightarrow \lambda = 1/E[G]$ が成立)
- 各パケットのサービス時間は独立かつ同一に分布
 - ◆ $H(x)$: サービス時間が従う分布関数
 - ◆ $E[H]$: 平均処理時間
- 以降では, 安定性条件 $\rho < 1$ を仮定

ただし, $\rho \triangleq \lambda E[H]$ はトラフィック強度を表す

ピーク AoI の分布

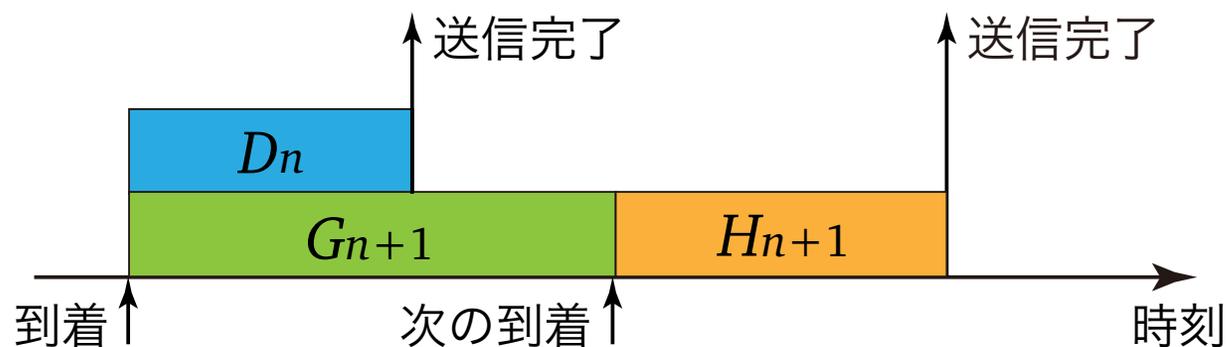
G_n : $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n : n 番目のパケットの処理時間

D_n : n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\text{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$



ピーク AoI の分布

G_n : $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n : n 番目のパケットの処理時間

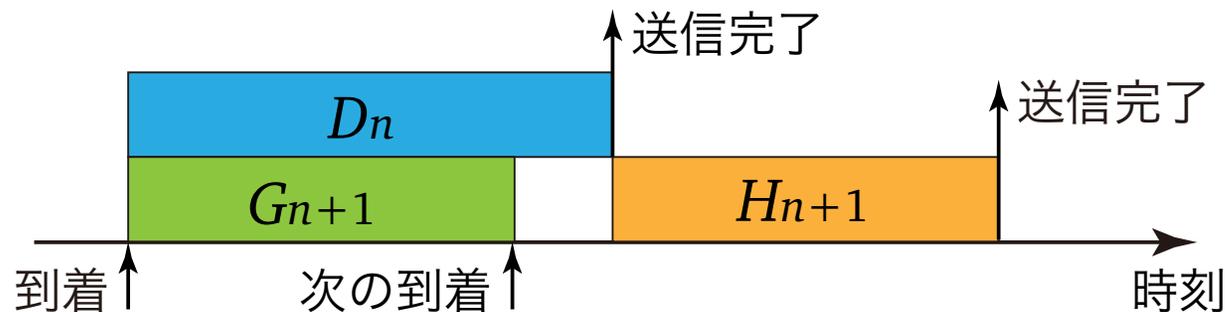
D_n : n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\text{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\text{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$



ピーク AoI の分布

G_n : $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n : n 番目のパケットの処理時間

D_n : n 番目のパケットの遅延時間

- $G_{n+1} > D_n$ の場合 (パケットの離脱直後にシステムが空)

$$A_{\text{peak},n+1} = G_{n+1} + H_{n+1}$$

- $G_{n+1} \leq D_n$ の場合 (パケットの離脱直後に次の処理が開始)

$$A_{\text{peak},n+1} = D_n + H_{n+1}$$

したがって、次式が成立

$$A_{\text{peak},n+1} = \max(G_{n+1}, D_n) + H_{n+1}$$

ピーク AoI の分布 (2)

G_n : $n-1$ 番目と n 番目のパケットの到着間隔

H_n : n 番目のパケットのサービス時間

D_n : n 番目のパケットの遅延時間

- $A_{\text{peak},n} = \max(G_{n+1}, D_n) + H_{n+1}$

- G_{n+1} , D_n および H_{n+1} は互いに独立

➡ 定常性より, ピーク AoI の定常分布の LST が得られる

$$a_{\text{peak}}^*(s) = \left[\int_0^\infty e^{-sx} G(x) dD(x) + \int_0^\infty e^{-sx} D(x) dG(x) - \mathbb{E}[\mathbb{1}\{G = D\} e^{-sG}] \right] h^*(s)$$

GI/GI/1 における AoI の定常分布

- AoI の定常分布の LST $a^*(s)$

$$a^*(s) = \frac{d^*(s) - a_{\text{peak}}^*(s)}{sE[G]}$$

- ピーク AoI の定常分布の LST $a_{\text{peak}}^*(s)$

$$a_{\text{peak}}^*(s) = \left[\int_0^\infty e^{-sx} G(x) dD(x) + \int_0^\infty e^{-sx} D(x) dG(x) - E[\mathbb{1}\{G = D\} e^{-sG}] \right] h^*(s)$$

- $a^*(s)$ は 遅延時間 の定常分布を用いて与えられる

特別な場合 (M/GI/1, GI/M/1)

M/GI/1 待ち行列の AoI

パケットの到着間隔 G が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う場合 (M/GI/1)

- 遅延時間 D の LST は次式で与えられる

$$d^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda h^*(s)} \cdot h^*(s)$$

- 上式を用いて計算すると、ピーク AoI の LST $a_{\text{peak}}^*(s)$ を得る

$$\begin{aligned} a_{\text{peak}}^*(s) &= \left[\int_0^\infty e^{-sx} (1 - e^{-\lambda x}) dD(x) + \int_0^\infty e^{-sx} D(x) \lambda e^{-\lambda x} dx \right] h^*(s) \\ &= \left[d^*(s) - d^*(s+\lambda) + \frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot d^*(s+\lambda) \right] h^*(s) \end{aligned}$$

M/GI/1 待ち行列の AoI

パケットの到着間隔 G が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う場合 (M/GI/1)

- 遅延時間 D の LST は次式で与えられる

$$d^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda h^*(s)} \cdot h^*(s)$$

- 上式を用いて計算すると、ピーク AoI の LST $a_{\text{peak}}^*(s)$ を得る

$$a_{\text{peak}}^*(s) = \left[d^*(s) - d^*(s+\lambda) + \frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot d^*(s+\lambda) \right] h^*(s)$$

M/GI/1 待ち行列の AoI

パケットの到着間隔 G が平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う場合 (M/GI/1)

- 遅延時間 D の LST は次式で与えられる

$$d^*(s) = \frac{(1-\rho)s}{s-\lambda+\lambda h^*(s)} \cdot h^*(s)$$

- 上式を用いて計算すると、ピーク AoI の LST $a_{\text{peak}}^*(s)$ を得る

$$a_{\text{peak}}^*(s) = \left[d^*(s) - d^*(s+\lambda) + \frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot d^*(s+\lambda) \right] h^*(s)$$

したがって、 $a^*(s) = \frac{d^*(s) - a_{\text{peak}}^*(s)}{sE[G]}$ より、AoI の LST が求まる

$$a^*(s) = \rho d^*(s) \cdot \frac{1-h^*(s)}{E[H]s} + d^*(s+\lambda) \cdot \frac{\lambda}{s+\lambda} \cdot h^*(s)$$

AoI の平均と二次モーメント (M/GI/1)

モーメントの公式 $E[A^k] = (-1)^k \lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{d^k}{ds^k} a^*(s)$

- 例えば, AoI の平均と二次モーメントは次式で与えられる

$$E[A] = E[D] + \frac{1 - \rho}{\rho h^*(\lambda)} \cdot E[H]$$

$$E[A^2] = E[D^2] + \frac{2(1 - \rho)}{(\rho h^*(\lambda))^2} [1 + \rho h^*(\lambda) + \lambda h^{(1)}(\lambda)] (E[H])^2$$

ただし,

$$E[D] = \frac{\lambda E[H^2]}{2(1 - \rho)} + E[H]$$

$$E[D^2] = \frac{\lambda E[H^3]}{3(1 - \rho)} + \frac{(\lambda E[H^2])^2}{2(1 - \rho)^2} + \frac{E[H^2]}{1 - \rho}$$

M/M/1 待ち行列

サービス時間分布を指数分布に特別化 ($H(x) = 1 - e^{-\mu x}$)

- AoI の LST は単純化される

$$a^*(s) = \frac{(1-\rho)\mu}{s + (1-\rho)\mu} - \frac{(1-\rho)\mu s(s + \lambda + \mu)}{(s + \mu)^2(s + \lambda)}$$

- AoI の平均と二次モーメントも単純化される (※ $E[A]$ は [2] と一致)

$$E[A] = \left(\frac{1}{1-\rho} + \frac{1}{\rho} - \rho \right) E[H], \quad E[A^2] = 2 \left(\frac{1}{(1-\rho)^2} - 2\rho + \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) (E[H])^2$$

- さらに, AoI の分布関数が簡潔な形で書き下せる

$$A(x) = 1 - e^{-(1-\rho)\mu x} + \left(\frac{1}{1-\rho} + \rho\mu x \right) e^{-\mu x} - \frac{1}{1-\rho} \cdot e^{-\lambda x}$$

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

M/D/1 待ち行列

サービス時間分布を一定分布に特別化 ($H = E[H]$, w.p. 1)

- AoI の平均と二次モーメントが単純化される
(※ [2] では, 積分を用いて $E[A]$ が与えられている)

$$E[A] = \left(\frac{1}{2(1-\rho)} + \frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{\rho \exp(-\rho)} \right) E[H]$$

$$E[A^2] = \left(\frac{1}{2(1-\rho)^2} + \frac{1}{3(1-\rho)} + \frac{1}{6} + \frac{2(1-\rho)}{\rho^2 \exp(-2\rho)} \right) (E[H])^2$$

- 単純な計算により, 次のことが確かめられる

到着率 λ と平均サービス時間 $E[H]$ を固定すると,
M/D/1 の $E[A]$ は必ず M/M/1 より小さい

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

GI/M/1 待ち行列の AoI

サービス時間 H が平均 $1/\mu$ の指数分布に従う場合 (GI/M/1)

- 遅延時間 D は平均 $1/(\mu - \mu\gamma)$ の指数分布に従う

$$D(x) = 1 - e^{-(\mu - \mu\gamma)x}, \quad d(x) = (\mu - \mu\gamma)e^{-(\mu - \mu\gamma)x}, \quad d^*(s) = \frac{\mu - \mu\gamma}{s + \mu - \mu\gamma}$$

ただし γ は, $x = g^*(\mu - \mu x)$ ($0 < x < 1$) の一意解

- 上式を用いて計算すると, ピーク AoI の LST $a_{\text{peak}}^*(s)$ を得る

$$\begin{aligned} a_{\text{peak}}^*(s) &= \left[\int_0^\infty e^{-sx} G(x) (\mu - \mu\gamma) e^{-(\mu - \mu\gamma)x} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty e^{-sx} (1 - e^{-(\mu - \mu\gamma)x}) dG(x) \right] \frac{\mu}{s + \mu} \\ &= \left[\frac{\mu - \mu\gamma}{s + \mu - \mu\gamma} \cdot g^*(s + \mu - \mu\gamma) + g^*(s) - g^*(s + \mu - \mu\gamma) \right] \frac{\mu}{s + \mu} \end{aligned}$$

GI/M/1 待ち行列の AoI

サービス時間 H が平均 $1/\mu$ の指数分布に従う場合 (GI/M/1)

- 遅延時間 D は平均 $1/(\mu - \mu\gamma)$ の指数分布に従う

$$D(x) = 1 - e^{-(\mu - \mu\gamma)x}, \quad d(x) = (\mu - \mu\gamma)e^{-(\mu - \mu\gamma)x}, \quad d^*(s) = \frac{\mu - \mu\gamma}{s + \mu - \mu\gamma}$$

ただし γ は, $x = g^*(\mu - \mu x)$ ($0 < x < 1$) の一意解

- 上式を用いて計算すると, ピーク AoI の LST $a_{\text{peak}}^*(s)$ を得る

$$a_{\text{peak}}^*(s) = \left[\frac{\mu - \mu\gamma}{s + \mu - \mu\gamma} \cdot g^*(s + \mu - \mu\gamma) + g^*(s) - g^*(s + \mu - \mu\gamma) \right] \frac{\mu}{s + \mu}$$

GI/M/1 待ち行列の AoI

サービス時間 H が平均 $1/\mu$ の指数分布に従う場合 (GI/M/1)

- 遅延時間 D は平均 $1/(\mu - \mu\gamma)$ の指数分布に従う

$$D(x) = 1 - e^{-(\mu - \mu\gamma)x}, \quad d(x) = (\mu - \mu\gamma)e^{-(\mu - \mu\gamma)x}, \quad d^*(s) = \frac{\mu - \mu\gamma}{s + \mu - \mu\gamma}$$

ただし γ は, $x = g^*(\mu - \mu x)$ ($0 < x < 1$) の一意解

- 上式を用いて計算すると, ピーク AoI の LST $a_{\text{peak}}^*(s)$ を得る

$$a_{\text{peak}}^*(s) = \left[\frac{\mu - \mu\gamma}{s + \mu - \mu\gamma} \cdot g^*(s + \mu - \mu\gamma) + g^*(s) - g^*(s + \mu - \mu\gamma) \right] \frac{\mu}{s + \mu}$$

したがって, $a^*(s) = \frac{d^*(s) - a_{\text{peak}}^*(s)}{sE[G]}$ より, AoI の LST が求まる

GI/M/1 待ち行列の AoI (2)

- AoI の LST は次式で与えられる

$$a^*(s) = \left[\rho \cdot \frac{(1-\gamma)\mu}{s+(1-\gamma)\mu} \cdot \frac{g^*(s+(1-\gamma)\mu) - \gamma}{1-\gamma} + \frac{1-g^*(s)}{sE[G]} \right] \frac{\mu}{s+\mu}$$

- また, AoI の平均と二次モーメントは次式で与えられる

$$E[A] = \frac{E[G^2]}{2E[G]} + \frac{1}{\mu} - \frac{g^{(1)}((1-\gamma)\mu)}{(1-\gamma)\mu E[G]},$$

$$E[A^2] = \frac{E[G^3]}{3E[G]} + \rho E[G^2] + \frac{2}{\mu^2} + \frac{\rho}{1-\gamma} \left[g^{(2)}((1-\gamma)\mu) - 2 \left(\frac{1}{(1-\gamma)\mu} + \frac{1}{\mu} \right) g^{(1)}((1-\gamma)\mu) \right]$$

D/M/1 待ち行列

到着間隔分布を一定分布に特別化 ($G = E[G]$, w.p. 1)

- AoI の平均と二次モーメントが単純化される (※ $E[A]$ は [2] と一致)

$$E[A] = \left[\frac{1}{2\rho} + \frac{1}{1-\gamma} \right] \frac{1}{\mu}$$

$$E[A^2] = \left(2 \left(\frac{1}{1-\gamma} \right)^2 + \frac{1}{1-\gamma} \cdot \frac{1}{\rho} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\rho^2} \right) \left(\frac{1}{\mu} \right)^2$$

[2] S. Kaul et al., IEEE INFOCOM 2012.

まとめ

- 最近, Age of Information (AoI) に関する研究が活発化
 - ◆ 情報の鮮度を定量化する指標
 - ◆ ほとんどが平均値のみに関する議論

本研究では,

- 一般的な状況下で, AoI の分布が満たす関係式を導出
 - ◆ AoI の解析には, ピーク AoI と遅延時間を別々に考察すれば十分であることを示した
- これに基づいて, 先着順処理モデルにおける AoI を解析
- 後着順処理モデルの解析を含むプレプリントは <https://arxiv.org/abs/1804.06139> から入手可能