

M/G/1 待ち行列における 待ち時間制約と滞在時間制約の比較

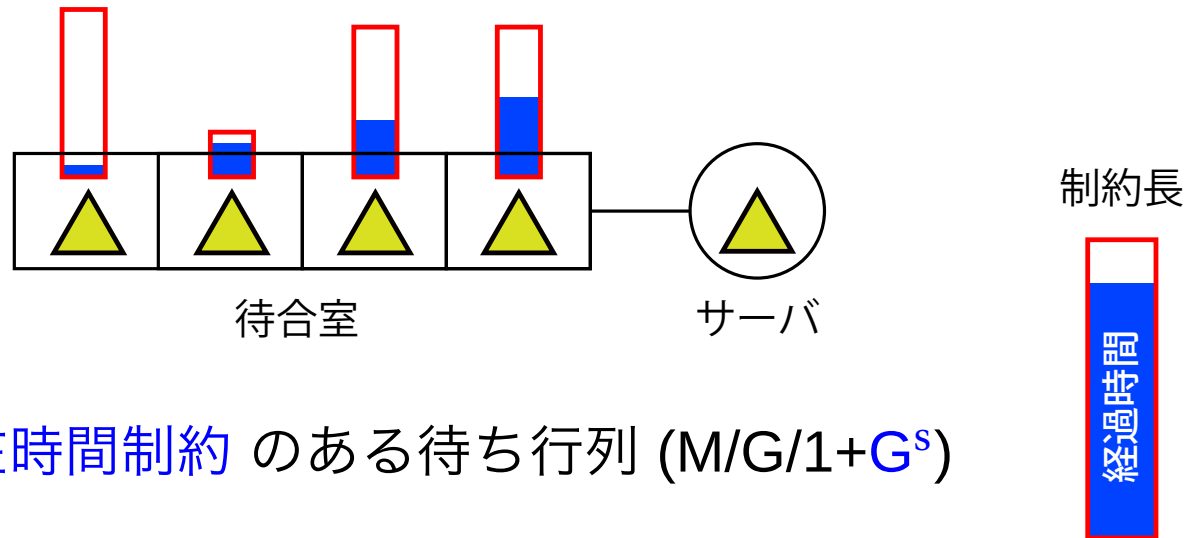
井上 文彰

大阪大学大学院工学研究科

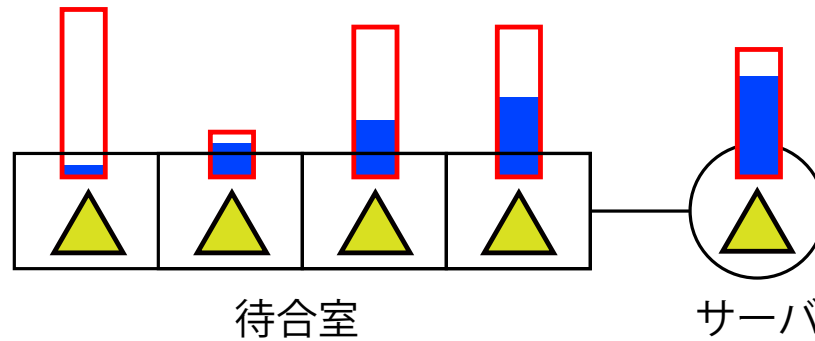
途中退去のある M/G/1 待ち行列

- 途中退去のある 2 種類の M/G/1 待ち行列を考える

- ◆ 待ち時間制約のある待ち行列 ($M/G/1+G^w$)



- ◆ 滞在時間制約のある待ち行列 ($M/G/1+G^s$)



モデル

同一のパラメータをもつ $M/G/1+G^w$ ならびに $M/G/1+G^s$ 待ち行列を考える

- 客は率 λ のポワソン過程に従って到着
- サービス時間は分布関数 $H(x)$ ($x \geq 0$) に従って i.i.d.

◆ $E[H]$: 平均サービス時間

- 制約長は分布関数 $G(x)$ ($x \geq 0$) に従って i.i.d.

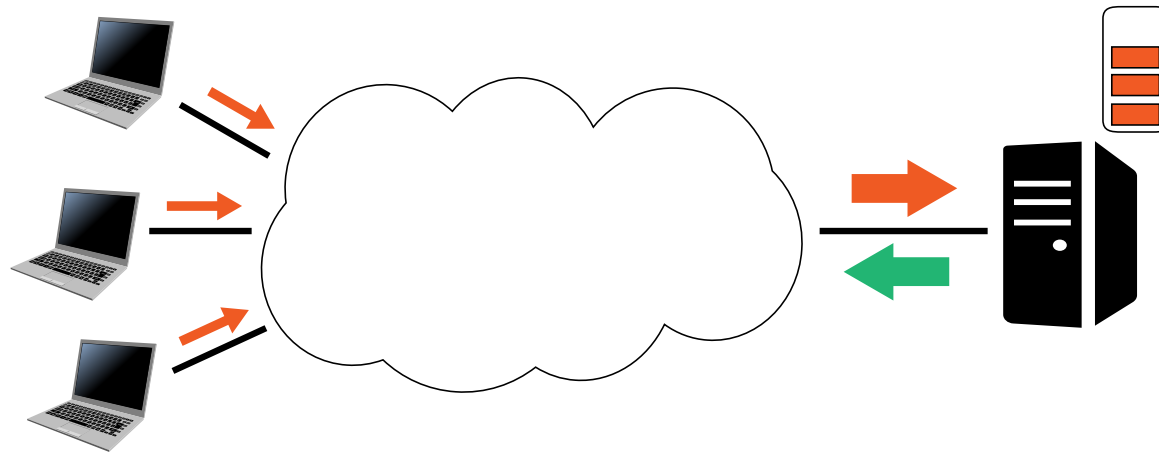
◆ 無限の制約長をもつ客の存在を許す

$$\lim_{x \rightarrow \infty} G(x) = 1 - g_{\infty}, \quad g_{\infty} \in [0, 1)$$

- 安定条件として, $\rho g_{\infty} < 1$ を仮定 ($\rho = \lambda E[H]$)
- 簡単のため, $H(0) = 0$ および $G(0) = 0$ を仮定

例 1) サービスの開始をユーザに知らせる効果

- ユーザはクラウドサーバに計算ジョブの実行を依頼
- 応答待機時間が長すぎるとタイムアウト



Case 1: サービス完了時のみ通知 ➡ 滞在時間が長すぎると途中退去

Case 2: サービス開始時にも通知 ➡ 待ち時間が長すぎると途中退去

例 2) 期限付きパケットの設計

- 車々間無線マルチホップ網

- ◆ 各車両は自身の位置や走行速度をブロードキャスト



- ◆ CSMA/CA によるメディアアクセス制御 (リンク層)

- フレーム衝突が発生すると、バックオフ時間待機

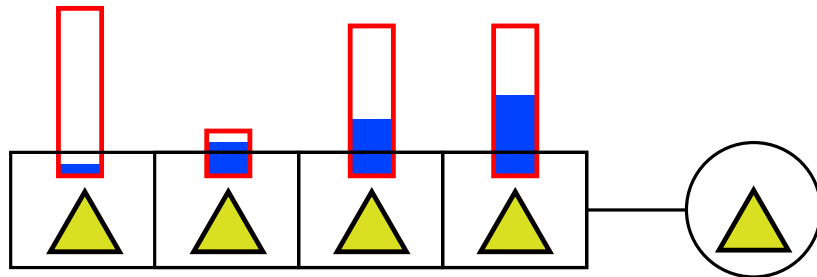
- 古くなった情報は転送せず破棄

Case 1: リンク層には介入しない ➡ 待ち時間が長すぎると途中退去

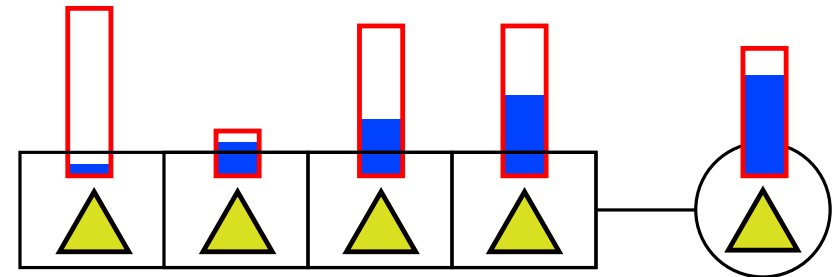
Case 2: バックオフ中でも強制破棄 ➡ 滞在時間が長すぎると途中退去

使用する記法

同一のパラメータをもつ $M/G/1+G^w$ ならびに $M/G/1+G^s$ 待ち行列を考える



$M/G/1+G^w$



$M/G/1+G^s$

- 待ち時間制約モデル: 性能指標の右肩に w を付す

(例) ロス確率 P_{loss}^w , 待ち時間分布 $W^w(x)$, 滞在時間分布 $D^w(x)$

- 滞在時間制約モデル: 性能指標の右肩に s を付す

(例) ロス確率 P_{loss}^s , 待ち時間分布 $W^s(x)$, 滞在時間分布 $D^s(x)$

※ 両方のモデルを一括して表すとき, 肩文字を付けない

先行研究

同一のパラメータをもつ $M/G/1+G^W$ ならびに $M/G/1+G^S$ 待ち行列

- 各モデルの解析結果は古くから知られている [Kovalenko (1961)]
 - ◆ ロス確率 P_{loss} , 待ち時間分布 $W(x)$, 滞在時間分布 $D(x)$
 - 第二種ヴォルテラ積分方程式の解を用いて与えられる (後述)
- 一方で, これらのモデル間に成り立つ関係はほとんど知られていない

関連する結果

- ◆ サービス時間が幾何分布に従う一般の離散時間待ち行列
において $P_{\text{loss}}^W \leq P_{\text{loss}}^S$ が成立 [van Velthoven (2005)]
- ◆ $P_{\text{loss}}^W > P_{\text{loss}}^S$ となる離散時間待ち行列の例 [van Houdt (2003)]

本発表の概要

定常な $M/G/1+G^W$ および $M/G/1+G^S$ 待ち行列の間に成り立つ関係を導出

- 実待ち時間 W , 滞在時間 D

$$W^S =_{\text{st}} [W^W \mid W^W < G], \quad D^S =_{\text{st}} [D^W \mid D^W < G]$$

G : 制約長分布に従う一般の確率変数

- ロス確率 P_{loss}

- ◆ $P_{\text{loss}}^S = \Pr(D^W \geq G)$ ($M/G/1+G^W$ での滞在時間による特徴づけ)

- ◆ 大小関係 $P_{\text{loss}}^W \leq P_{\text{loss}}^S$ が成り立つ十分条件

サービス時間分布が NBUE であるとき $P_{\text{loss}}^W \leq P_{\text{loss}}^S$

加えて, 特別なモデル ($M/M/1+G$, $M/G/1+M$) で得られる結果を考察

M/G/1+G^w および M/G/1+G^s 待ち行列
における性能指標の公式 [Kovalenko (1961)]

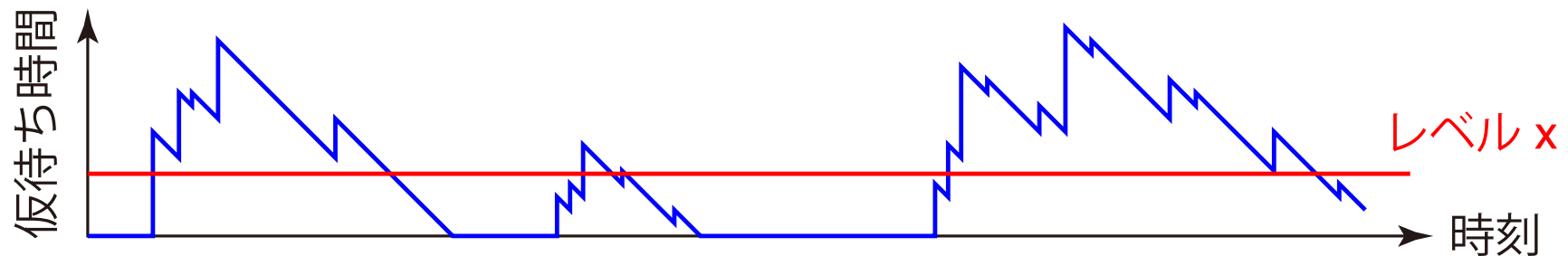
仮待ち時間

仮待ち時間: 無限大の制約長をもつ仮想的な客の待ち時間

$v(x)$: 仮待ち時間分布の密度関数, π_0 : システムが空である確率

- Level-crossing argument: 標本路上において, レベル x を

上向きに 通過する遷移の数 = 下向きに 通過する遷移の数



仮待ち時間

仮待ち時間: 無限大の制約長をもつ仮想的な客の待ち時間

$\nu(x)$: 仮待ち時間分布の密度関数, π_0 : システムが空である確率

- Level-crossing argument: 標本路上において, レベル x を

上向きに 通過する遷移の数 = 下向きに 通過する遷移の数

$$\nu^w(x) = \lambda \pi_0^w \bar{H}(x) + \lambda \int_0^x \nu^w(y) \bar{G}(y) \bar{H}(x-y) dy \quad M/G/1+G^w$$

$$\nu^s(x) = \lambda \pi_0^s \bar{H}(x) \bar{G}(x) + \lambda \int_0^x \nu^s(y) \bar{H}(x-y) \bar{G}(x) dy \quad M/G/1+G^s$$

$\bar{H}(x)$: サービス時間の補分布, $\bar{G}(x)$: 制約長の補分布

仮待ち時間

仮待ち時間: 無限大の制約長をもつ仮想的な客の待ち時間

$\nu(x)$: 仮待ち時間分布の密度関数, π_0 : システムが空である確率

- Level-crossing argument: 標本路上において, レベル x を

上向きに 通過する遷移の数 = 下向きに 通過する遷移の数

$$\nu^w(x) = \lambda \pi_0^w \bar{H}(x) + \lambda \int_0^x \nu^w(y) \bar{G}(y) \bar{H}(x-y) dy \quad M/G/1+G^w$$

$$\nu^s(x) = \lambda \pi_0^s \bar{H}(x) \bar{G}(x) + \lambda \int_0^x \nu^s(y) \bar{H}(x-y) \bar{G}(x) dy \quad M/G/1+G^s$$

$\bar{H}(x)$: サービス時間の補分布, $\bar{G}(x)$: 制約長の補分布

$\nu^w(x)$ と $\nu^s(x)$ は上記の積分方程式と正規化条件

$$\pi_0 + \int_0^\infty \nu(x) dx = 1 \quad \text{から一意に定まる}$$

性能指標 (1)

H : サービス時間, G : 制約時間長, V : 仮待ち時間

PASTA より, 客の到着直前における仮待ち時間は V に等しい

- W : ロスしない客の実待ち時間

$$W^w =_{\text{st}} [V^w \mid V^w < G], \quad W^s =_{\text{st}} [V^s \mid V^s < G]$$

- D : ロスしない客の滞在時間

$$D^w =_{\text{st}} W^w + H, \quad D^s =_{\text{st}} [V^s + H \mid V^s + H < G]$$

- P_{loss} : ロス確率

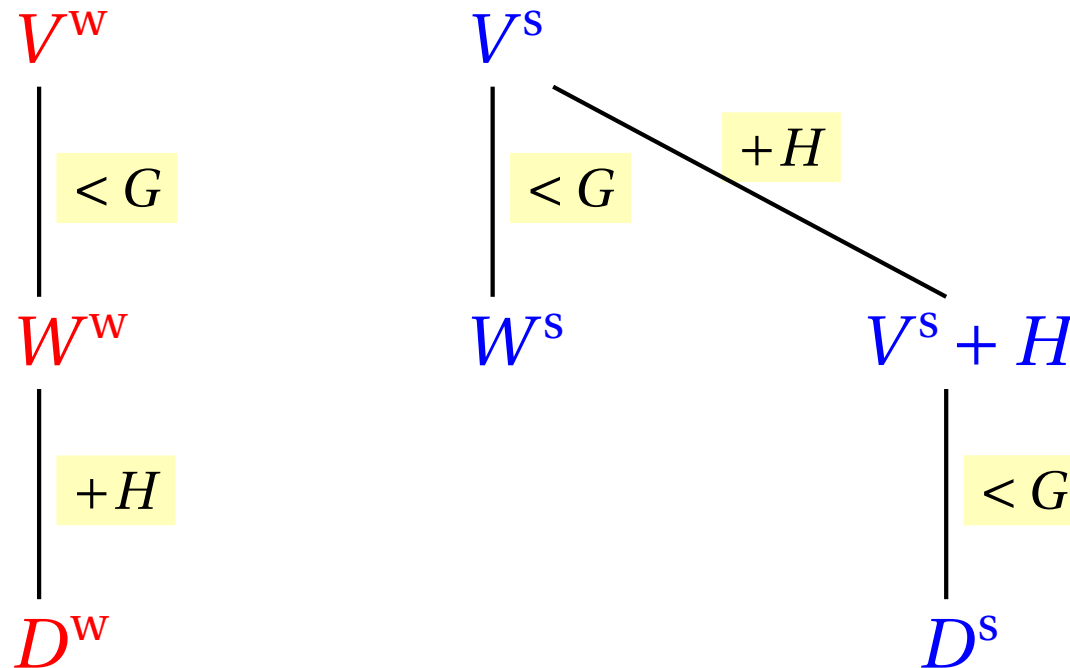
$$P_{\text{loss}}^w = \Pr(V^w \geq G), \quad P_{\text{loss}}^s = \Pr(V^s + H \geq G)$$

※ $P_{\text{loss}}^w = 1 - \frac{1 - \pi_0^w}{\rho}$ が示せる. 一方, P_{loss}^s はこのような単純な式を満たさない

性能指標 (2)

H : サービス時間, G : 制約時間長, V : 仮待ち時間

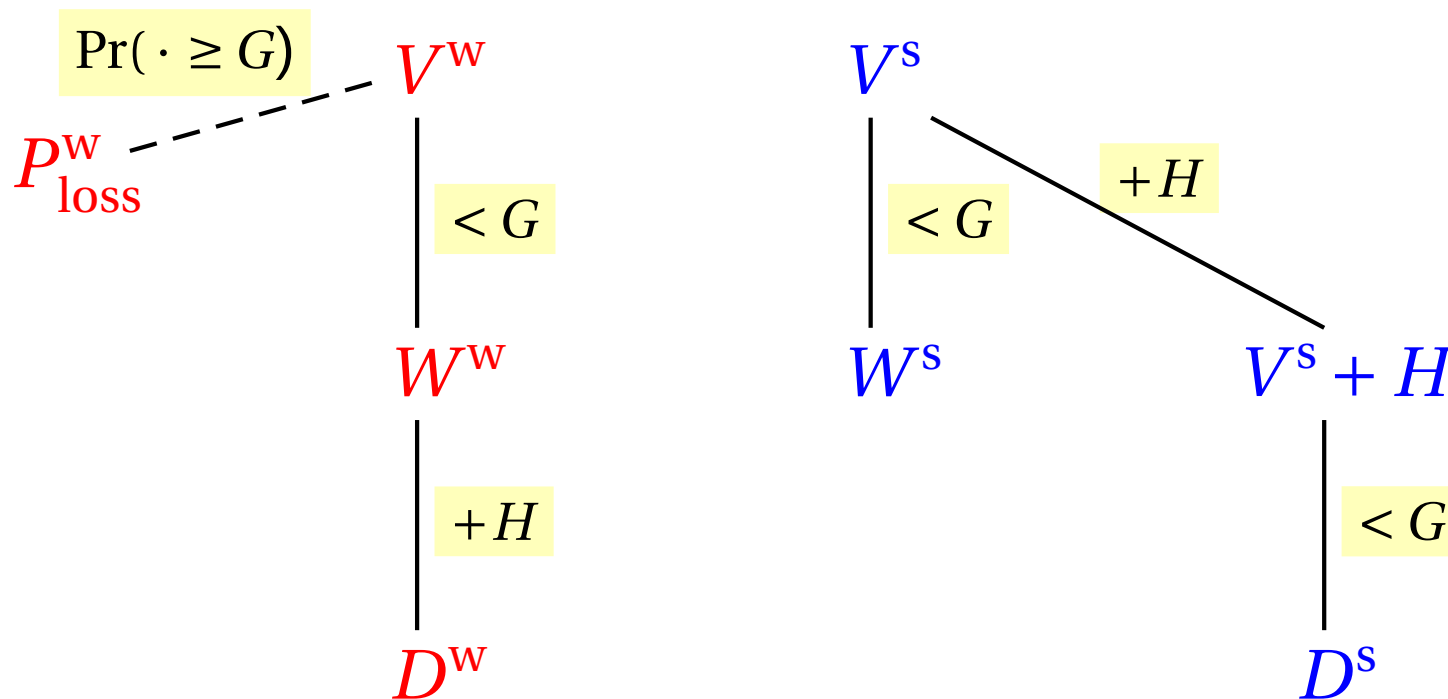
- 各性能指標は仮待ち時間 V を用いて与えられる



性能指標 (2)

H : サービス時間, G : 制約時間長, V : 仮待ち時間

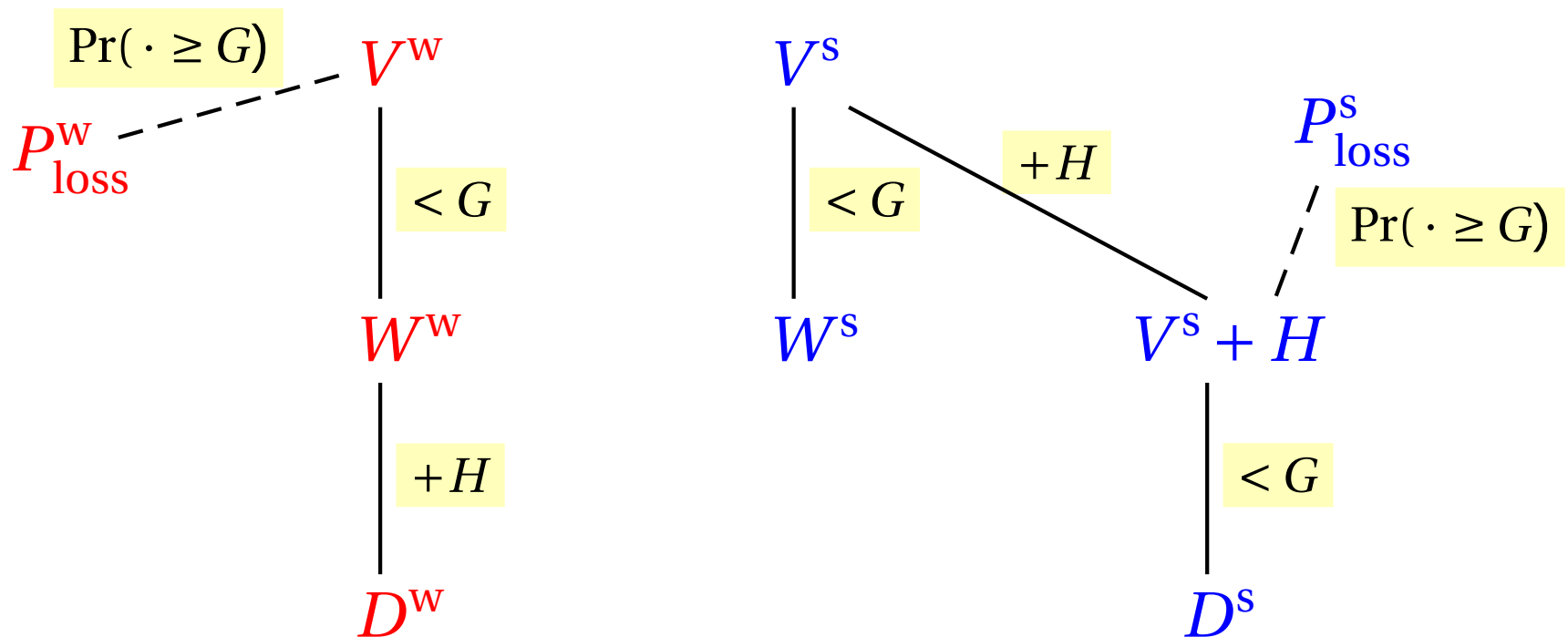
- 各性能指標は仮待ち時間 V を用いて与えられる



性能指標 (2)

H : サービス時間, G : 制約時間長, V : 仮待ち時間

- 各性能指標は仮待ち時間 V を用いて与えられる



$M/G/1+G^w$ 待ち行列と $M/G/1+G^s$ 待ち行列の関係

M/G/1+G^w における実待ち時間

- W: ロスしない客の実待ち時間

◆ $q_0 := \Pr(W = 0)$, $w(x)$: W の密度関数

- M/G/1+G^w 待ち行列では $W^w =_{\text{st}} [V^w \mid V^w < G]$ が成立

$$\Rightarrow q_0^w = \frac{\pi_0^w}{1 - P_{\text{loss}}^w}, \quad w^w(x) = \frac{v^w(x)\bar{G}(x)}{1 - P_{\text{loss}}^w}$$

ここで、下記の関係に注意

$$1 - P_{\text{loss}}^w = \pi_0^w + \int_0^\infty v^w(x)\bar{G}(x)dx$$

$w^w(x)$ が満たす積分方程式

$$v^w(x) = \lambda \pi_0^w \bar{H}(x) + \lambda \int_0^x v^w(y) \bar{G}(y) \bar{H}(x-y) dy \quad \text{M/G/1+G}^w$$

- M/G/1+G^w 待ち行列における実待ち時間 W^w

$$q_0^w = \frac{\pi_0^w}{1 - P_{\text{loss}}^w}, \quad w^w(x) = \frac{v^w(x) \bar{G}(x)}{1 - P_{\text{loss}}^w}$$

- 以上より, $w^w(x)$ は次の積分方程式を満たす

$$w^w(x) = \lambda q_0^w \bar{H}(x) \bar{G}(x) + \lambda \int_0^x w^w(y) \bar{H}(x-y) \bar{G}(x) dy$$

$w^w(x)$ が満たす積分方程式

$$v^w(x) = \lambda \pi_0^w \bar{H}(x) + \lambda \int_0^x v^w(y) \bar{G}(y) \bar{H}(x-y) dy \quad \text{M/G/1+G}^w$$

- M/G/1+G^w 待ち行列における実待ち時間 W^w

$$q_0^w = \frac{\pi_0^w}{1 - P_{\text{loss}}^w}, \quad w^w(x) = \frac{v^w(x) \bar{G}(x)}{1 - P_{\text{loss}}^w}$$

- 以上より, $w^w(x)$ は次の積分方程式を満たす

$$w^w(x) = \lambda q_0^w \bar{H}(x) \bar{G}(x) + \lambda \int_0^x w^w(y) \bar{H}(x-y) \bar{G}(x) dy$$

$w^w(x)$ が満たす積分方程式

$$v^w(x) = \lambda \pi_0^w \bar{H}(x) + \lambda \int_0^x v^w(y) \bar{G}(y) \bar{H}(x-y) dy \quad \text{M/G/1+G}^w$$

- M/G/1+G^w 待ち行列における実待ち時間 W^w

$$q_0^w = \frac{\pi_0^w}{1 - P_{\text{loss}}^w}, \quad w^w(x) = \frac{v^w(x) \bar{G}(x)}{1 - P_{\text{loss}}^w}$$

- 以上より, $w^w(x)$ は次の積分方程式を満たす

$$w^w(x) = \lambda q_0^w \bar{H}(x) \bar{G}(x) + \lambda \int_0^x w^w(y) \bar{H}(x-y) \bar{G}(x) dy$$

これは次式と同一の積分方程式

$$v^s(x) = \lambda \pi_0^s \bar{H}(x) \bar{G}(x) + \lambda \int_0^x v^s(y) \bar{H}(x-y) \bar{G}(x) dy \quad \text{M/G/1+G}^s$$

$w^w(x)$ が満たす積分方程式

$$v^w(x) = \lambda \pi_0^w \bar{H}(x) + \lambda \int_0^x v^w(y) \bar{G}(y) \bar{H}(x-y) dy \quad \text{M/G/1+G}^w$$

- M/G/1+G^w 待ち行列における実待ち時間 W^w

$$q_0^w = \frac{\pi_0^w}{1 - P_{\text{loss}}^w}, \quad w^w(x) = \frac{v^w(x) \bar{G}(x)}{1 - P_{\text{loss}}^w}$$

- 以上より, $w^w(x)$ は次の積分方程式を満たす

$$w^w(x) = \lambda q_0^w \bar{H}(x) \bar{G}(x) + \lambda \int_0^x w^w(y) \bar{H}(x-y) \bar{G}(x) dy$$

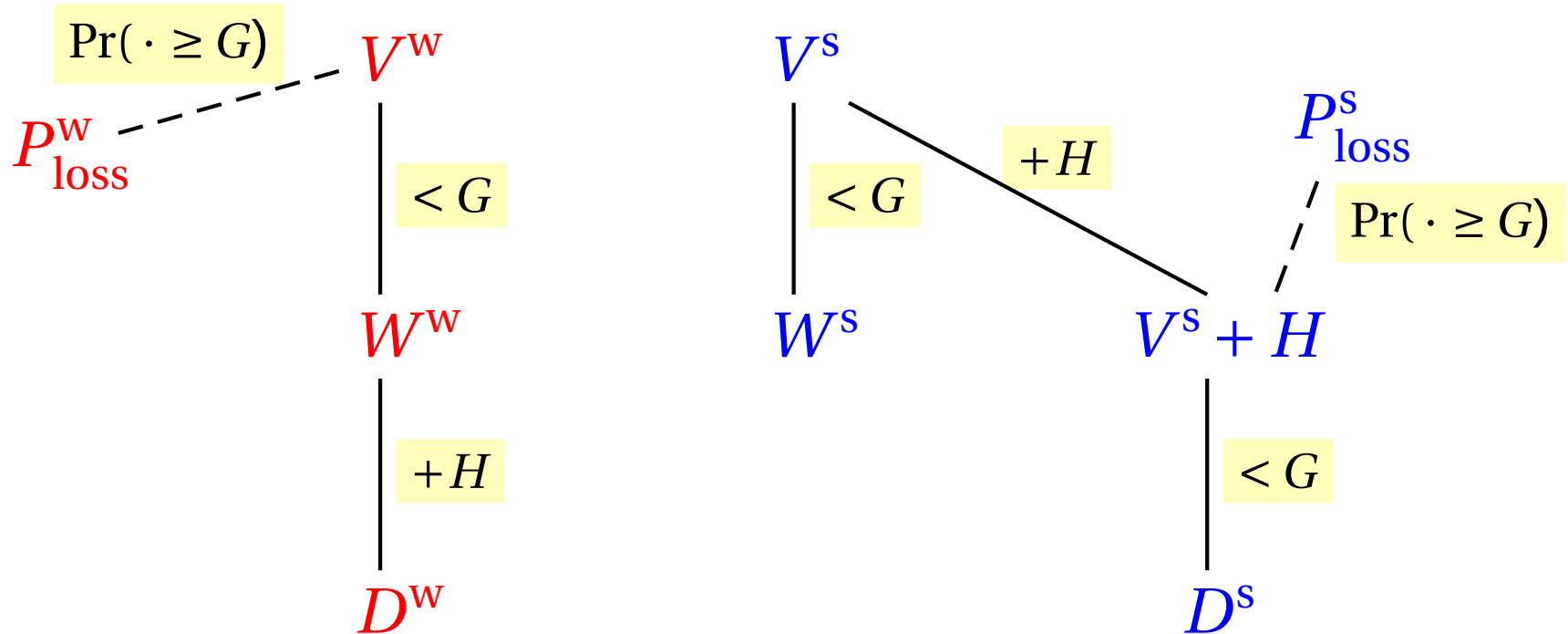
これは次式と同一の積分方程式

$$v^s(x) = \lambda \pi_0^s \bar{H}(x) \bar{G}(x) + \lambda \int_0^x v^s(y) \bar{H}(x-y) \bar{G}(x) dy \quad \text{M/G/1+G}^s$$

したがって, $V^s =_{\text{st}} W^w$ が成立

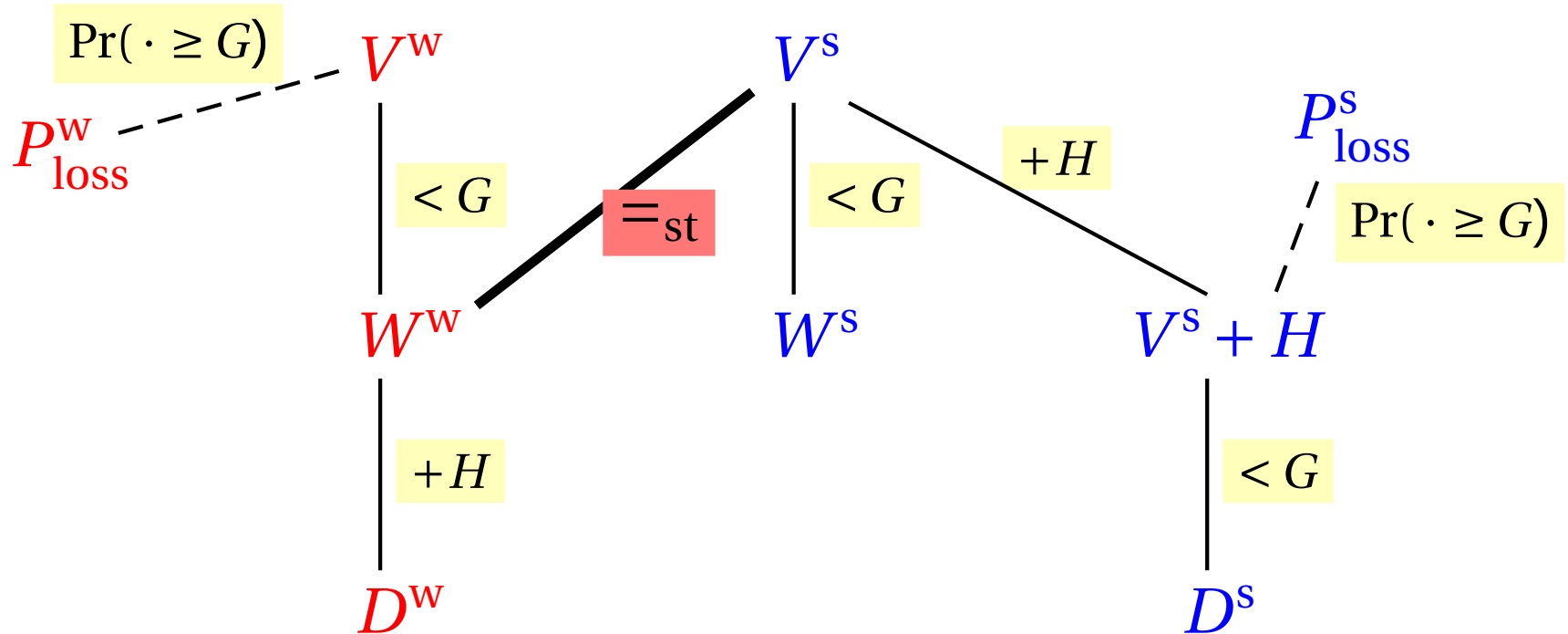
M/G/1+G^w と M/G/1+G^s の関係

H : サービス時間, G : 制約時間長, V : 仮待ち時間



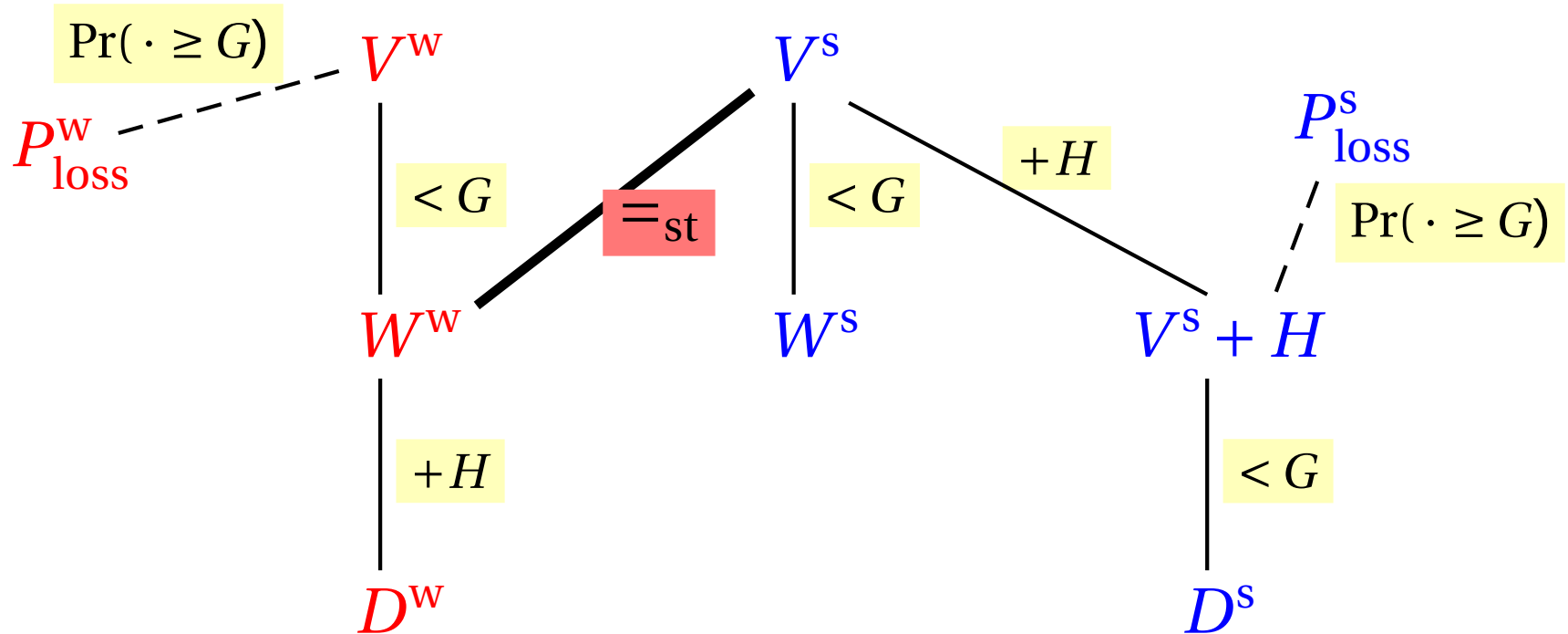
M/G/1+G^w と M/G/1+G^s の関係

H : サービス時間, G : 制約時間長, V : 仮待ち時間



M/G/1+G^w と M/G/1+G^s の関係

H : サービス時間, G : 制約時間長, V : 仮待ち時間

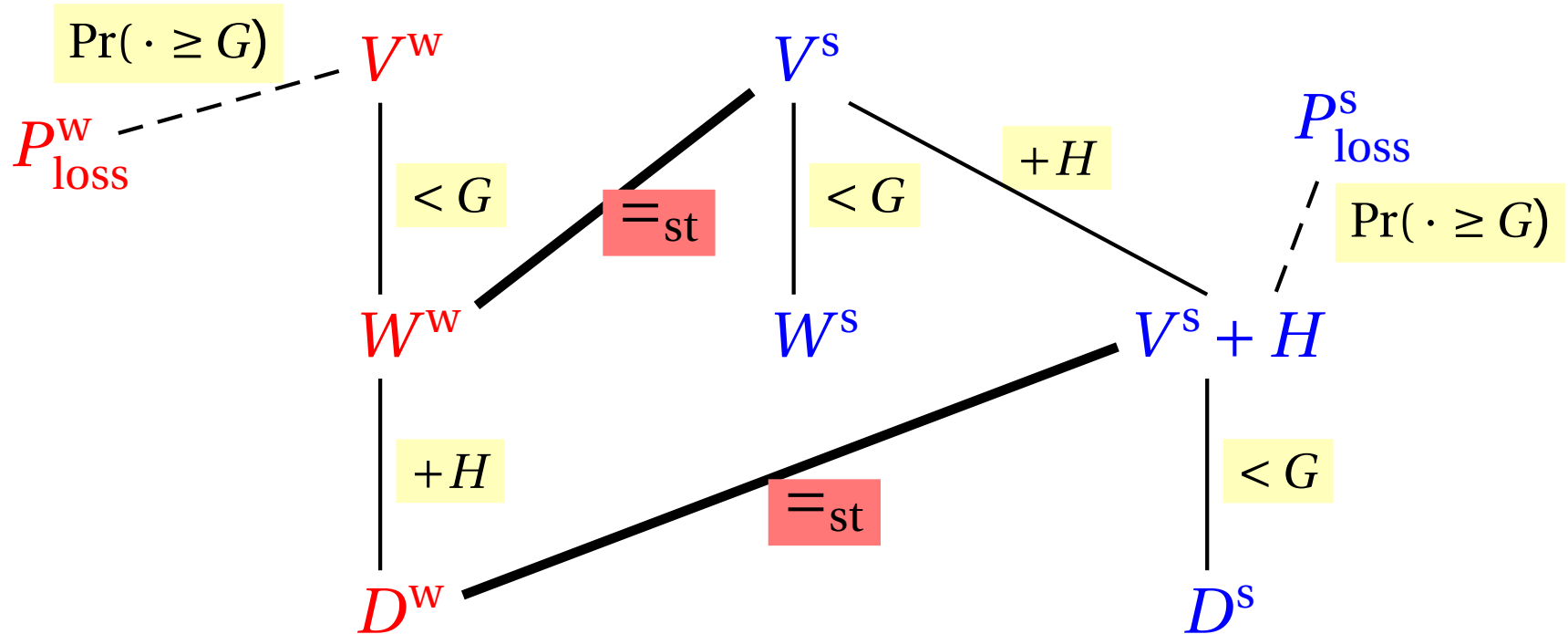


● したがって, 次式が成立

$$V^s =_{st} [V^w \mid V^w < G], \quad W^s =_{st} [W^w \mid W^w < G], \quad D^s =_{st} [D^w \mid D^w < G]$$

M/G/1+G^w と M/G/1+G^s の関係

H : サービス時間, G : 制約時間長, V : 仮待ち時間

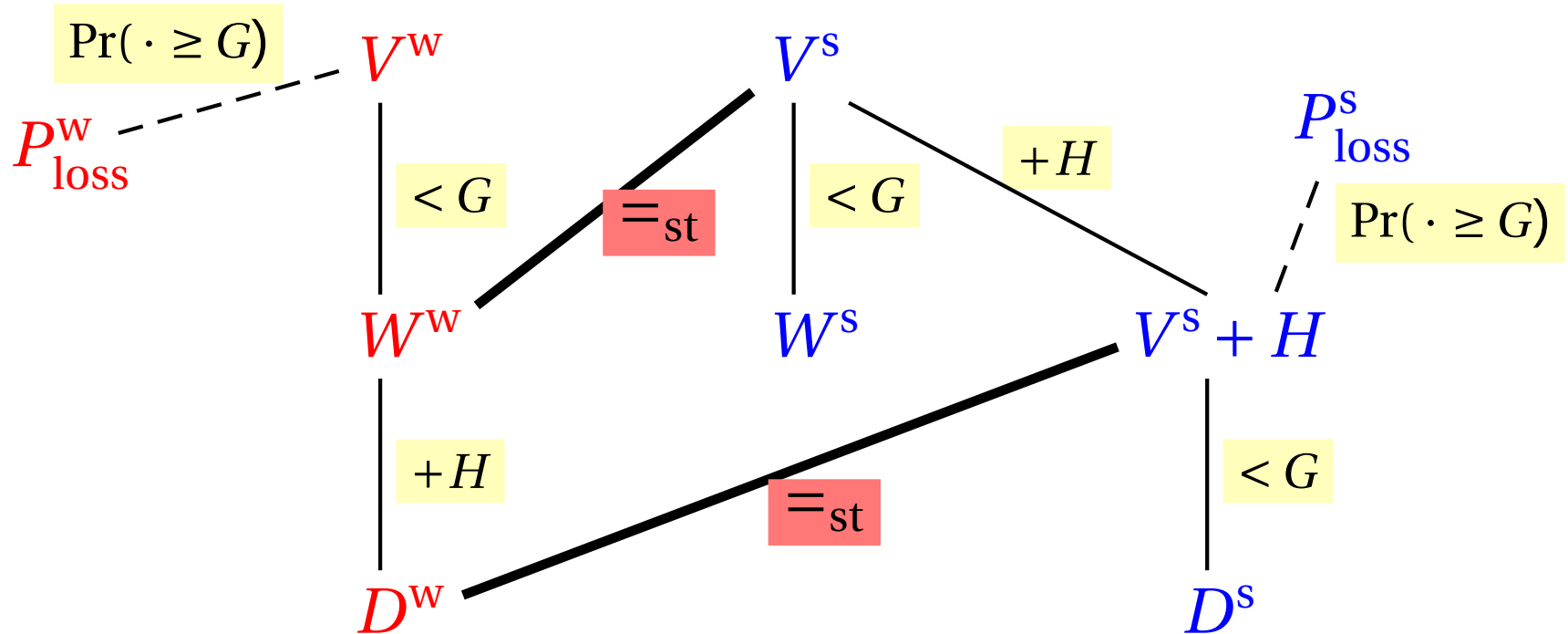


● したがって、次式が成立

$$V^s =_{st} [V^w \mid V^w < G], \quad W^s =_{st} [W^w \mid W^w < G], \quad D^s =_{st} [D^w \mid D^w < G]$$

M/G/1+G^w と M/G/1+G^s の関係

H : サービス時間, G : 制約時間長, V : 仮待ち時間

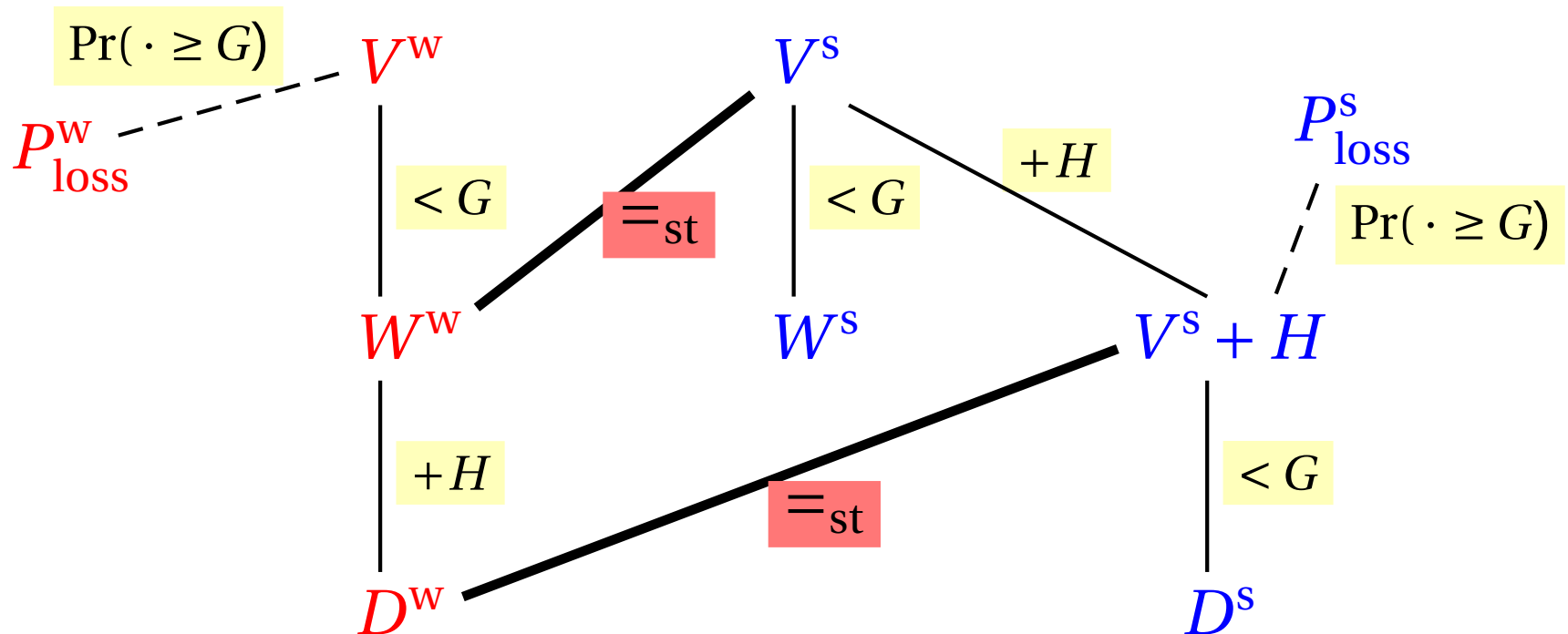


● したがって, 次式が成立

$$V^s =_{\text{st}} [V^w \mid V^w < G], \quad W^s =_{\text{st}} [W^w \mid W^w < G], \quad D^s =_{\text{st}} [D^w \mid D^w < G]$$

➡ $V^s \leq_{\text{st}} V^w, \quad W^s \leq_{\text{st}} W^w, \quad D^s \leq_{\text{st}} D^w$ ($\leq_{\text{st}}$ は通常確率順序)

M/G/1+G^s におけるロス確率



さらに, $P_{loss}^s = \Pr(D^w \geq G)$ が成立

➡ M/G/1+G^s 待ち行列におけるロス確率 P_{loss}^s
 = M/G/1+G^w 待ち行列における $\Pr(\text{滞在時間} \geq \text{制約長})$

条件付き仮待ち時間 $[V^w \mid V^w > 0]$ (1)

$$v^w(x) = \lambda \pi_0^w \bar{H}(x) + \lambda \int_0^x v^w(y) \bar{G}(y) \bar{H}(x-y) dy \quad \text{M/G/1+G}^w$$

- 上式は、次のように書き換えられる

$$\begin{aligned} \frac{v^w(x)}{1 - \pi_0^w} &= \frac{\rho \pi_0^w \tilde{h}(x)}{1 - \pi_0^w} + \frac{\rho}{1 - \pi_0^w} \int_0^x v^w(y) \bar{G}(y) \tilde{h}(x-y) dy \\ &= q_0^w \tilde{h}(x) + \int_0^x w^w(y) \tilde{h}(x-y) dy \end{aligned}$$

$\tilde{h}(x) = \frac{\bar{H}(x)}{E[H]}$: 平衡サービス時間 $\tilde{H}$ の密度関数

- したがって,

$$[V^w \mid V^w > 0] =_{\text{st}} W^w + \tilde{H}$$

条件付き仮待ち時間 $[V^w \mid V^w > 0]$ (2)

$$1 - P_{\text{loss}}^w = \frac{1 - \pi_0^w}{\rho} \quad M/G/1+G^w$$

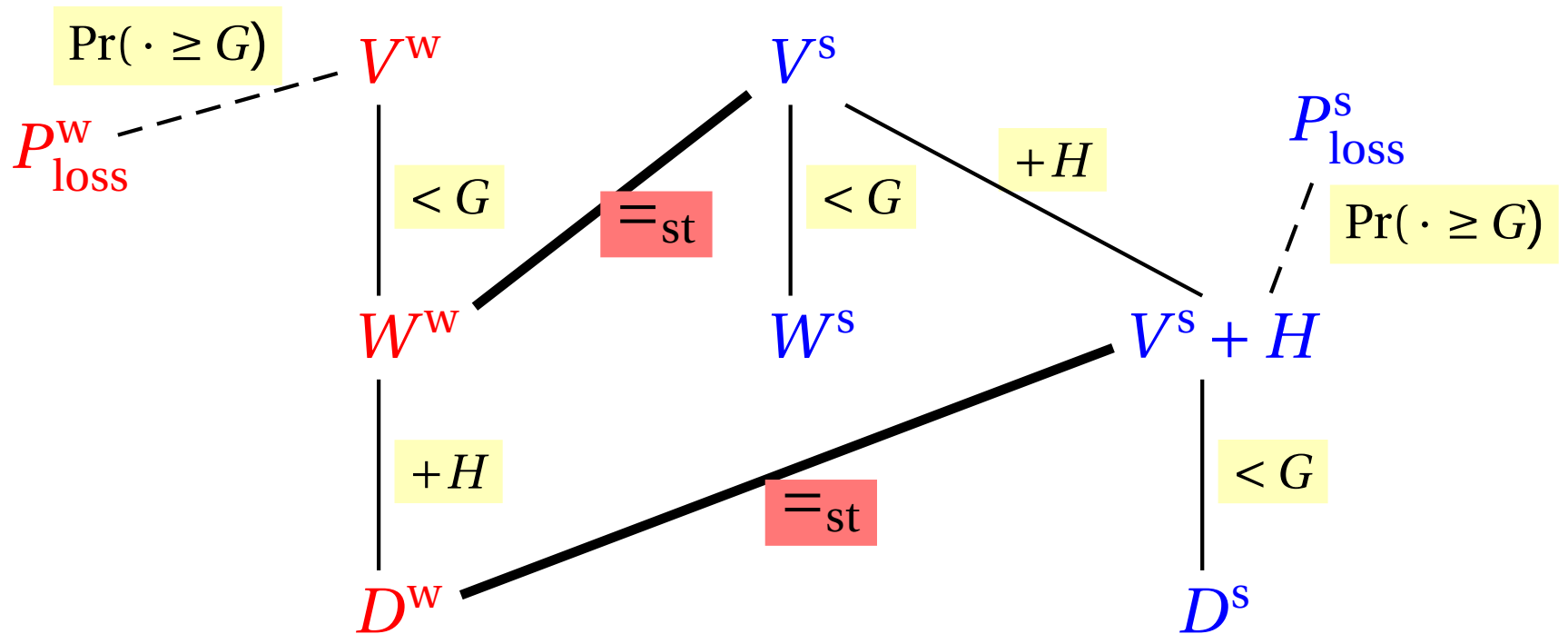
- $[V^w \mid V^w > 0] =_{\text{st}} W^w + \tilde{H}$
- 一方で, $G(0) = 0$ という仮定より

$$\begin{aligned} P_{\text{loss}}^w &= (1 - \pi_0^w) \Pr(V^w \geq G \mid V^w > 0) \\ &= \rho(1 - P_{\text{loss}}^w) \Pr(V^w \geq G \mid V^w > 0) \end{aligned}$$

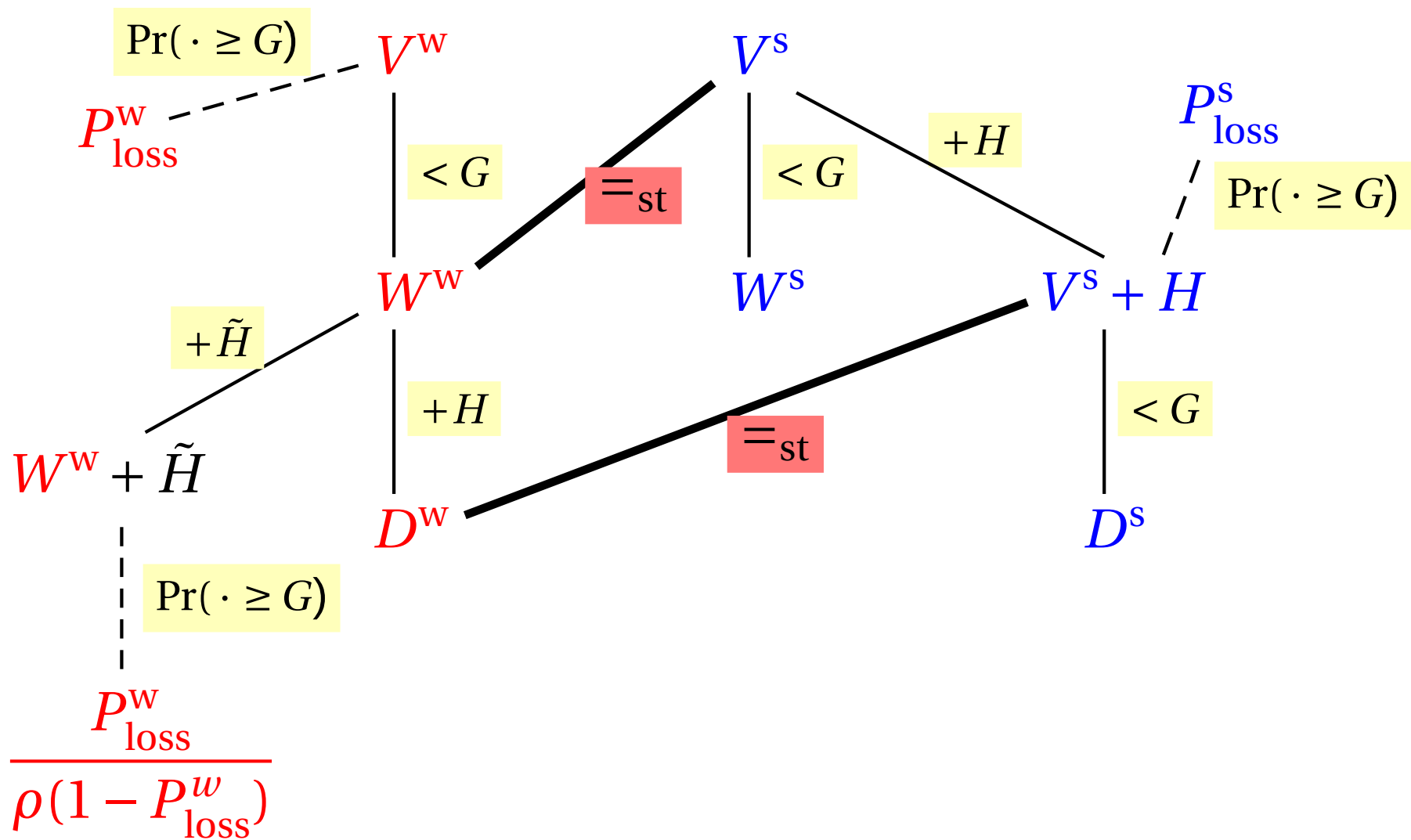
- したがって,

$$\frac{P_{\text{loss}}^w}{\rho(1 - P_{\text{loss}}^w)} = \Pr(V^w \geq G \mid V^w > 0) = \Pr(W^w + \tilde{H} \geq G)$$

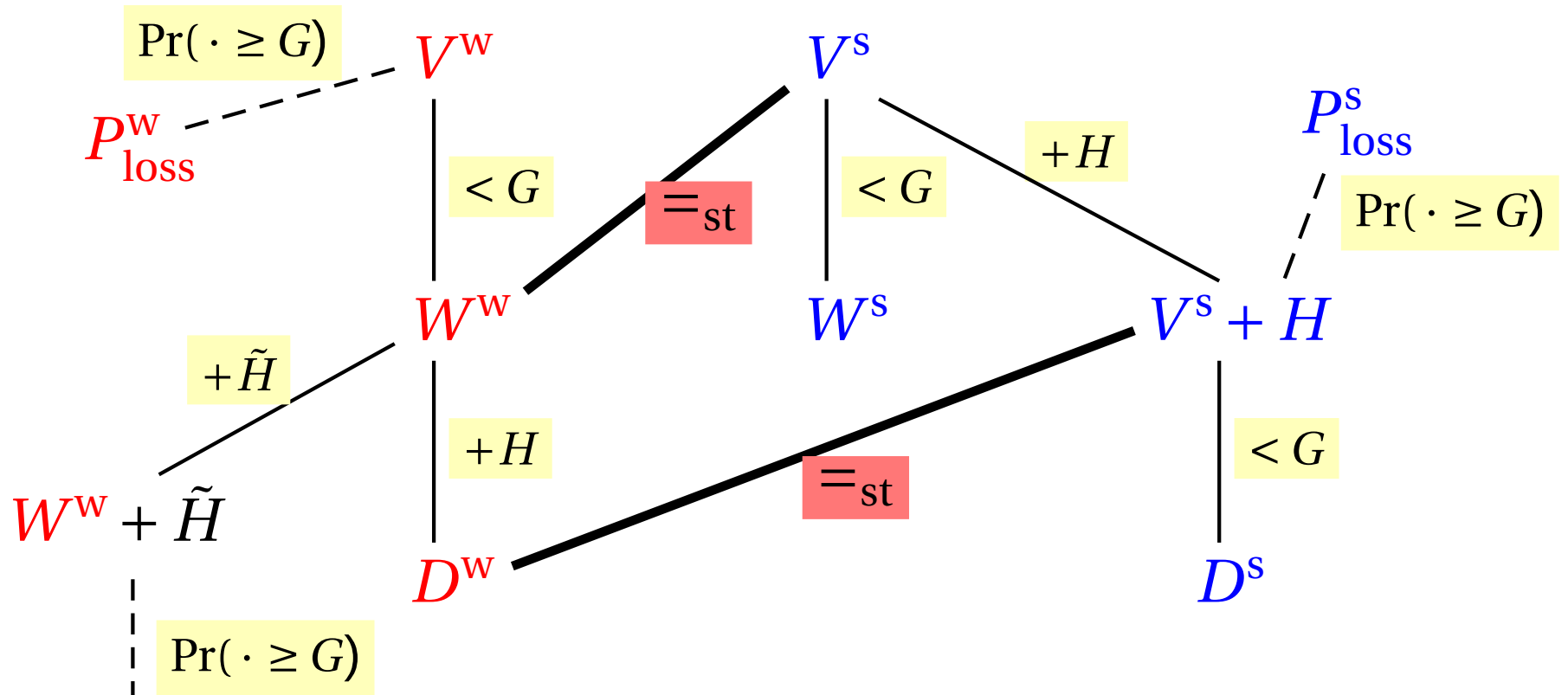
P_{loss}^w と P_{loss}^s の関係 (1)



P_{loss}^w と P_{loss}^s の関係 (1)



P_{loss}^w と P_{loss}^s の関係 (1)



すなわち,

$$\frac{P_{\text{loss}}^w}{\rho(1 - P_{\text{loss}}^w)}$$

$$P_{\text{loss}}^s = \Pr(W^w + H \geq G)$$

$$\frac{P_{\text{loss}}^w}{\rho(1 - P_{\text{loss}}^w)} = \Pr(W^w + \tilde{H} \geq G)$$

P_{loss}^w と P_{loss}^s の関係 (2)

$$\frac{P_{\text{loss}}^w}{\rho(1 - P_{\text{loss}}^w)} = \Pr(W^w + \tilde{H} \geq G), \quad P_{\text{loss}}^s = \Pr(W^w + H \geq G)$$

- サービス時間 H が NBUE (New better than used in expectation)

$$E[H - t \mid H \geq t] \leq E[H], \quad \forall t \geq 0$$

- ◆ これは次式と同値 [Shaked and Shanthikumar (2007)]

$$\tilde{H} \leq_{\text{st}} H$$

- よって, H が NBUE であるとき

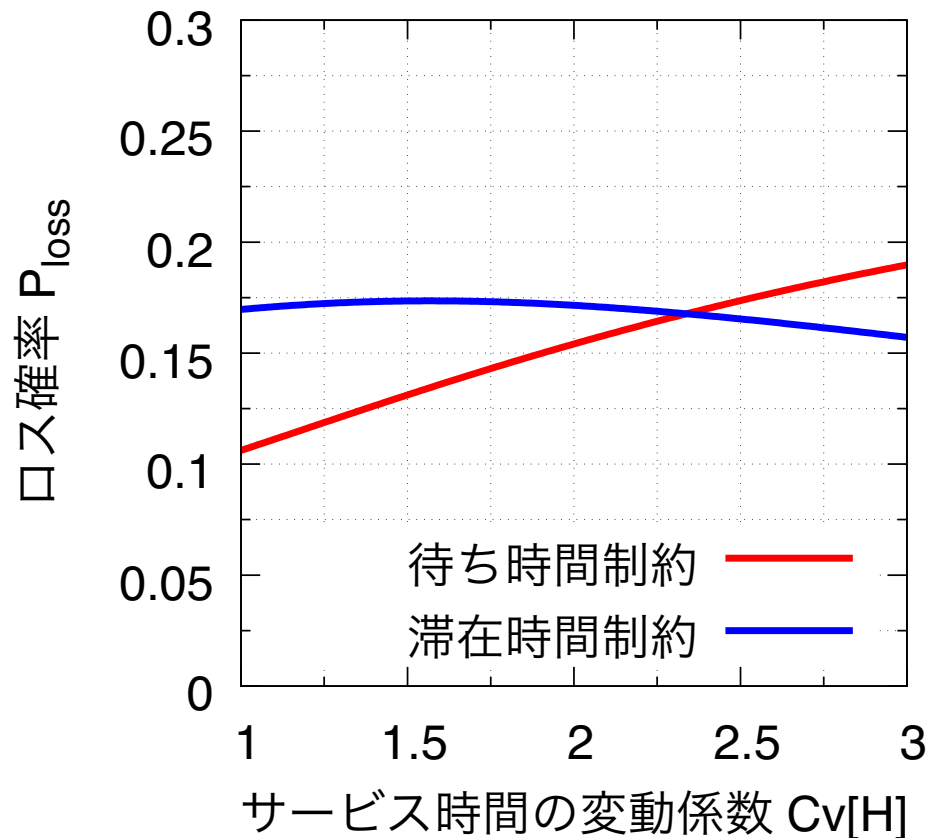
$$\Pr(W^w + \tilde{H} \geq G) \leq \Pr(W^w + H \geq G)$$

➡ $\rho(1 - P_{\text{loss}}^w) = 1 - \pi_0^w < 1$ に注意すると, $P_{\text{loss}}^w \leq P_{\text{loss}}^s$ を得る

数値例 (M/H₂/1+M)

サービス時間: 平衡超指数分布, 制約長: 指数分布
($\lambda = 0.7$, $E[H] = 1.0$, $E[G] = 10$)

- サービス時間の変動係数 $Cv[H]$ とロス確率 P_{loss} の関係



◆ 待ち時間制約のある場合

- $Cv[H]$ の増加に伴って P_{loss}^w は単調に増加

◆ 滞在時間制約のある場合

- $Cv[H]$ が比較的小さい時 P_{loss}^s は単調に増加
- $Cv[H]$ が大きくなると P_{loss}^s は減少に転じる

➡ $Cv[H]$ が大きいとき $P_{\text{loss}}^w \geq P_{\text{loss}}^s$

特別な場合: サービス時間が指数分布に従うモデル

$$P_{\text{loss}}^s = \Pr(W^w + H \geq G), \quad \frac{P_{\text{loss}}^w}{\rho(1 - P_{\text{loss}}^w)} = \Pr(W^w + \tilde{H} \geq G)$$

- $M/M/1+G^w$ ならびに $M/M/1+G^s$ 待ち行列
- サービス時間は平均 $1/\mu$ の指数分布に従う

$$H(x) = 1 - e^{-\mu x}, \quad x \geq 0$$

- 指数分布の無記憶性から次式が成り立つ

$$\tilde{H} =_{\text{st}} H$$

- したがって, 次式を得る

$$P_{\text{loss}}^s = \frac{P_{\text{loss}}^w}{\rho(1 - P_{\text{loss}}^w)}$$

特別な場合: 制約長が指数分布に従うモデル

$$P_{\text{loss}}^s = \Pr(W^w + H \geq G), \quad \frac{P_{\text{loss}}^w}{\rho(1 - P_{\text{loss}}^w)} = \Pr(W^w + \tilde{H} \geq G)$$

- $M/G/1+M^w$ ならびに $M/G/1+M^s$ 待ち行列
- 制約長は平均 $1/\gamma$ の指数分布に従う

$$G(x) = 1 - e^{-\gamma x} \quad x \geq 0$$

- このとき, 上式は次のように書き換えられる ($\mathcal{L}[X](s)$: X の LST)

$$P_{\text{loss}}^s = 1 - \mathcal{L}[W^w](\gamma) \cdot \mathcal{L}[H](\gamma), \quad \frac{P_{\text{loss}}^w}{\rho(1 - P_{\text{loss}}^w)} = 1 - \mathcal{L}[W^w](\gamma) \cdot \mathcal{L}[\tilde{H}](\gamma)$$

- したがって, 次式を得る

$$P_{\text{loss}}^s = 1 - \frac{\mathcal{L}[H](\gamma)}{\mathcal{L}[\tilde{H}](\gamma)} \left(1 - \frac{P_{\text{loss}}^w}{\rho(1 - P_{\text{loss}}^w)} \right)$$

まとめ

定常な $M/G/1+G^w$ および $M/G/1+G^s$ 待ち行列の間に成り立つ関係を導出

- 仮待ち時間 V , 実待ち時間 W , 滞在時間 D

$$V^s =_{\text{st}} [V^w \mid V^w < G], \quad W^s =_{\text{st}} [W^w \mid W^w < G], \quad D^s =_{\text{st}} [D^w \mid D^w < G]$$

G : 制約長分布に従う一般の確率変数

- ロス確率 P_{loss}

- ◆ $P_{\text{loss}}^s = \Pr(D^w \geq G)$ ($M/G/1+G^w$ での滞在時間による特徴づけ)

- ◆ 大小関係 $P_{\text{loss}}^w \leq P_{\text{loss}}^s$ が成り立つ十分条件

サービス時間分布が NBUE であるとき $P_{\text{loss}}^w \leq P_{\text{loss}}^s$

特別なモデル ($M/M/1+G$, $M/G/1+M$) では P_{loss}^w と P_{loss}^s は単純な関係を満たす