

無限サーバ待ち行列モデルにおける
Age of Information の解析

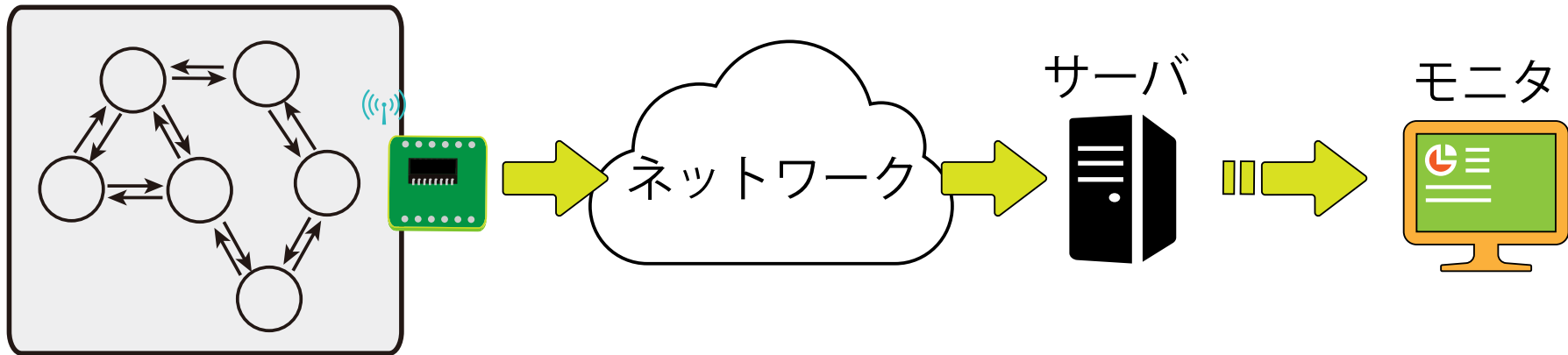
井上 文章

大阪大学大学院工学研究科

遠隔モニタリングシステム

- 時間変化する情報源の状態をリアルタイムに監視

情報源 (確率過程)



- ◆ モニタは受信した最新情報を表示

(例) 自動運転車ネットワーク, IoT センサネットワーク,
産業用ロボット, 気象レーダシステム, クラウドゲーム など

Age of Information (AoI)

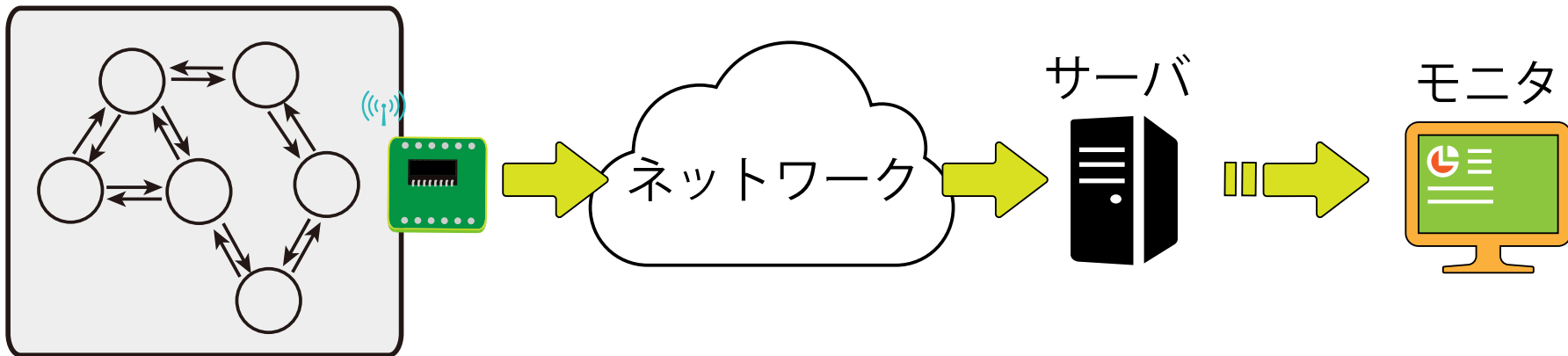
- Age of Information (AoI)^[1,2]

- ◆ モニタ表示の情報鮮度を定量化する指標

[1] S. Kaul et al. *Proc. of IEEE SECON 2011*, 2011.

[2] S. Kaul et al. *Proc. of IEEE INFOCOM 2012*, 2012.

情報源 (確率過程)



Age of Information (AoI)

- Age of Information (AoI)^[1,2]

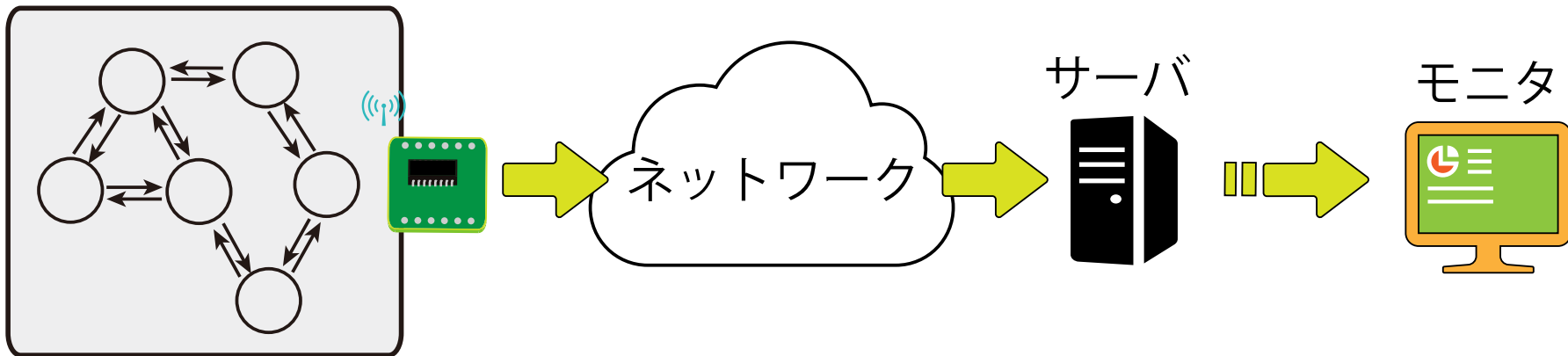
 - ◆ モニタ表示の情報鮮度を定量化する指標

- 時刻 t における AoI A_t は次式で定義される

$$A_t := t - \eta_t, \quad t \in \mathbb{R}$$

η_t : 時刻 t においてモニタに表示中の情報のタイムスタンプ

情報源 (確率過程)



Age of Information (AoI)

- Age of Information (AoI)^[1,2]

- ◆ モニタ表示の情報鮮度を定量化する指標

- 時刻 t における AoI A_t は次式で定義される

$$A_t := t - \eta_t, \quad t \in \mathbb{R}$$

η_t : 時刻 t においてモニタに表示中の情報のタイムスタンプ

言い換えると,

$\eta_t = t - A_t \Rightarrow$ 時刻 t に表示中の情報は時間 A_t だけ古い

Age of Information (AoI)

- Age of Information (AoI)^[1,2]

- ◆ モニタ表示の情報鮮度を定量化する指標

- 時刻 t における AoI A_t は次式で定義される

$$A_t := t - \eta_t, \quad t \in \mathbb{R}$$

η_t : 時刻 t においてモニタに表示中の情報のタイムスタンプ

言い換えると,

$\eta_t = t - A_t \Rightarrow$ 時刻 t に表示中の情報は時間 A_t だけ古い

- 近年, AoI に関する研究が非常に活発化

参考: Yin Sun, The Ongoing History of the Age of Information

<http://webhome.auburn.edu/~yzs0078/AoI.html>

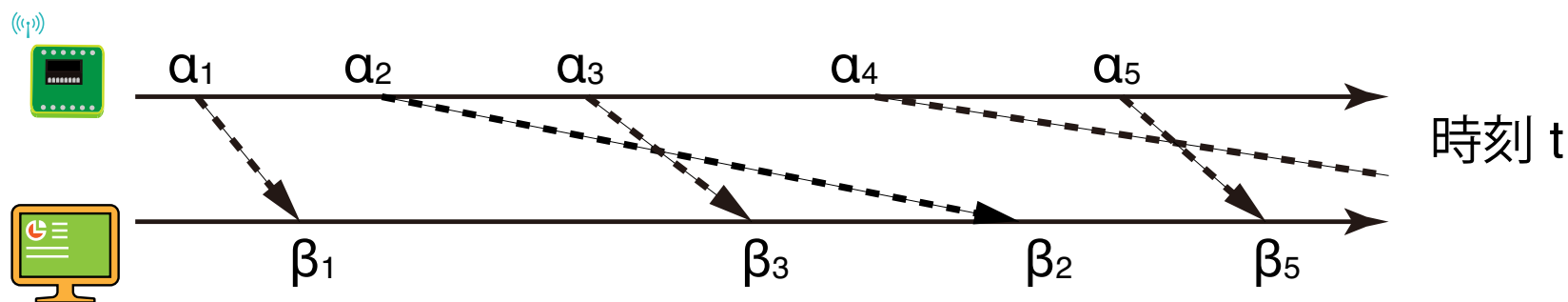
AoI に対する一般的な定式化 (1)

G_n : センサにおける $n-1$ 番目と n 番目の更新情報の生成間隔

D_n : n 番目の更新情報のシステム遅延

- n 番目の更新情報は時刻 $t = \alpha_n$ に生成され, $t = \beta_n$ に受信される

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + G_n, \quad \beta_n = \alpha_n + D_n$$



AoI に対する一般的な定式化 (1)

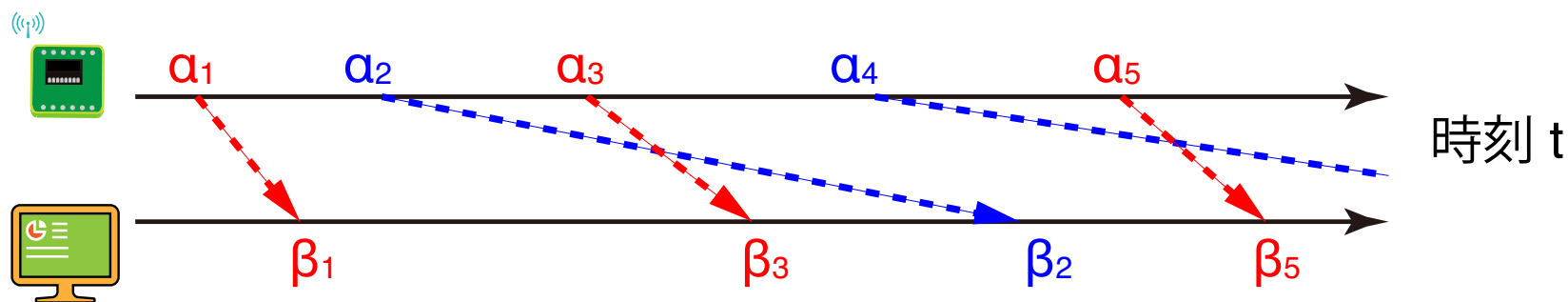
G_n : センサにおける $n-1$ 番目と n 番目の更新情報の生成間隔

D_n : n 番目の更新情報のシステム遅延

- n 番目の更新情報は時刻 $t = \alpha_n$ に生成され, $t = \beta_n$ に受信される

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + G_n, \quad \beta_n = \alpha_n + D_n$$

- 追い抜かれた更新情報は受信時に破棄
- ◆ 追い抜かれなかった更新情報は有効であると言う



AoI に対する一般的な定式化 (1)

G_n : センサにおける $n-1$ 番目と n 番目の更新情報の生成間隔

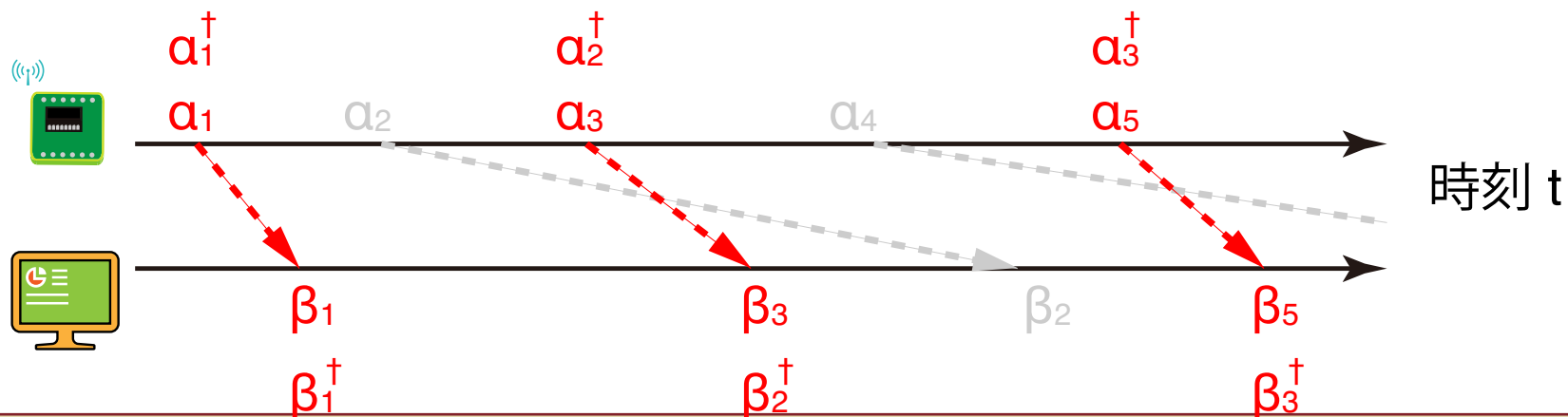
D_n : n 番目の更新情報のシステム遅延

- n 番目の更新情報は時刻 $t = \alpha_n$ に生成され, $t = \beta_n$ に受信される

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + G_n, \quad \beta_n = \alpha_n + D_n$$

- 追い抜かれた更新情報は受信時に破棄

- ◆ 追い抜かれなかった更新情報は有効であると言う



AoI に対する一般的な定式化 (1)

G_n : センサにおける $n-1$ 番目と n 番目の更新情報の生成間隔

D_n : n 番目の更新情報のシステム遅延

- n 番目の更新情報は時刻 $t = \alpha_n$ に生成され, $t = \beta_n$ に受信される

$$\alpha_n = \alpha_{n-1} + G_n, \quad \beta_n = \alpha_n + D_n$$

- 追い抜かれた更新情報は受信時に破棄

◆ 追い抜かれなかった更新情報は有効であると言う

- AoI 過程は有効な更新情報に関する系列で完全に特徴づけられる

$$\text{生成時刻: } (\alpha_\ell^\dagger)_{\ell \in \mathbb{Z}} := (\alpha_n)_{n \in I} \quad \text{受信時刻: } (\beta_\ell^\dagger)_{\ell \in \mathbb{Z}} := (\beta_n)_{n \in I}$$

- ◆ 有効な更新情報の集合 $I := \{n; \beta_n < \min\{\beta_{n+1}, \beta_{n+2}, \dots\}\}$

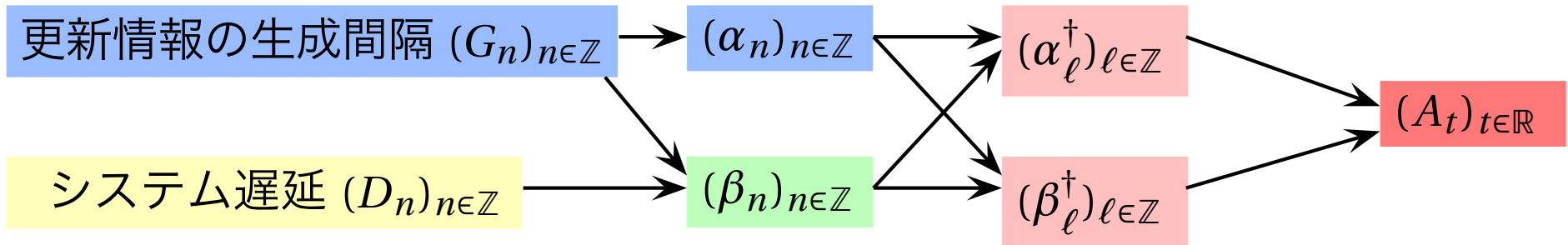
AoI に対する一般的な定式化 (2)

α_ℓ^\dagger : ℓ 番目の有効な更新情報の生成時刻

β_ℓ^\dagger : ℓ 番目の有効な更新情報の受信時刻

- 時刻 $t \in \mathbb{R}$ における AoI A_t は次式で与えられる

$$A_t = t - \alpha_\ell^\dagger, \quad \text{for } t \in [\beta_\ell^\dagger, \beta_{\ell+1}^\dagger), \quad \ell \in \mathbb{Z}$$



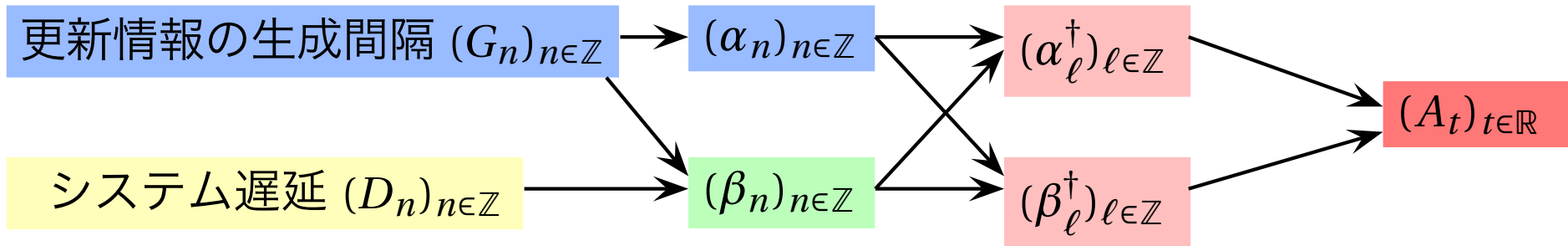
Aol に対する一般的な定式化 (2)

α_ℓ^\dagger : ℓ 番目の有効な更新情報の生成時刻

β_ℓ^\dagger : ℓ 番目の有効な更新情報の受信時刻

- 時刻 $t \in \mathbb{R}$ における Aol A_t は次式で与えられる

$$A_t = t - \alpha_\ell^\dagger, \quad \text{for } t \in [\beta_\ell^\dagger, \beta_{\ell+1}^\dagger), \quad \ell \in \mathbb{Z}$$



Aol 研究における主要な問題設定 (のひとつ)

$(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ と $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ の従う確率法則が与えられた下で、
Aol 過程の時間平均値や確率分布を特徴づける

AoI 解析と待ち行列モデル

- $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は通常, i.i.d. 確率変数列をなすと仮定される

例 1) $G_n = \text{const.}$ 等間隔サンプリング

例 2) $G_n \sim \text{EXP}(\lambda)$ ポワソンランダムサンプリング

AoI 解析と待ち行列モデル

- $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は通常, i.i.d. 確率変数列をなすと仮定される
- システム遅延 $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ に対するモデル化の枠組み
 - ◆ 単一サーバ待ち行列モデル
 - 資源競合を定式化
 - $D_n = [\text{サービス時間 } H_n] + [\text{待ち行列遅延 } W_n]$
 - $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を小さくすると $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が大きくなる

AoI 解析と待ち行列モデル

- $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は通常, i.i.d. 確率変数列をなすと仮定される
 - システム遅延 $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ に対するモデル化の枠組み
 - ◆ 単一サーバ待ち行列モデル
 - 資源競合を定式化
 - $D_n = [\text{サービス時間 } H_n] + [\text{待ち行列遅延 } W_n]$
 - $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を小さくすると $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が大きくなる
 - ◆ $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ とは独立に i.i.d.
 - 複数経路のあるネットワークやサーバクラスタのモデル
 - 無限サーバ待ち行列と等価
- $$D_n = [\text{サービス時間 } H_n]$$

AoI 解析と待ち行列モデル

- $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は通常, i.i.d. 確率変数列をなすと仮定される
 - システム遅延 $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ に対するモデル化の枠組み
 - ◆ 単一サーバ待ち行列モデル
 - 資源競合を定式化
 - $D_n = [\text{サービス時間 } H_n] + [\text{待ち行列遅延 } W_n]$
 - $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を小さくすると $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ が大きくなる
 - ◆ $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ とは独立に i.i.d.
 - 複数経路のあるネットワークやサーバクラスタのモデル
 - 無限サーバ待ち行列と等価
- $$D_n = [\text{サービス時間 } H_n]$$

関連研究

先行研究は無限サーバ待ち行列における平均 AoI $E[A]$ を考察

$$E[A] = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} A_t dt$$

- M/M/ ∞ 待ち行列における $E[A]$ の陽形式解^[22]
- D/GI/ ∞ 待ち行列の亜種 (クラウドゲームのモデル)^[23]
 - ◆ $E[A]$ に対する近似解析法が示されている
- GI/GI/ ∞ 待ち行列における $E[A]$ の特徴づけ^[24]

[22] C. Kam et al, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 65, no. 3, 2016.

[23] R. Yates et al, *Proc. of IEEE INFOCOM 2017*, 2017.

[24] R. Talak et al, *arXiv:1810.04371*, 2018.

本発表の概要

G_n : 更新情報の生成間隔, D_n : システム遅延

- 定常な無限サーバ待ち行列での AoI の 確率分布 を特徴づける

$$\Pr(A > x) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \mathbb{1}\{A_t > x\} dt$$

- ロスのある GI/GI/ ∞ 待ち行列を考察
 - ◆ $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ と $(D_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ は 一般の非負確率分布 に従う
 - ◆ 非零の確率で $D_n = \infty$ となることを許す ➡ ロス発生を表現
- さらに, 特別な場合として D/GI/ ∞ と M/GI/ ∞ を考察
 - ◆ $\Pr(A > x)$ に対する単純な陽表現式
 - ◆ 確率順序を用いた比較結果

一般的な場合: ロスのある $GI/GI/\infty$ 待ち行列

モデル

- $(G_n)_{n \in \mathbb{Z}}$: 更新情報の生成間隔 (i.i.d.)

- ◆ 平均生成頻度 $\lambda := 1/E[G_n]$

- $(H_n)_{n \in \mathbb{Z}}$: システム遅延 (i.i.d.) ※ $D_n = H_n$

- ◆ H : システム遅延を表す一般の確率変数

- ◆ 分布関数 $H(x) := \Pr(H \leq x)$, 補分布関数 $\bar{H}(x) := 1 - H(x)$

- $H(x)$ は劣確率的であることを許す

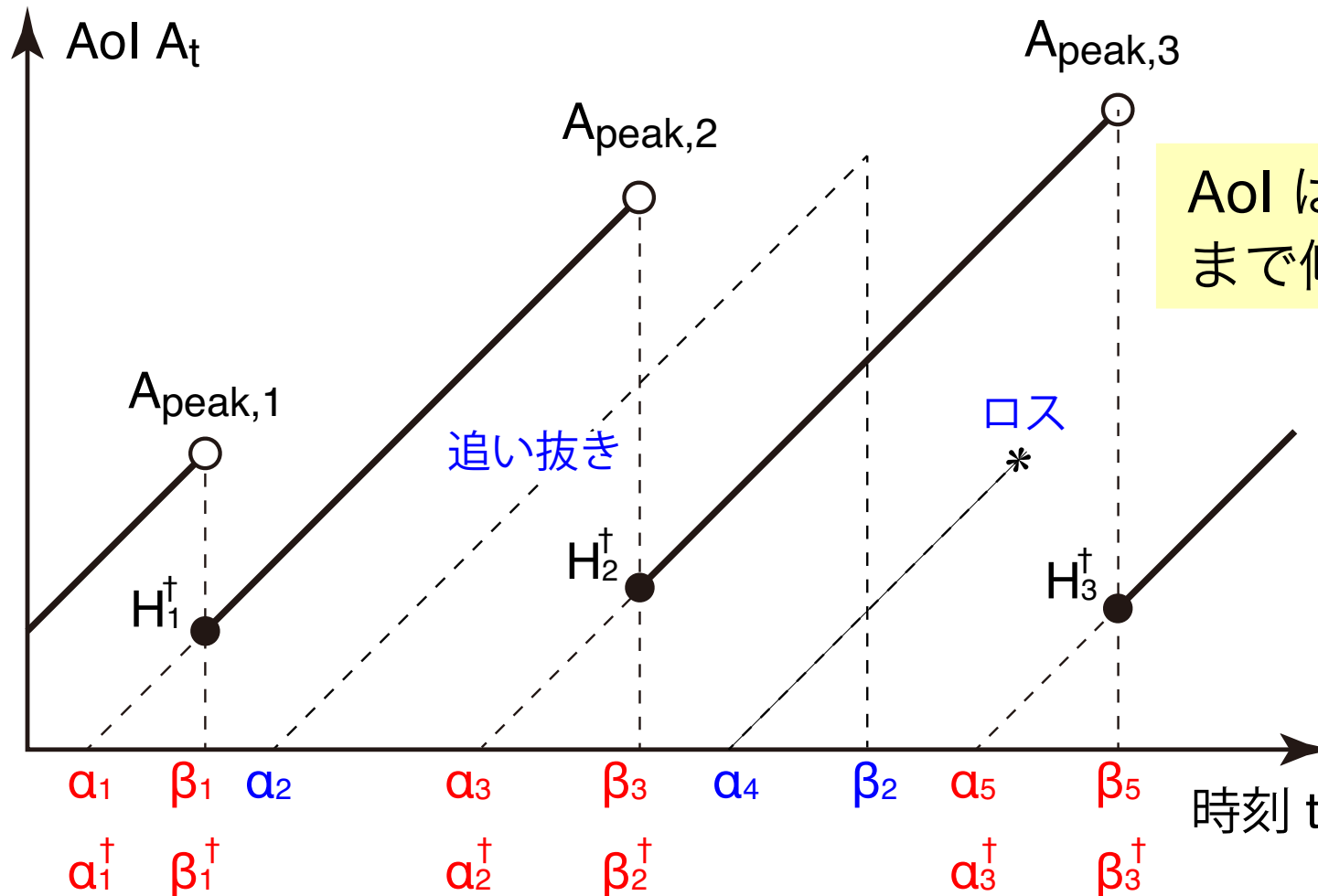
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{H}(x) = \Pr(H = \infty) \quad (= \text{ロス確率})$$

- 以降では, システムは定常であると仮定

GI/GI/∞ 待ち行列における AoI 過程

$H_\ell^\dagger := \beta_\ell^\dagger - \alpha_\ell^\dagger$: ℓ 番目の有効な更新情報のシステム遅延

$A_{\text{peak},\ell}^\dagger := H_{\ell-1}^\dagger + (\beta_\ell^\dagger - \beta_{\ell-1}^\dagger)$: ℓ 番目のピーク AoI



AoI は H_ℓ^\dagger から $A_{\text{peak},\ell+1}$ まで傾き 1 で増加

Aol の確率分布が満たす不変式

- A : Aol の定常分布に従う一般の確率変数
- A_{peak} : ピーク Aol の定常分布に従う一般の確率変数
- H^\dagger : 有効な更新のシステム遅延の定常分布に従う一般の確率変数

補題 1^[6].

A は絶対連続な確率分布を有し, その密度関数は次式で与えられる

$$a(x) = \lambda P_I \cdot \{\Pr(A_{\text{peak}} > x) - \Pr(H^\dagger > x)\}$$

P_I : ランダムに選ばれた更新情報が有効となる確率

[6] Y. Inoue et al., *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 65, no. 12, 2019.

GI/GI/ ∞ 待ち行列における AoI 分布 (1)

- ℓ 番目のピーク AoI は次式で与えられる

$$A_{\text{peak},\ell} = H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger}$$

$$B_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \beta_{\ell-1}^{\dagger} \quad \text{モニタ更新間隔}$$

$$H_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \alpha_{\ell}^{\dagger} \quad \text{システム遅延}$$

GI/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布 (1)

- ℓ 番目のピーク AoI は次式で与えられる

$$A_{\text{peak},\ell} = H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger}$$

$$B_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \beta_{\ell-1}^{\dagger} \quad \text{モニタ更新間隔}$$

$$H_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \alpha_{\ell}^{\dagger} \quad \text{システム遅延}$$

したがって,

$$\Pr(A_{\text{peak},\ell} > x) = \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} > x) + \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} \leq x, H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger} > x)$$

GI/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布 (1)

- ℓ 番目のピーク AoI は次式で与えられる

$$A_{\text{peak},\ell} = H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger}$$

$$B_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \beta_{\ell-1}^{\dagger} \quad \text{モニタ更新間隔}$$

$$H_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \alpha_{\ell}^{\dagger} \quad \text{システム遅延}$$

したがって,

$$\Pr(A_{\text{peak},\ell} > x) = \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} > x) + \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} \leq x, H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger} > x)$$

- ➡ システムの定常性ならびに前述の関係式から, AoI の密度関数は

$$a(x) = \lambda P_I \cdot \{\Pr(A_{\text{peak},\ell} > x) - \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} > x)\}$$

GI/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布 (1)

- ℓ 番目のピーク AoI は次式で与えられる

$$A_{\text{peak},\ell} = H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger}$$

$$B_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \beta_{\ell-1}^{\dagger} \quad \text{モニタ更新間隔}$$

$$H_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \alpha_{\ell}^{\dagger} \quad \text{システム遅延}$$

したがって,

$$\Pr(A_{\text{peak},\ell} > x) = \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} > x) + \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} \leq x, H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger} > x)$$

- ➡ システムの定常性ならびに前述の関係式から, AoI の密度関数は

$$a(x) = \lambda P_I \cdot \{\Pr(A_{\text{peak},\ell} > x) - \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} > x)\}$$

GI/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布 (1)

- ℓ 番目のピーク AoI は次式で与えられる

$$A_{\text{peak},\ell} = H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger}$$

$$B_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \beta_{\ell-1}^{\dagger} \quad \text{モニタ更新間隔}$$

$$H_{\ell}^{\dagger} := \beta_{\ell}^{\dagger} - \alpha_{\ell}^{\dagger} \quad \text{システム遅延}$$

したがって,

$$\Pr(A_{\text{peak},\ell} > x) = \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} > x) + \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} \leq x, H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger} > x)$$

- ➡ システムの定常性ならびに前述の関係式から, AoI の密度関数は

$$a(x) = \lambda P_I \cdot \{ \Pr(A_{\text{peak},\ell} > x) - \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} > x) \}$$

以上より, 次式を得る

$$a(x) = \lambda P_I \cdot \Pr(H_{\ell-1}^{\dagger} \leq x, H_{\ell-1}^{\dagger} + B_{\ell}^{\dagger} > x)$$

GI/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布

$$a(x) = \lambda P_I \cdot \Pr\left(\underset{\textcircled{1}}{H_{\ell-1}^\dagger \leq x}, \underset{\textcircled{2}}{H_{\ell-1}^\dagger + B_\ell^\dagger > x}\right)$$

上記の確率の解釈:

- ある更新情報 (時刻 t_0 に生成) について, 次のことが成り立つ
 - ① 時刻 $t_0 + x$ までにモニタへ届く
 - ② 後から生成された更新情報は,
いずれも時刻 $t_0 + x$ までにモニタへ届かない

GI/GI/∞ 待ち行列における Aol 分布

$$a(x) = \lambda P_I \cdot \Pr \left(\underset{\textcircled{1}}{H_{\ell-1}^\dagger \leq x}, \underset{\textcircled{2}}{H_{\ell-1}^\dagger + B_\ell^\dagger > x} \right)$$

上記の確率の解釈:

- ある更新情報 (時刻 t_0 に生成) について, 次のことが成り立つ
 - ① 時刻 $t_0 + x$ までにモニタへ届く
 - ② 後から生成された更新情報は,
いずれも時刻 $t_0 + x$ までにモニタへ届かない

$$\Rightarrow \Pr \left(H_{\ell-1}^\dagger \leq x, H_{\ell-1}^\dagger + B_\ell^\dagger > x \right) = \frac{H(x)}{P_I} \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \bar{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \right]$$

$$\ast \bar{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) = \Pr \left(\sum_{i=1}^n G_i + H_n > x \right)$$

GI/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布

- 以上より, 次の結果を得る

定理 1.

定常な GI/GI/∞ 待ち行列における AoI の
確率密度関数 $a(x)$ は次式で与えられる.

$$a(x) = \lambda H(x) E \left[\prod_{n=1}^{\infty} \bar{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \right]$$

- 以下では, この結果を D/GI/∞ ならびに M/GI/∞ に特別化する

特別な場合: $D/GI/\infty$ ならびに $M/GI/\infty$ 待ち行列

D/GI/ ∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報は一定間隔 τ で生成

$$G_n = \tau, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- AoI の密度関数 $a(x)$

$$a(x) = \frac{H(x)}{\tau} \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \overline{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \right]$$

D/GI/ ∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報は一定間隔 τ で生成

$$G_n = \tau, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- AoI の密度関数 $a(x)$

$$a(x) = \frac{H(x)}{\tau} \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \overline{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \right] = \frac{H(x)}{\tau} \prod_{n=1}^{\infty} \overline{H}(x - n\tau)$$

D/GI/ ∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報は一定間隔 τ で生成

$$G_n = \tau, \quad n \in \mathbb{Z}$$

定理 2. $C_K := [K\tau, (K+1)\tau)$ ($K = 0, 1, \dots$) とおく.

(i) 定常 AoI の密度関数は次式で与えられる

$$a(x) = \frac{H(x)}{\tau} \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau), \quad x \in C_K$$

D/GI/ ∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報は一定間隔 τ で生成

$$G_n = \tau, \quad n \in \mathbb{Z}$$

定理 2. $C_K := [K\tau, (K+1)\tau)$ ($K = 0, 1, \dots$) とおく.

- (i) 定常 AoI の密度関数は次式で与えられる

$$a(x) = \frac{H(x)}{\tau} \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau), \quad x \in C_K$$

- (ii) 定常 AoI の補分布関数は次式で与えられる

$$\begin{aligned} \Pr(A > x) &= \frac{1}{\tau} \int_{x-K\tau}^{\tau} \left(\prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + u) \right) du \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int_0^{x-K\tau} \left(\prod_{n=0}^K \bar{H}(n\tau + u) \right) du, \quad x \in C_K \end{aligned}$$

M/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報の生成間隔は指数分布に従う

$$\Pr(G_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- AoI の密度関数 $a(x)$

$$a(x) = \lambda H(x) \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \bar{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \right]$$

M/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報の生成間隔は指数分布に従う

$$\Pr(G_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- AoI の密度関数 $a(x)$

$$a(x) = \lambda H(x) \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \bar{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \right] = \lambda H(x) \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

M/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報の生成間隔は指数分布に従う

$$\Pr(G_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- AoI の密度関数 $a(x)$

$$a(x) = \lambda H(x) \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \bar{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \right] = \lambda H(x) \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

上式中の期待値 = 時間区間 $(0, x)$ に生成された更新情報がいずれも時刻 x までにモニタへ到達しない確率

M/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報の生成間隔は指数分布に従う

$$\Pr(G_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- AoI の密度関数 $a(x)$

$$a(x) = \lambda H(x) \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \bar{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \right] = \lambda H(x) \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

上式中の期待値 = 時間区間 $(0, x)$ に生成された更新情報がいずれも時刻 x までにモニタへ到達しない確率

$\lambda \Delta y \cdot \bar{H}(x - y) \simeq$ 区間 $[y, y + \Delta y) \subset (0, x)$ に更新情報が生成され、それが時刻 x までにモニタへ到達しない確率

M/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報の生成間隔は指数分布に従う

$$\Pr(G_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

- AoI の密度関数 $a(x)$

$$a(x) = \lambda H(x) \mathbb{E} \left[\prod_{n=1}^{\infty} \bar{H} \left(x - \sum_{i=1}^n G_i \right) \right] = \lambda H(x) \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

上式中の期待値 = 時間区間 $(0, x)$ に生成された更新情報がいずれも時刻 x までにモニタへ到達しない確率

= 率 $\lambda H(x-y)$, $y \in (0, x)$ の非斉時ポワソン到着が時間区間 $(0, x)$ において一つも発生しない確率

M/GI/∞ 待ち行列における AoI 分布

- 更新情報の生成間隔は指数分布に従う

$$\Pr(G_n \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

定理 3.

- (i) 定常 AoI の密度関数は次式で与えられる

$$a(x) = \lambda H(x) \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

- (ii) 定常 AoI の補分布関数は次式で与えられる

$$\Pr(A > x) = \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

M/GI/∞ 待ち行列における平均 AoI

- 以上の結果より, **M/GI/∞** において次式が成立

$$E[A] = \int_{x=0}^{\infty} \exp \left[-\lambda \int_{y=0}^x H(y) dy \right] dx$$

(参考) **M/M/∞** に対する先行研究の結果 [22]

$$E[A] = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \mu}{\prod_{k=1}^{n+1} (\lambda + k\mu)} \left[\sum_{j=0}^n \left\{ \frac{1}{\lambda + j\mu} \left(\frac{2\lambda + (n+2)\mu}{(\lambda + (n+1)\mu)(\lambda + (n+2)\mu)} + \sum_{k=j}^n \frac{1}{\lambda + k\mu} \right) \right\} \right. \\ \left. + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(n+1)\lambda^{r-1}\mu}{\prod_{k=1}^{r+1} (\lambda + (n+k)\mu)} \left(\frac{2\lambda + (n+2)\mu}{(\lambda + (n+1)\mu)(\lambda + (n+2)\mu)} + \sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{1}{\lambda + \ell\mu} \right) \right]$$

[22] C. Kam et al, *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 65, no. 3, 2016.

D/GI/∞ と M/GI/∞ における AoI の比較

- D/GI/∞ 待ち行列における AoI の密度関数

$$a(x) = \frac{H(x)}{\tau} \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau), \quad x \in [K\tau, (K+1)\tau)$$

- M/GI/∞ 待ち行列における AoI の密度関数

$$a(x) = \lambda H(x) \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right], \quad x \geq 0$$

これらのモデルにおける AoI の分布を比較したい

確率順序

X と Y を連続な非負確率変数とする (密度関数 $f_X(x)$, $f_Y(x)$)

- 通常確率順序 \leq_{st}

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \Pr(X > x) \leq \Pr(Y > x), \quad \forall x \geq 0$$

- ◆ $X \leq_{st} Y$ は, 任意の非減少関数 $\phi(\cdot)$ に対し

$$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)] \text{ が成り立つことと等価}$$

確率順序

X と Y を連続な非負確率変数とする (密度関数 $f_X(x)$, $f_Y(x)$)

- 通常確率順序 \leq_{st}

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \Pr(X > x) \leq \Pr(Y > x), \quad \forall x \geq 0$$

◆ $X \leq_{st} Y$ は、任意の非減少関数 $\phi(\cdot)$ に対し

$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$ が成り立つことと等価

- ハザード率順序 \leq_{hr}

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow \frac{f_X(t)}{\Pr(X > t)} \geq \frac{f_Y(t)}{\Pr(Y > t)}, \quad \forall t \geq 0$$

確率順序

X と Y を連続な非負確率変数とする (密度関数 $f_X(x)$, $f_Y(x)$)

- 通常確率順序 \leq_{st}

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \Pr(X > x) \leq \Pr(Y > x), \quad \forall x \geq 0$$

◆ $X \leq_{st} Y$ は、任意の非減少関数 $\phi(\cdot)$ に対し

$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$ が成り立つことと等価

- ハザード率順序 \leq_{hr}

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow \frac{f_X(t)}{\Pr(X > t)} \geq \frac{f_Y(t)}{\Pr(Y > t)}, \quad \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [X | X > t] \leq_{st} [Y | Y > t], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

確率順序

X と Y を連続な非負確率変数とする (密度関数 $f_X(x)$, $f_Y(x)$)

- 通常確率順序 \leq_{st}

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow \Pr(X > x) \leq \Pr(Y > x), \quad \forall x \geq 0$$

◆ $X \leq_{st} Y$ は、任意の非減少関数 $\phi(\cdot)$ に対し

$$E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)] \text{ が成り立つことと等価}$$

- ハザード率順序 \leq_{hr}

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow \frac{f_X(t)}{\Pr(X > t)} \geq \frac{f_Y(t)}{\Pr(Y > t)}, \quad \forall t \geq 0$$

$$\Leftrightarrow [X | X > t] \leq_{st} [Y | Y > t], \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

- 定義より $X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y$ が成立

D/GI/∞ と M/GI/∞ における AoI の比較

- M/GI/∞ 待ち行列における AoI の定常分布

- ◆ 密度関数

$$a(x) = \lambda H(x) \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

- ◆ 補分布関数

$$\Pr(A > x) = \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

D/GI/∞ と M/GI/∞ における AoI の比較

- M/GI/∞ 待ち行列における AoI の定常分布

- ◆ 密度関数

$$a(x) = \lambda H(x) \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

- ◆ 補分布関数

$$\Pr(A > x) = \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

- ◆ ハザード率

$$\frac{a(x)}{\Pr(A > x)} = \lambda H(x)$$

D/GI/∞ と M/GI/∞ における AoI の比較

- M/GI/∞ 待ち行列における AoI の定常分布

- ◆ 密度関数

$$a(x) = \lambda H(x) \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

- ◆ 補分布関数

$$\Pr(A > x) = \exp \left[-\lambda \int_0^x H(y) dy \right]$$

- ◆ ハザード率

$$\frac{a(x)}{\Pr(A > x)} = \lambda H(x)$$

➡ D/GI/∞ における AoI 分布のハザード率を考える

D/GI/∞ と M/GI/∞ における AoI の比較

- D/GI/∞ 待ち行列における AoI の定常分布 ($\lambda = 1/\tau$)

- ◆ 密度関数

$$a(x) = \lambda H(x) \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau), \quad x \in [K\tau, (K+1)\tau)$$

- ◆ 補分布関数

$$\begin{aligned} \Pr(A > x) &= \frac{1}{\tau} \int_{x-K\tau}^{\tau} \left(\prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + u) \right) du \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int_0^{x-K\tau} \left(\prod_{n=0}^K \bar{H}(n\tau + u) \right) du, \quad x \in [K\tau, (K+1)\tau) \end{aligned}$$

D/GI/∞ と M/GI/∞ における AoI の比較

- D/GI/∞ 待ち行列における AoI の定常分布 ($\lambda = 1/\tau$)

- ◆ 密度関数

$$a(x) = \lambda H(x) \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau), \quad x \in [K\tau, (K+1)\tau)$$

- ◆ 補分布関数

$$\begin{aligned} \Pr(A > x) &= \frac{1}{\tau} \int_{x-K\tau}^{\tau} \left(\prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + u) \right) du \\ &\quad + \frac{1}{\tau} \int_0^{x-K\tau} \left(\prod_{n=0}^K \bar{H}(n\tau + u) \right) du, \quad x \in [K\tau, (K+1)\tau) \end{aligned}$$

$$\leq \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau)$$

D/GI/∞ と M/GI/∞ における AoI の比較

- D/GI/∞ 待ち行列における AoI の定常分布 ($\lambda = 1/\tau$)

- ◆ 密度関数

$$a(x) = \lambda H(x) \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau), \quad x \in [K\tau, (K+1)\tau)$$

- ◆ 補分布関数

$$\Pr(A > x) \leq \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau)$$

D/GI/∞ と M/GI/∞ における AoI の比較

- D/GI/∞ 待ち行列における AoI の定常分布 ($\lambda = 1/\tau$)

- ◆ 密度関数

$$a(x) = \lambda H(x) \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau), \quad x \in [K\tau, (K+1)\tau)$$

- ◆ 補分布関数

$$\Pr(A > x) \leq \prod_{n=0}^{K-1} \bar{H}(n\tau + x - K\tau)$$

- ◆ ハザード率関数

$$\frac{a(x)}{\Pr(A > x)} \geq \lambda H(x) = \text{M/GI/}\infty \text{ における AoI のハザード率関数}$$

D/GI/∞ と M/GI/∞ における Aol の比較

以上より, 次の結果を得る

定理 4.

更新情報の生成頻度 λ ならびに遅延時間分布 $H(\cdot)$ が同一である D/GI/∞ および M/GI/∞ 待ち行列において次式が成り立つ

$$A^{D/GI/\infty} \leq_{hr} A^{M/GI/\infty}$$

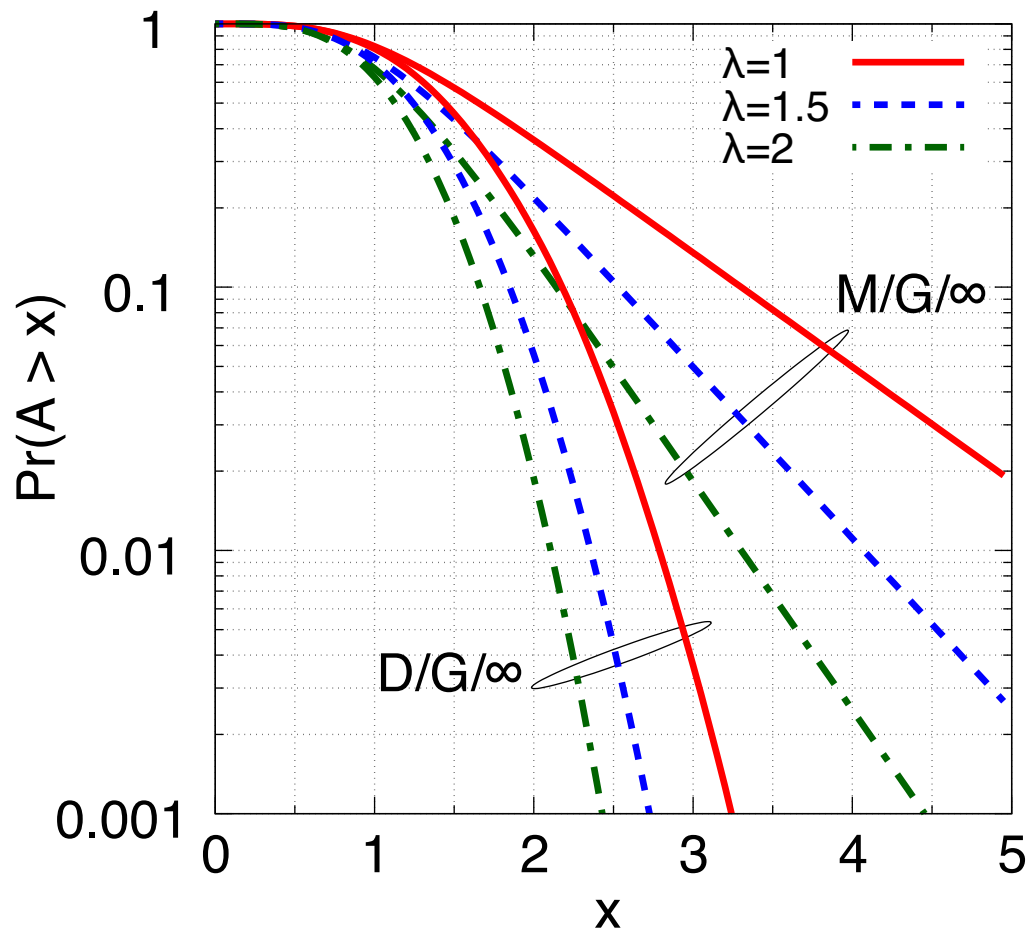
$A^{D/GI/\infty}$: D/GI/∞ 待ち行列の定常 Aol

$A^{M/GI/\infty}$: M/GI/∞ 待ち行列の定常 Aol

数値例

D/Gamma/∞ および M/Gamma/∞ 待ち行列の比較

システム遅延は $E[H] = 1$ と $SD[H] = 0.5$ で定まるガンマ分布



● D/G/∞ では M/G/∞ よりも Aol の裾確率 $\Pr(A > x)$ が急速に減衰

➡ 固定間隔の更新生成はランダム間隔よりも Aol に関して効果的

まとめ

無限サーバ待ち行列における AoI の定常分布を考察

- GI/GI/ ∞ 待ち行列における AoI の密度関数の公式を導出
- D/GI/ ∞ ならびに M/GI/ ∞ 待ち行列に特別化
 - ◆ AoI 分布に関する単純な陽表現公式ならびに比較結果を導出
- 今回の発表内容は以下の会議録に基づく
 - ◆ Yoshiaki Inoue, *Proc. of The 3rd AoI Workshop, 2020.*
- この結果を通信システム (DTN) へ応用した論文を現在投稿中
 - ◆ Yoshiaki Inoue and Tomotaka Kimura,
submitted to *IEEE J. Sel. Areas Commun.* (Special Issue on AoI).